

Corrigé Mines Ponts 2025 Maths 1

Partie 1. Polynômes réciproques

1 ▷ Remarquons que $X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^p a_k X^{p-k} = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k$.

Alors par unicité des coefficients d'un polynôme, $P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $a_k = a_{p-k}$.

Ainsi P est réciproque si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $a_k = a_{p-k}$.

2 ▷ $\diamond X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p X^p \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i}$.

Or $p = \sum_{i=1}^d m_i$.

Donc $X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)^{m_i}$.

$\diamond$ Supposons que P est réciproque.

D'après la question précédente, $a_0 = a_p$ et $a_p \neq 0$. Donc $a_0 \neq 0$ et 0 n'est pas une racine de P .

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\lambda_i \neq 0$

$\diamond$ Supposons que P est réciproque.

Alors d'après la première partie de cette question, $P(X) = a_p \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)^{m_i} = (-1)^p a_p \left(\prod_{i=1}^d \lambda_i\right) \prod_{i=1}^d \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}$.

Donc pour tout i de $\llbracket 1, d \rrbracket$, $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P de multiplicité m_i .

3 ▷ Supposons que Q est antiréciproque.

$\diamond$ En évaluant en 1 la relation vérifiée par Q , $Q(1) = -Q(1)$. Donc $Q(1) = 0$.

Ainsi 1 est une racine de Q .

$\diamond$ Comme 1 est une racine de Q , il existe un polynôme P tel que $Q(X) = (X - 1)P(X)$.

Si Q est un polynôme de degré 1, alors P est un constant.

Si le degré de Q est supérieur ou égal à 2, alors le degré de P est $p - 1$ et $Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$.

Or $X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right) = -(X - 1) X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right)$ et $Q(X) = (X - 1)P(X)$.

Donc $P(X) = X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right)$ ou encore P est réciproque.

Ainsi il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X - 1)P$

4 ▷ D'après la propriété vérifiée par R , il existe un complexe c non nul, des entiers m et m' , un entier r et des complexes $a_1, \dots, a_r$ et des entiers non nuls $m_1, \dots, m_r$ tels que

$$R(X) = c(X - 1)^m (X + 1)^{m'} \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_i} \left(X - \frac{1}{a_i}\right)^{m_i}$$

En développant cette expression, le coefficient constant de R est $(-1)^m c$.

Cependant R peut aussi s'écrire sous la forme factorisée suivante

$$R(X) = c \prod_{i=1}^{2r+m+m'} (X - \alpha_i)^{\mu_i}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{2r+m+m'}$ sont les racines de R et $\mu_1, \dots, \mu_{2r+m+m'}$ leur multiplicité.

Alors en développant cette expression, le coefficient constant de R est $c(-1)^{2r+m+m'} \prod_{i=1}^{2r+m+m'} \alpha_i$.

Avec la même matrice de passage, B^{-1} est semblable à

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{m'} & & & & \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \frac{1}{\lambda_1} I_{m_1} & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \lambda_1 I_{m_1} & \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{1}{\lambda_r} I_{m_r} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix},$$

Car si v est un vecteur propre de B associé à la valeur propre a , alors v est un vecteur propre de B^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{a}$.

En intervertissant dans la matrice de passage les colonnes des vecteurs propres associés à λ_i avec celles des vecteurs propres associés à $\frac{1}{\lambda_i}$, les matrices

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{m'} & & & & \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ \vdots & & & \frac{1}{\lambda_1} I_{m_1} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & 0 & \lambda_r I_{m_r} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_r} I_{m_r} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_{m'} & & & & \\ \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & \frac{1}{\lambda_1} I_{m_1} & & & \\ \vdots & & & \lambda_1 I_{m_1} & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & 0 & \frac{1}{\lambda_r} I_{m_r} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix} \text{ sont}$$

semblables.

Donc B et B^{-1} sont semblables.

9 ▷ Remarquons que $E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Et rappelons que $E_2(B^{-1}) = E_{\frac{1}{2}}(B)$. Donc $E_2(B^{-1}) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi la dimension de $E_2(B)$ et la dimension de $E_2(B^{-1})$ sont différentes.

Or si deux matrices sont semblables, elles sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, elles ont donc même valeurs propres et les sous-espaces propres ont même dimension.

Donc B et B^{-1} ne sont pas semblables.

Partie 3. Produits de matrices de symétries.

10 ▷ ♦ Remarquons que $S_2 S_1 A = S_2 S_1 S_1 S_2 = S_2 I_n S_2 = I_n$. Donc A est inversible d'inverse $S_2 S_1$.

♦ Remarquons que $S_2 A S_2 = S_2 S_1 S_2 S_2 = S_2 S_1$.

Or S_2 est inversible d'inverse lui-même.

Donc A est semblable à son inverse.

11 ▷ Supposons que $A = S_1 S_2$ où S_1 et S_2 sont des matrices de symétries.

Soit A' une matrice semblable à A .

Alors il existe une matrice P inversible telle que $A' = P A P^{-1}$.

Posons $S'_1 = P S_1 P^{-1}$ et $S'_2 = P S_2 P^{-1}$.

Alors $S'_1 S'_2 = A'$.

Et $(S'_1)^2 = P S_1^2 P^{-1} = I_n$ et $(S'_2)^2 = P S_2^2 P^{-1} = I_n$. Donc S'_1 et S'_2 sont des matrices de symétrie.

Ainsi si A est un produit de deux matrices de symétries, alors toute matrice semblable à A est aussi un produit de matrices de symétries.

12 ▷ ♦ Remarquons que $S_1^2 = \begin{pmatrix} QP & 0 \\ 0 & PQ \end{pmatrix}$.

Donc S_1 est une matrice de symétrie si et seulement si $QP = PQ = I_n$.

♦ Remarquons que $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & PC \\ QB & 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant la caractérisation obtenue précédemment,

S_2 est une matrice de symétrie si et seulement si $QBPC = PCQB = I_n$.

Alors $N' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{\lambda^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

Donc la surdiagonale de N' est non nulle. Alors $N'^{n-1} \neq 0$.

◇ Alors d'après la question 14, N' est semblable à N . Alors il existe une matrice P inversible telle que

$$P \left(J_n \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} I_n \right) P^{-1} = J_n^{-1}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} I_n$$

ou encore en développant et en simplifiant $P J_n \left(\frac{1}{\lambda} \right) P^{-1} = J_n^{-1}(\lambda)$. Donc $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n \left(\frac{1}{\lambda} \right)$.

17 ▷ ◇ $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], s_1^2(P) = s_1(P(-X)) = P(X)$.

Donc $s_1^2 = \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

◇ $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], s_2^2(P) = s_2(P(1-X)) = P(1 - (1-X)) = P(X)$.

Donc $s_2^2 = \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

◇ $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X], s_1 \circ s_2(P) = s_1(P(1-X)) = P(1+X)$.

Donc $s_1 \circ s_2 = g + \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

18 ▷ Soit P un polynôme non constant. Notons $P(X) = \sum_{k=0}^d c_k X^k$ avec $c_d \neq 0$ et $d \geq 1$.

$P(X+1)$ et $P(X)$ sont de même degré.

Donc $g(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à celui de P .

$$\begin{aligned} g(P)(X) &= \sum_{k=0}^d c_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^d c_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^d c_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - \sum_{k=0}^d c_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^d c_k \left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right) - \sum_{k=0}^d c_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^d c_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^d \binom{k}{i} c_k \right) X^i \end{aligned}$$

Or $c_d \neq 0$. Donc $g(P)$ est de degré $d-1$.

19 ▷ Remarquons que $g^n = 0$ et que $g^{n-1} \neq 0$.

En effet, par récurrence, le degré de $g^k(P)$ est $\begin{cases} d-k & \text{si } d = \deg(P) \geq k \\ 0 & \text{si } d < k \end{cases}$

Donc d'après la question 14, la matrice de g dans une base adaptée est N .

Or d'après la question 17, $s_1 \circ s_2 = g + \text{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$ et s_1 et s_2 sont des symétries.

Alors $J_n(1)$ est la matrice de $s_1 \circ s_2$ dans une base adaptée.

Ainsi $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

20 ▷ Comme A est inversible, alors pour tout entier i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $\lambda_i \neq 0$.

Alors pour tout entier i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, d'après la question 16, $J_{n_i}^{-1}(\lambda_i)$ est semblable à $J_{n_i}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, alors il existe une matrice P_i de $\mathbf{GL}_{n_i}$ tel que $J_{n_i}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) = P_i J_{n_i}^{-1}(\lambda_i) P_i^{-1}$.

Remarquons que $A'^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1}^{-1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}^{-1}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}^{-1}(\lambda_r) \end{pmatrix}$.

Et si $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_r \end{pmatrix}$, alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_r^{-1} \end{pmatrix}$.

Alors $PA'^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

Or A est semblable à A' . Donc A^{-1} est semblable à A'^{-1} .

Ainsi A^{-1} est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

21 ▷ Quitte à réordonner les vecteurs de la base, on peut supposer que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont ordonnés tels que les premières valeurs soient égales à 1 si 1 est une valeur propre A , les suivantes égales à -1 si -1 est une valeur propres de A et ensuite que les valeurs propres sont regroupées par λ_i et $\frac{1}{\lambda_i}$ (car d'après la question 7, si λ est une valeur propre de A , $\frac{1}{\lambda}$ aussi).

Ainsi A est semblable à une matrice par bloc, dont les blocs sont soit des matrices de la forme $J_n(1)$,

$J_n(-1)$ ou $\begin{pmatrix} J_n(\lambda) & 0 \\ 0 & J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{pmatrix}$.

D'après la question 19, $J_n(1)$ et $J_n(-1)$ sont le produit de deux matrices symétriques.

Comme $J_n(\lambda)$ et $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ sont semblables, d'après la question 13, $\begin{pmatrix} J_n(\lambda) & 0 \\ 0 & J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{pmatrix}$ est le produit de deux symétries.

Ainsi par produit par bloc, A est un produit de deux matrices de symétries.