

Mines-Ponts PC1 25 : un corrigé

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $p \in \mathbb{N}^*$. On note $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, avec $a_p \neq 0$.

On note alors $S(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^p a_k X^{p-k} \in \mathbb{C}[X]$.

On fait un changement d'indice en posant $q = p - k$: $S(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k$.

Si P est réciproque, alors $P = S$, donc par unicité des coefficients d'un polynôme, on a bien $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = a_{p-k}$.

Réciproquement, si $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = a_{p-k}$, alors on a $P = S$, donc P est réciproque.

Donc P est réciproque si et seulement si $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = a_{p-k}$.

2) On suppose ici $P = a_p \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $p = \deg(P) = \sum_{i=1}^d m_i$.

Alors $X^p = \prod_{i=1}^d X^{m_i}$, donc $X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^d X^{m_i} \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d (1 - X\lambda_i)^{m_i}$.

On a donc $X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^d (1 - X\lambda_i)^{m_i}$

On suppose que P est réciproque. Le produit des racines de P qui est scindé vaut $(-1)^p \frac{a_0}{a_p} = (-1)^p \neq 0$ (on sait avec 1) que $a_0 = a_p$). Donc toutes les racines de P sont non nulles.

En outre, $P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^d (1 - X\lambda_i)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i} \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\lambda_i} - X\right)^{m_i}$.

Donc $P(X) = a_p (-1)^p (-1)^p \prod_{i=1}^d \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}$. Si $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $P(X) = \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i} T$, avec $T\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \neq 0$.

Donc pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i .

3) On suppose que Q est antiréciproque. On a alors $Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$, donc en particulier $Q(1) = -Q(1)$ donc $Q(1) = 0$ et 1 est racine de Q .

Il existe donc un polynôme P tel que $Q = (X - 1)P$

- Si $p = 1$, alors $\deg(P) = 0$ et P est constant.
- Si $p \geq 2$, alors $\deg(P) = p - 1 \geq 1$.

On calcule $X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right) = -(X - 1) X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Comme Q est antiréciproque, il vient $(X - 1)P(X) = (X - 1) X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right)$.

On a donc $(X - 1) \left(P(X) - X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right) \right) = 0$, donc si on note $T(X) = P(X) - X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{C}[X]$, il vient

$\forall z \neq 1, T(z) = 0$.

Donc T a une infinité de racines et $T = 0$, donc $P(X) - X^{p-1}P\left(\frac{1}{X}\right)$ et P est réciproque.

Donc il existe bien P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$

4) On note U l'ensemble des racines de R distinctes de 1 et de -1.

Si λ est une racine de R , on note $m(\lambda)$ sa multiplicité.

On note $m(1)$ la multiplicité de 1 comme racine de R (éventuellement $m(1) = 0$ si 1 n'est pas racine de R).

De même pour $m(-1)$.

On pose $V = \left\{ \lambda \in U, |\lambda| > 1 \text{ ou } \exists \theta \in]0, \pi[, \lambda = e^{i\theta} \right\}$ et $W = \left\{ \lambda \in U, |\lambda| < 1 \text{ ou } \exists \theta \in]0, \pi[, \lambda = e^{-i\theta} \right\}$.

On a alors $U = V \cup W$ et la réunion est disjointe.

Donc le produit des racines de R vaut $\pi = 1^{m(1)}(-1)^{m(-1)} \prod_{\lambda \in V} \lambda^{m(\lambda)} \prod_{\lambda \in W} \lambda^{m(\lambda)}$.

Montrons par double inclusion que $W = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in V \right\}$.

$\supset$ Si $\lambda \in V$, $\lambda \in U$, donc $\frac{1}{\lambda} \in U$ (car $\frac{1}{\lambda} \notin \{-1, 1\}$), et $\left| \frac{1}{\lambda} \right| < 1$ ou $\exists \theta \in]0, \pi[, \frac{1}{\lambda} = e^{-i\theta}$, donc $\frac{1}{\lambda} \in W$.

$\subset$ Si $\mu \in W$, $\mu \in U$, donc $\frac{1}{\mu} \in U$ et $\frac{1}{\mu} \in V$, donc en posant $\lambda = \frac{1}{\mu}$, on a bien $\mu = \frac{1}{\lambda}$, avec $\lambda \in V$.

On a donc $\pi = (-1)^{m(-1)} \prod_{\lambda \in V} \lambda^{m(\lambda)} \prod_{\lambda \in V} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{m(1/\lambda)}$.

Mais par hypothèse, si $\lambda \in V$, $m(\lambda) = m(1/\lambda)$, donc $\pi = (-1)^{m(-1)} \in \{-1, 1\}$.

Donc le produit des racines de R ne peut valoir que 1 ou -1.

5) On prend les mêmes notations et on écrit $R = a_p \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\deg(R) = p$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines distinctes de R , de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_d$. Avec ce qui a été expliqué **au 4)**, ces racines sont aussi les $\left(\frac{1}{\lambda_k} \right)_{1 \leq k \leq d}$, avec les mêmes multiplicités. Donc $R = a_p \prod_{i=1}^d \left(X - \frac{1}{\lambda_i} \right)^{m_i}$.

Donc comme $\deg(R) = \sum_{i=1}^d m_i$, $X^p R\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^d \left(X \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \right)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d \left(1 - \frac{X}{\lambda_i} \right)^{m_i}$.

Donc $X^p R\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^d \left(-\frac{1}{\lambda_i} (X - \lambda_i) \right)^{m_i} = (-1)^p \frac{1}{\prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i}} a_p \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)^{m_i} = (-1)^p \frac{1}{\prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i}} R(X)$.

Mais avec 4), comme $\prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i}$ est le produit des racines de R , il vient $(-1)^p \frac{1}{\prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i}} \in \{-1, 1\}$.

Donc R est réciproque ou antiréciproque.

6) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $\det(xI_n - A) = \det\left(-x\left(\frac{1}{x}A - I_n\right)\right) = (-1)^n x^n \det\left(A\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)\right)$.

Donc $\det(xI_n - A) = (-1)^n x^n \det(A) \det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$

7) Comme A est semblable à son inverse, elles ont même déterminant, donc $\det(A^{-1}) = \det(A)$.

Donc $(\det(A))^2 = 1$ et $\det(A) \in \{-1, 1\}$

Le résultat **du 6)** donne alors pour x non nul, en posant $\alpha = (-1)^n \det(A) \in \{-1, 1\}$:

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = ((-1)^n \det(A)) x^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right) = \alpha x^n \chi_{A^{-1}}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mais deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc $\chi_A = \chi_{A^{-1}}$.

$$\text{Donc } \forall x \neq 0, \chi_A(x) = \alpha x^n \chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Les polynômes $\chi_A(X)$ et $\alpha X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ coïncident donc sur un ensemble infini (ici $\mathbb{R}^*$), donc ils sont égaux.

On a donc $\chi_A(X) = \alpha X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$ et χ_A est soit réciproque (si $\alpha = 1$), soit antiréciproque (si $\alpha = -1$).

- 8) On traite d'abord le cas où γ_B est réciproque. Alors **d'après 2)**, les valeurs propres de B sont non nulles, donc B est inversible. De plus, B est semblable à une matrice diagonale de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & & & & \\ & \frac{1}{\lambda_1} I_{d_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r I_{d_r} & \\ & & & & & \frac{1}{\lambda_r} I_{d_r} \\ & & & & & & I_{d_{r+1}} \\ & & & & & & & -I_{d_{r+1}} \end{pmatrix} \quad (0), \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ complexes et deux à deux}$$

distincts. Ici, si 1 n'est pas valeur propre de B , le bloc $I_{d_{r+1}}$ n'apparaît pas (de même si -1 n'est pas valeur propre de B).

On considère alors f canoniquement associée à D . On note $C = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Alors pour $i \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket$, $f(e_i) = \lambda_1 e_i$, donc $f^{-1}(e_i) = \frac{1}{\lambda_1} e_i$ et pour $i \in \llbracket d_1 + 1, 2d_1 \rrbracket$, $f(e_i) = \frac{1}{\lambda_1} e_i$, donc

$$f^{-1}(e_i) = \lambda_1 e_i$$

On pose alors pour $i \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket$ $u_i = e_{i+d_1}$ et pour $i \in \llbracket d_1 + 1, 2d_1 \rrbracket$, $u_i = e_{i-d_1}$.

Il vient pour $i \in \llbracket 1, d_1 \rrbracket$, $f^{-1}(u_i) = \lambda_1 u_i$, et pour $i \in \llbracket d_1 + 1, 2d_1 \rrbracket$, $f^{-1}(u_i) = \frac{1}{\lambda_1} u_i$,

On procède de même pour les autres blocs en échangeant les vecteurs propres associés à λ_k et ceux associés à $\frac{1}{\lambda_k}$, et sans modifier les vecteurs propres associés à 1 et -1 .

On construit ainsi une nouvelle base $C' = (u_1, \dots, u_n)$ dans laquelle la matrice de f^{-1} est D .

On a ainsi $M_{C'}(f^{-1}) = D$ et $M_{C'}(f) = D^{-1}$, donc comme $M_C(f) = D$, D et D^{-1} représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, donc sont semblables.

De plus, B est semblable à D , donc il existe $P \in GL_n$, $B = P D P^{-1}$.

Ainsi, $B^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$ et B^{-1} et D^{-1} sont semblables.

Ainsi, B^{-1} et B sont semblables et B est semblable à son inverse.

Si γ_B est antiréciproque, **on utilise 3)** et on considère P constant ou réciproque tel que $\gamma_B = (X-1)P$.

Alors les valeurs propres de B restent non nulles car les racines de P ne sont pas nulles (s'il en possède). De plus, on montre de manière analogue que B est bien semblable à son inverse (le problème se traite exactement pareil en ayant augmenté de 1 la taille du bloc associé à la valeur propre 1).

Donc B est inversible et semblable à son inverse.

9) Soit b canoniquement associée à B . On note $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Il vient alors

$$\begin{cases} b(e_1) = 2e_1 \\ b(e_2) = 2e_2 \\ b(e_3) = \frac{1}{2}e_3 \\ b(e_4) = \frac{1}{2}e_4 + e_3 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} b^{-1}(e_1) = \frac{1}{2}e_1 \\ b^{-1}(e_2) = \frac{1}{2}e_2 \\ b^{-1}(e_3) = 2e_3 \\ e_4 = \frac{1}{2}b^{-1}(e_4) + b^{-1}(e_3) \end{cases}, \begin{cases} b^{-1}(e_1) = \frac{1}{2}e_1 \\ b^{-1}(e_2) = \frac{1}{2}e_2 \\ b^{-1}(e_3) = 2e_3 \\ b^{-1}(e_4) = 2e_4 - 4e_3 \end{cases} \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{De plus, } B^{-1} - 2I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \text{rg}(B^{-1} - 2I_4) = 3. \text{ Or } B - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$\text{rg}(B - 2I_4) = 2$. Si B et B^{-1} étaient semblables, on aurait $P \in GL_n$, $B = P B^{-1} P^{-1}$.

Alors $\text{rg}(B - 2I_4) = \text{rg}(P B^{-1} P^{-1} - 2I_4) = \text{rg}(P(B^{-1} - 2I_4)P^{-1}) = \text{rg}(B^{-1} - 2I_4)$ car multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang.

Donc on obtient une absurdité et B n'est pas semblable à son inverse.

10) Soient S_1, S_2 deux matrices de symétries. Elles sont inversibles puisque $S_1^2 = S_2^2 = I_n$. Soit $A = S_1 S_2$.

Alors $S_2 S_1 A = S_2 S_1^2 S_2 = S_2^2 = I_n$. Donc A est inversible et $A^{-1} = S_2 S_1$.

De plus, $A = S_1 S_2 = S_2^{-1} S_2 S_1 S_2 = S_2^{-1} A^{-1} S_2$.

Donc $A = S_1 S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

11) On suppose $A = S_1 S_2$, avec $S_1^2 = S_2^2 = I_n$. Soit B semblable à A . Alors il existe $P \in GL_n$ telle que

$$B = P S_1 S_2 P^{-1} = (P S_1 P^{-1})(P S_2 P^{-1}). \text{ Or } (P S_1 P^{-1})^2 = P S_1^2 P^{-1} = I_n \text{ et de même } (P S_2 P^{-1})^2 = I_n.$$

Donc B est produit de deux matrices de symétries.

Donc si A est produit de deux matrices de symétries, toute matrice semblable à A l'est aussi.

$$12) S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}, \text{ donc } S_1^2 = \begin{pmatrix} PQ & 0_n \\ 0_n & QP \end{pmatrix}. S_2 = S_1 A = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ QB & 0_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } S_2^2 = \begin{pmatrix} PCQB & 0_n \\ 0_n & QBPC \end{pmatrix}. \text{ On sait par hypothèse que } P, Q, B, C \in GL_n$$

Donc S_1 est une matrice de symétrie si et seulement si $Q = P^{-1}$.

$$\text{Donc si } S_1 \text{ et } S_2 \text{ sont des matrices de symétrie, alors } Q = P^{-1} \text{ et } \begin{cases} PCP^{-1}B = I_n \\ P^{-1}BPC = I_n \end{cases}.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} C = (P^{-1}BP)^{-1} = P^{-1}B^{-1}P \\ I_n = I_n \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} B = (PCP^{-1})^{-1} = PC^{-1}P^{-1} \\ I_n = I_n \end{cases}$$

Réciproquement, on suppose que $Q = P^{-1}$ et $C = P^{-1}B^{-1}P$.

Alors $S_1^2 = I_{2n}$ et $PCQB = QBPC = I_n$, donc $S_2^2 = I_{2n}$.

$$\text{Donc } S_1 \text{ et } S_2 = S_1 A \text{ sont des matrices de symétries si et seulement si } \begin{cases} Q = P^{-1} \\ C = P^{-1}B^{-1}P \end{cases}.$$

13) On suppose C semblable à B^{-1} . Alors soit $P \in GL_n$ telle que $C = P^{-1}B^{-1}P$. On pose $Q = P^{-1}$.

On considère $S_1 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix}$ et $S_2 = S_1 A$. Alors **avec 12)**, $S_1^2 = S_2^2 = I_{2n}$ et S_1 et S_2 sont des matrices de symétrie. Dès lors, il vient $S_1 S_2 = S_1^2 A = A$ et A est un produit de matrices de symétries.

14) On cherche une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, g(e_j) = e_{j+1}$ et $g(e_n) = 0_E$.

$$\text{On veut ainsi } \begin{cases} g(e_1) = e_2 \\ g^2(e_1) = e_3 \\ \vdots \\ g^{n-1}(e_1) = e_n \end{cases}$$

Comme $g^{n-1} \neq 0_{L(E)}$, on peut considérer $e_1 \in E$ tel que $g^{n-1}(e_1) \neq 0_E$.

On se place dans $B = (e_1, g(e_1), \dots, g^{n-1}(e_1))$. On veut montrer que c'est une base de E . Comme elle contient $n = \dim(E)$ éléments, il suffit de prouver qu'elle est libre.

Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_0 e_1 + \alpha_1 g(e_1) + \dots + \alpha_{n-1} g^{n-1}(e_1) = 0_E$.

Si on applique g^{n-1} , comme $\forall k \geq n, g^k = 0_{L(E)}$, il vient $\alpha_0 g^{n-1}(e_1) = 0_E$, donc $\alpha_0 = 0$.

On peut procéder par récurrence forte. On préfère poser $A = \{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k \neq 0\}$.

Si par l'absurde $A \neq \emptyset$, alors on considère $p = \min(A)$.

Il vient $\alpha_p g^p(e_1) + \dots + \alpha_{n-1} g^{n-1}(e_1) = 0_E$. On applique g^{n-1-p} et il vient $\alpha_p g^{n-1}(e_1) = 0_E$, donc $\alpha_p = 0$.

C'est absurde puisque $p \in A$. Donc $A = \emptyset$ et $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ et B est libre donc base de E .

Si $g^{n-1}(e_1) \neq 0_E$, $B = (e_1, g(e_1), \dots, g^{n-1}(e_1))$ est une base de E telle que $M_B(g) = N$.

15) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\det(J_n(\lambda)) = \lambda^n \neq 0$, donc $J_n(\lambda)$ est inversible.

De plus, on calcule $(\lambda I_n + N) \left(\frac{1}{\lambda} I_n + N' \right) = I_n + \lambda N' + \frac{1}{\lambda} N + NN'$.

On résout $(\lambda I_n + N) \left(\frac{1}{\lambda} I_n + N' \right) = I_n \Leftrightarrow 0_n = \lambda N' + \frac{1}{\lambda} N + NN' \Leftrightarrow (\lambda I_n + N) N' = -\frac{1}{\lambda} N$.

Or $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$ est inversible, donc $(\lambda I_n + N) \left(\frac{1}{\lambda} I_n + N' \right) = I_n \Leftrightarrow N' = -\frac{1}{\lambda} (\lambda I_n + N)^{-1} N$.

On pose donc $N' = -\frac{1}{\lambda} (\lambda I_n + N)^{-1} N$ et il vient $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n + N'$.

16) On remarque tout d'abord que $N^n = 0_n$. En effet, si on reprend $B = (e_1, g(e_1), \dots, g^{n-1}(e_1))$ telle que $M_B(g) = N$, il vient $M_B(g^n) = N^n$, avec $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g^n(g^j(e_1)) = 0_E$.

De plus, $(\lambda I_n + N)N = N(\lambda I_n + N)$, donc en multipliant à gauche et à droite par $(\lambda I_n + N)^{-1}$, il vient $N(\lambda I_n + N)^{-1} = (\lambda I_n + N)^{-1} N$.

Donc $(N')^n = \left(-\frac{1}{\lambda} \right)^n \left((\lambda I_n + N)^{-1} N \right)^n = \left(-\frac{1}{\lambda} \right)^n \left((\lambda I_n + N)^{-1} \right)^n N^n = 0_n$.

On a donc bien $(N')^n = 0_n$.

On aimerait montrer que N et N' sont semblables.

On souhaite utiliser 14). Montrons que $(N')^{n-1} \neq 0_n$. On procède par l'absurde.

Si $(N')^{n-1} = 0_n$, alors $\left(-\frac{1}{\lambda} \right)^{n-1} \left((\lambda I_n + N)^{-1} \right)^{n-1} N^{n-1} = 0_n$, donc comme $\left((\lambda I_n + N)^{-1} \right)^{n-1}$ est inversible,

$N^{n-1} = 0_n$. On aurait alors $g^{n-1} = 0_{L(E)}$, ce qui est absurde.

Soit alors C une base de E et $h \in L(E)$ telle que $M_C(h) = N'$. On a $h^{n-1} \neq 0_{L(E)}$ et $h^n = 0_{L(E)}$.

Donc **d'après 14**, il existe une base B de E telle que $M_B(h) = N$.

N et N' représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, donc sont semblables.

Dès lors, soit $P \in GL_n, N' = P^{-1}NP$. Donc $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I_n + P^{-1}NP = P^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}I_n + N\right)P$.

Donc $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

17) Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Il vient $s_1(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (-1)^k X^k$ et $s_2(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (1-X)^k$.

Alors $s_1^2(P) = P$, $s_2^2(P) = P(1 - (1-X)) = P$.

$s_1 \circ s_2(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (1+X)^k = P(X+1) = g(P) + P$.

Donc $s_1^2 = s_2^2 = Id_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$ et $s_1 \circ s_2 = g + Id_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

18) On suppose $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, avec $a_p \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Donc $g(P) = \sum_{k=0}^p a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^p a_k X^k = (a_p - a_p)X^p + (pa_p + a_{p-1} - a_{p-1})X^{p-1} + S$, avec $\deg(S) < p-1$.

Comme $pa_p \neq 0$, on conclut que $\deg(g(P)) = \deg(P) - 1$ si $\deg(P) \in \mathbb{N}^*$.

19) On veut montrer que $g^n = 0_{L(\mathbb{C}_{n-1}[X])}$ et que $g^{n-1} \neq 0_{L(\mathbb{C}_{n-1}[X])}$ pour appliquer ce qui précède.

Si P est constant, $g(P) = 0$.

On a donc pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\deg(g(P)) \leq \deg(P) - 1$ et par récurrence, $\deg(g^n(P)) \leq \deg(P) - n < 0$.

Donc $g(P) = 0$ et on a bien $g^n = 0_{L(\mathbb{C}_{n-1}[X])}$.

De plus, on pose $P = X^{n-1}$. On prouve par récurrence finie sur $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ $H(k) : \deg(g^k(P)) = n-1-k$.

- $H(0)$ est vraie.
- Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ tel que $H(k)$ est vraie. Alors $\deg(g^k(P)) = n-1-k \geq 1$, donc $g^k(P)$ est non constant et on applique 18) qui donne $H(k+1)$.

En particulier, il vient bien $g^{n-1}(X^{n-1}) \neq 0$ et $g^{n-1} \neq 0_{L(\mathbb{C}_{n-1}[X])}$.

On a donc avec 14) l'existence d'une base B de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ telle que $M_C(g) = N$.

Alors comme d'après 17) $s_1 \circ s_2 = g + Id_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$, $M_C(g + Id_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}) = I_n + N = J_n(1)$.

Si on note $S_1 = M_C(s_1)$ et $S_2 = M_C(s_2)$, il vient alors $S_1 S_2 = J_n(1)$.

Mais $s_1^2 = s_2^2 = Id_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$, donc $S_1^2 = S_2^2 = I_n$.

Donc $J_n(1)$ est le produit de deux matrices de symétries.

20) Si on considère $M = \begin{pmatrix} (J_{n_1}(\lambda_1))^{-1} & & (0) \\ & (J_{n_2}(\lambda_2))^{-1} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & (J_{n_r}(\lambda_r))^{-1} \end{pmatrix}$, on constate par produit par blocs que

$MA' = I_n$, donc $(A')^{-1} = M$. Comme $\det(A) = \det(A')$, A' est inversible et ses valeurs propres sont non nulles, donc $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_k \neq 0$.

On utilise 16) : pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $(J_{n_k}(\lambda_k))^{-1}$ est semblable à $J_{n_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$. Soit donc P_k inversible telle que

$$(J_{n_k}(\lambda_k))^{-1} = P_k J_{n_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) (P_k)^{-1}. \text{ On note alors } P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & \ddots \\ & & & P_r \end{pmatrix} \in GL_n. \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & (0) \\ & P_2^{-1} & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & P_r^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Il vient par produit par blocs } (A')^{-1} = P L P^{-1}, \text{ avec } L = \begin{pmatrix} (J_{n_1}(1/\lambda_1)) & & (0) \\ & (J_{n_2}(1/\lambda_2)) & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (J_{n_r}(1/\lambda_r)) \end{pmatrix}$$

Donc $(A')^{-1}$ et L sont semblables.

En outre A est semblable à A' , donc on peut considérer $Q \in GL_n$ telle que $A = Q A' Q^{-1}$.

Il vient donc $A^{-1} = Q^{-1} (A')^{-1} Q$, donc A^{-1} et $(A')^{-1}$ sont semblables.

$$\text{Finalement, } A^{-1} \text{ et } L = \begin{pmatrix} (J_{n_1}(1/\lambda_1)) & & (0) \\ & (J_{n_2}(1/\lambda_2)) & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (J_{n_r}(1/\lambda_r)) \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}$$

21) D'après 20), comme A est semblable à son inverse, A est également semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} (J_{n_1}(1/\lambda_1)) & & (0) \\ & (J_{n_2}(1/\lambda_2)) & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (J_{n_r}(1/\lambda_r)) \end{pmatrix}.$$

Mais le résultat admis par l'énoncé assure qu'il y a **unicité** (à l'ordre près des blocs) de la matrice de ce type qui est semblable à A .

$$\text{Dès lors, dans l'écriture de } A' = \begin{pmatrix} (J_{n_1}(\lambda_1)) & & (0) \\ & (J_{n_2}(\lambda_2)) & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & (J_{n_r}(\lambda_r)) \end{pmatrix}, \text{ on sait qu'il apparait aussi un bloc}$$

de la forme $J_{n_k}(1/\lambda_k)$ pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

En réordonnant les vecteurs de base, on en déduit que A' est semblable à une matrice de la forme diagonale

$$\text{par blocs } A'' = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_q \end{pmatrix}, \text{ où chaque } M_k \text{ est de la forme } J_{n_k}(1), J_{n_k}(-1) \text{ ou } M_k = \begin{pmatrix} J_{n_k}(\lambda) & 0_{n_k} \\ 0_{n_k} & J_{n_k}(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \notin \{-1, 1\}$.

D'après 11), comme A est semblable à A'' , il suffit de prouver que A'' est un produit de deux matrices de symétries.

D'après 19), on sait que $J_n(1)$ et $J_n(-1)$ sont produits de deux matrices de symétries.

$$\text{Il reste à étudier le cas où } M_k = \begin{pmatrix} J_{n_k}(\lambda) & 0_{n_k} \\ 0_{n_k} & J_{n_k}(\frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0_{n_k} \\ 0_{n_k} & C \end{pmatrix}.$$

D'après 16), B^{-1} est semblable à C , donc **d'après 13)**, M_k est un produit de deux matrices de symétries.

Finalement, dans tous les cas, $M_k \in M_{d_k}(\mathbb{C})$ est un produit de deux matrices de symétries et on écrit $M_k = S_k T_k$,

avec $S_k^2 = T_k^2 = I_{d_k}$.

$$\text{Donc } A'' = \begin{pmatrix} S_1 T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & S_q T_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & S_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_q \end{pmatrix}, \text{ où } \begin{pmatrix} S_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & S_q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & T_q \end{pmatrix}^2 = I_n.$$

A'' est donc produit de deux matrices de symétries, et donc A l'est aussi.