

CONCOURS X-ENS

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES A

SESSION 2026 - FILIÈRES MP-MPI

m.laamoum2@gmail.com¹

Préliminaires

- 1) L'application $f : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|Ax\| \end{cases}$ est continue sur la sphère unité $S(0,1)$, qui est compacte (fermée et bornée de $\mathbb{C}^n$), donc elle est bornée et atteint son maximum (en un $x_0 \in S(0,1)$) ; ce qui définit $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Pour $x \neq 0$, posons $u = \frac{1}{\|x\|}x \in S$; alors

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|Au\| \leq \|A\|,$$

donc l'ensemble $\mathcal{N} = \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ est borné et $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$.

En particulier pour x_0

$$\|A\| = \|Ax_0\| = \frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

et $\|A\| \in \mathcal{N}$, donc $\boxed{\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$.

(On peut aussi le faire par continuité de l'application linéaire $x \mapsto Ax$)

- 2) Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

Pour $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ de norme 1, on a $Ax = {}^t(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ donc

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{\lambda_i} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leq \max_i |\lambda_i|^2 \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^2.$$

Soit k tel que $|\lambda_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, on a $\|Ae_k\|^2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^2$. Donc $\boxed{\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}$.

- 3) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après Q1 on a pour $x \in \mathbb{C}^n$: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Soit $x \in S(0,1)$, on a

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|.$$

donc pour tout $x \in S(0,1)$ on a $\|ABx\| \leq \|A\| \|B\|$, ainsi $\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \|B\|}$.

- 4) U unitaire signifie $U^*U = I_n$,

- Soit $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux \mid Ux \rangle = \langle x \mid U^*Ux \rangle = \langle x \mid x \rangle = \|x\|^2,$$

donc $\|Ux\| = \|x\|$ (U est isométrique).

Ainsi $\boxed{\|U\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = 1}$. De même on a U^* est isométrique et $\|U^*\| = 1$.

¹<https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

- On a $\|AU\| = \sup_{\|x\|=1} \|AUx\|$. Comme U est bijective et isométrique, lorsque x parcourt $S(0, 1)$, alors Ux parcourt $S(0, 1)$. Par changement de variable $y = Ux$ on obtient

$$\|AU\| = \sup_{\|U^*y\|=1} \|Ay\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|.$$

- On a $\|UA\| = \sup_{\|x\|=1} \|UAx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ car U est une isométrie, donc $\|UA\| = \|A\|$.

5) Soit $p \in \mathbb{C}[X]$.

- Posons $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $p(A) = Pp(D)P^{-1}$.

Soit $\lambda_i \in \sigma(A)$ et v_i le vecteur propre associé.

Alors $p(A)v_i = p(\lambda_i)v_i$, donc

$$\frac{\|p(A)v_i\|}{\|v_i\|} = |p(\lambda_i)| \leq \|p(A)\|.$$

Par suite $\|p\|_{\sigma(A)} := \sup_{\alpha \in \sigma(A)} |p(\alpha)| \leq \|p(A)\|$.

- D'après la question Q3 :

$$\|p(A)\| = \|Pp(D)P^{-1}\| \leq \|P\| \|p(D)\| \|P^{-1}\| = \text{cond}(P) \|p(D)\|.$$

Or, par la question Q2, $\|p(D)\| = \max_i |p(\lambda_i)| = \|p\|_{\sigma(A)}$, donc $\|p(A)\| \leq \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}$.

A – Principe du maximum pour les polynômes

6) Soit $n \geq 2$, $z \in \mathbb{D}$ et $s = \sqrt{1 - |z|^2}$ donc $\bar{s} = s$. La matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est :

$$U = \begin{pmatrix} z & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ s & -\bar{z} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $x \in {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On a

$$Ux = {}^t(zx_1 + sx_2, x_3, \dots, x_n, sx_1 - \bar{z}x_2)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|Ux\|^2 &= (zx_1 + sx_2)(\overline{zx_1 + sx_2}) + (sx_1 - \bar{z}x_2)(\overline{sx_1 - \bar{z}x_2}) + \sum_{i=3}^n |x_i|^2 \\ &= (|zx_1|^2 + |sx_2|^2 + zx_1\bar{s}\bar{x}_2 + s\bar{x}_2\bar{z}\bar{x}_1) + (|sx_1|^2 + |z\bar{x}_2|^2 - sx_1\bar{z}\bar{x}_2 - \bar{z}x_2s\bar{x}_1) + \sum_{i=3}^n |x_i|^2 \\ &= (|x_1|^2 + |x_2|^2)(|z|^2 + s^2) + \sum_{i=3}^n |x_i|^2 \\ &= \|x\|^2 \quad (\text{car } |z|^2 + s^2 = 1) \end{aligned}$$

Ainsi U est unitaire.

- 7) On note que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $e_1^* M e_1 = M_{1,1}$ (le coefficient d'indice $(1,1)$) . Il suffit de montrer que le coefficient $(1,1)$ de U^k est z^k pour tout $k \geq 0$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \geq 1$, U^k est, par blocs, de la forme :

$$U^k = \left(\begin{array}{cc|c} z^k & z^{k-1}s & A_k \\ 0 & 0 & \\ \hline & B_k & C_k \end{array} \right)$$

C'est vrai pour $k = 1$ et le passage de k à $k + 1$ est immédiat .

Ainsi pour tout $k \geq 0$ $(U^k)_{1,1} = z^k$. Donc pour $p = \sum_{k=0}^{n-1} p_k X^k$:

$$e_1^* p(U) e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} p_k e_1^* U^k e_1 = \sum_{k=0}^{n-1} p_k z^k = p(z).$$

- 8) On a :

$$|p(z)| = |e_1^* p(U) e_1| = |\langle p(U) e_1 | e_1 \rangle| \leq \|p(U) e_1\| \|e_1\| \leq \|p(U)\|.$$

Comme U est unitaire donc elle est diagonalisable, $U = V \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V^{-1}$ avec V unitaire et $|\lambda_i| = 1$. Donc $p(U) = V \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) V^{-1}$.

Puisque V est unitaire, par la question Q5 :

$$\|p(U)\| \leq \text{cond}(V) \|p\|_{\sigma(U)}$$

comme

$$\text{cond}(V) = \|V\| \cdot \|V^*\| = 1$$

et

$$\|p\|_{\sigma(U)} = \max_i |p(\lambda_i)| \leq \sup_{|\lambda|=1} |p(\lambda)| = \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

alors $\boxed{|p(z)| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}}$.

- 9) On a $|z| < 1$ donc $s > 0$.

- Supposons par l'absurde que $|p(z)| = \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$, donc $|p(z)| = \|p(U)\|$ et de la question Q8

$$|\langle p(U) e_1 | e_1 \rangle| = \|p(U) e_1\| \|e_1\|$$

c'est le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz (qu'on admet par analogie avec le cas réel !) , donc $p(U) e_1$ est colinéaire à e_1 , ce dernier est un vecteur propre de $p(U)$.

- Par récurrence on a pour tout $k \geq 1$, U^k est de la forme :.
Observons que si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique alors :

$$U e_1 = z e_1 + s e_n, U e_2 = s e_1 - \bar{z} e_n, U e_j = e_{j-1} \text{ pour } 3 \leq j \leq n-1, U e_n = e_{n-1}$$

ce qui donne $U^2 e_1 = z^2 e_1 + z s e_n + s e_{n-1}$ et $U^3 e_1 = z^3 e_1 + z^2 s e_n + z s e_{n-1} + s e_{n-2}$.

Par récurrence, on a pour tout $1 \leq k \leq n-1$:

$$U^k e_1 = z^k e_1 + s \sum_{j=1}^k z^{k-j} e_{n-j+1}$$

Donc

$$\begin{aligned} p(U)e_1 &= a_0 e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(z^k e_1 + s \sum_{j=1}^k z^{k-j} e_{n-j+1} \right) \\ &= p(z)e_1 + s \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^k a_k z^{k-j} e_{n-j+1} \end{aligned}$$

remarquons que

$$(1 \leq k \leq n-1 \text{ et } 1 \leq j \leq k) \Leftrightarrow (1 \leq j \leq n-1 \text{ et } j \leq k \leq n-1)$$

ce qui permet d'inverser l'ordre des sommes dans le second terme :

$$p(U)e_1 = p(z)e_1 + s \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=j}^{n-1} a_k z^{k-j} \right) e_{n-j+1}$$

- Puisque e_1 est un vecteur propre de $p(U)$, la famille $(e_2, \dots, e_n)$ étant libre et $s > 0$, alors :

$$p(U)e_1 = p(z)e_1 \text{ et } \forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \sum_{k=j}^{n-1} a_k z^{k-j} = 0$$

Ce qui donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_1 & +a_2 z & +\dots & +a_{n-2} z^{n-3} & +a_{n-1} z^{n-2} & = 0 \\ & a_2 & +\dots & +a_{n-2} z^{n-2} & +a_{n-1} z^{n-1} & = 0 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-2} & +a_{n-1} z & = 0 \\ & & & & a_{n-1} & = 0 \end{array} \right.$$

C'est un système triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale , qui admet une solution nulle unique : $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_1 = 0$.

Le polynôme p est donc nécessairement constant , or il est de degré $n-1$ et $n \geq 2$, ce qui est absurde .

Ainsi si $|z| < 1$, alors $|p(z)| < \|p\|_{\partial \mathbb{D}}$, ce qui signifie que le maximum de p sur $\mathbb{D}$ est atteint sur le bord $\partial \mathbb{D}$.

10) Soit S un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$

L'inclusion $\partial S \subset S$ donne $\|p\|_{\partial S} \leq \|p\|_S$.

Montrons l'inégalité inverse. Soit $x_0 \in S$ tel que $\|p\|_S = |p(x_0)|$ (le sup est atteint car S est compact et p continue). Si $x_0 \in \partial S$, on a terminé. Sinon $x_0 \in S \setminus \partial S$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{D}(x_0, \delta) \subset S$. Soit $q : z \mapsto p(\delta z + x_0)$ définit sur $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$, q admet donc son maximum en 0 , ce qui contredit la question Q9 , le maximum est sur $\partial \mathbb{D}$.

Donc le maximum de $|p|$ sur S est nécessairement atteint sur ∂S , d'où $\|p\|_S \leq \|p\|_{\partial S}$.

Ainsi $\boxed{\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}}$.

B – Inégalité de Von Neumann

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une contraction ; $\|A\| \leq 1$, et $p \in \mathbb{C}[X]$.

11) Si A est unitaire, $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$ avec U unitaire et $|\lambda_i| = 1$. Donc par la question Q5 avec $\operatorname{cond}(U) = 1$:

$$\|p(A)\| = \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Comme $\sigma(A) \subset \partial\mathbb{D}$ alors :

$$\|p\|_{\sigma(A)} = \max_i |p(\lambda_i)| \leq \sup_{|z|=1} |p(z)| = \|p\|_{\partial\mathbb{D}} \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

d'où $\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}} \leq \|p\|_{\mathbb{D}}}$.

12) On a $(I_n - A^*A)^* = I_n - A^*A$ donc elle est hermitienne. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. On écrit $I_n - A^*A = V \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) V^{-1}$ avec $\mu_i \in \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle (I_n - A^*A)x \mid x \rangle = \|x\|^2 - \|Ax\|^2$$

comme $\|A\| \leq 1$ alors $\|x\|^2 - \|Ax\|^2 \geq 0$. Donc $I_n - A^*A$ est hermitienne positive !, ce qui donne pour x vecteur propre associé à μ_i que $\mu_i \geq 0$. On pose alors $D_A = V \operatorname{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}) V^{-1}$.

De même on définit D_{A^*} avec $D_{A^*}^2 = I_n - AA^*$.

13) Les valeurs propres de A^*A sont les $\mu_i \geq 0$, et D_A a pour valeurs propres les $\sqrt{\mu_i}$. Par interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $q(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$ pour tout i .

Alors $q(A^*A) = V \operatorname{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}) V^{-1} = D_A$.

On a $\sigma(AA^*) = \sigma(A^*A)$ donc $D_{A^*} = q(AA^*)$.

En effet $\sigma(AA^*) = \sigma(A^*A)$ car $\chi_{AA^*} = \chi_{A^*A}$ (en utilisant densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est un exercice classique des evn), ou bien directement :

L'égalité des déterminants $\det(A^*A) = |\det(A)|^2 = \det(AA^*)$ assure que 0 est valeur propre de A^*A si et seulement si elle l'est de AA^* .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si λ est valeur propre de A^*A , il existe $x \neq 0$ tel que $A^*Ax = \lambda x$ donc $AA^*(Ax) = \lambda(Ax)$. Comme $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$, on a $Ax \neq 0$ (sinon $A^*Ax = 0$, absurde). Ainsi λ est valeur propre de AA^* . Par symétrie, $\sigma(A^*A) = \sigma(AA^*)$.

14) On a $D_A = q(A^*A)$ et $D_{A^*} = q(AA^*)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on a par récurrence : $A^*(AA^*)^k = (A^*A)^k A^*$.

- C'est vrai pour $k = 0$.
- Supposons le pour $k \geq 1$, donc

$$A^*(AA^*)^{k+1} = A^*(AA^*)(A^*A)^k = (AA^*) [A^*(A^*A)^k]$$

l'hypothèse de récurrence donne

$$A^*(AA^*)^{k+1} = (AA^*) [(A^*A)^k A^*] = (A^*A)^{k+1} A^*$$

D'où le résultat pour tout $k \geq 0$.

Par linéarité on a : $A^*q(AA^*) = q(A^*A)A^*$, et $A^*D_{A^*} = D_A A^*$.

De même, on montre : pour tout $k \in \mathbb{N}$ $A(A^*A)^k = (AA^*)^k A$, ce qui donne $AD_A = D_{A^*}A$.

15) Soit $U = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, donc $U^* = \begin{pmatrix} A^* & -D_A \\ D_{A^*} & A \end{pmatrix}$.

Par suite

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^*A + D_A^2 & A^*D_{A^*} - D_A A \\ D_{A^*}A - AD_A & D_{A^*}^2 + AA^* \end{pmatrix}.$$

On vérifie :

- $A^*A + D_A^2 = A^*A + (I_n - A^*A) = I_n$.
- $D_{A^*}^2 + AA^* = (I_n - AA^*) + AA^* = I_n$.
- $A^*D_{A^*} - D_AA^* = 0$ et $D_{A^*}A - AD_A = 0$ (par la question Q14).

Donc $U^*U = I_{2n}$ et U est unitaire.

16) On considère la matrice $U_k \in \mathcal{M}_{(k+2)n}(\mathbb{C})$:

$$U_k = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0_n & & & 0_n & I_n \\ -D_A & A^* & 0_n & \cdots & 0_n \end{pmatrix}.$$

Par analogie avec la question Q6, on fait des produits par blocs , pour montrer que U_k est unitaire.

On a par récurrence que pour tout $j \geq 0$, $(U_k)^j$ est de la forme ..

$$(U_k)^j = \begin{pmatrix} A^j & B_j \\ C_j & D_j \end{pmatrix}$$

Donc pour $p = \sum_{j=0}^{k+1} p_j X^j$

$$p(U_k) = \begin{pmatrix} p(A) & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

Il suffit de montrer, dans notre cas, que la norme d'une sous-matrice (carrée) est inférieure à la norme de la matrice.

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, définissons $v = {}^t({}^t x, 0_{n,1}, \dots, 0_{n,1}) \in \mathbb{C}^{(k+2)n}$. On a clairement $\|v\| = \|x\|$.

Le produit matriciel donne $p(U_k)v = {}^t({}^t(p(A)x), {}^t y_2, \dots, {}^t y_{k+1})$.

Par définition de la norme euclidienne :

$$\|p(U_k)v\|^2 = \|p(A)x\|^2 + \sum_{i=2}^{k+2} \|y_i\|^2 \geq \|p(A)x\|^2$$

Par définition de la norme subordonnée :

$$\|p(U_k)\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|p(U_k)X\|}{\|X\|} \geq \frac{\|p(U_k)v\|}{\|v\|} \geq \frac{\|p(A)x\|}{\|x\|}$$

Ceci est valable pour tout $x \neq 0$ donc $\|p(A)\| \leq \|p(U_k)\|$.

Ainsi : $\boxed{\|p(A)\| \leq \|p(U_k)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}}$.

17) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- Si $\|A\| = 0$ alors $A = 0$ et $\|p(A)\| = |p(0)| = \|p\|_{\mathbb{D}(0,0)}$.
- Si $\|A\| > 0$, posons $B = \frac{1}{\|A\|}A$. On a $\|B\| = 1$, donc B est une contraction.
Pour $p \in \mathbb{C}[X]$ posons $q(X) = p(\|A\| \cdot X)$. Par l'inégalité de Von Neumann on a :

$$\|q(B)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Or $q(B) = p(A)$ et $\|q\|_{\mathbb{D}} = \sup_{|w| \leq 1} |p(\|A\| w)| = \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}$. Donc $\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}}$.

C – Hausdorffien et rayon numérique

18) Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et v un vecteur propre associé de norme 1. Alors :

$$\langle Av \mid v \rangle = \langle \lambda v \mid v \rangle = \lambda \|v\|^2 = \lambda.$$

Donc $\lambda \in \mathcal{H}(A)$ et $\boxed{\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)}$.

19) Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Posons $\text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$.

- Pour $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ de norme 1 on a :

$$\langle Dx \mid x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2.$$

Comme $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ alors $\langle Dx \mid x \rangle \in \text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\mathcal{H}(A) \subset \text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Soit $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \in \text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, pour $x = {}^t(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$ on a $y = \langle Dx \mid x \rangle \in \mathcal{H}(A)$, donc $\text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathcal{H}(A)$.

Ainsi $\boxed{\text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \mathcal{H}(A)}$.

20) Par le théorème de réduction, $A = UDU^{-1}$ avec U unitaire et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour x de norme 1, $y = U^*x$ vérifie $\|y\| = 1$ et $\langle Ax \mid x \rangle = \langle Dy \mid y \rangle$. Donc $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(D) = \text{Conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Si A unitaire alors $|\lambda_i| = 1$, donc $\mathcal{H}(A)$ est un polygone convexe inscrit dans le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.
- A hermitienne : les valeurs propres sont réelles, donc $\mathcal{H}(A) = [\min_i \lambda_i, \max_i \lambda_i] \subset \mathbb{R}$.

21) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} ae^{i\theta} \\ be^{i\varphi} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a^2 + b^2 = 1$. On a

$$Ax = \begin{pmatrix} be^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \langle Ax \mid x \rangle = a be^{i(\theta-\varphi)}.$$

Donc $\mathcal{H}(A) = \{abe^{i\alpha} \mid a, b \geq 0, a^2 + b^2 = 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- On a $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$.
- Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$, montrons qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $r = a\sqrt{1-a^2}$.

On a $r = x\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + r^2 = 0$. On calcule $\Delta = 1 - 4r^2 \geq 0$ donc $x = \frac{1 - \sqrt{1-4r^2}}{2}$ ou $x = \frac{1 + \sqrt{1-4r^2}}{2}$.

Donc la valeur de a cherchée est $a^2 = \frac{1 - \sqrt{1-4r^2}}{2} \in [0, 1]$. D'où $\mathbb{D}(0, \frac{1}{2}) \subset \mathcal{H}(A)$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{H}(A) = \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})}$.

22) • L'application $\varphi : x \mapsto \langle Ax | x \rangle$ est continue :

Ce résultat n'est pas évident car l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ n'est pas bilinéaire ! .

On peut écrire pour $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\langle A(x - y) | x \rangle + \langle Ay | x - y \rangle| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \cdot \|x - y\|$$

ce qui donne la continuité de φ .

- $\mathcal{H}(A)$ est l'image par φ de la sphère unité $S(0, 1)$ qui est compacte dans $\mathbb{C}^n$, donc $\mathcal{H}(A)$ est un compact de $\mathbb{C}$ (l'image continue d'un compact est un compact), ainsi $\mathcal{H}(A)$ fermé et borné.

23) • Pour $z = \langle Ax | x \rangle \in \mathcal{H}(A)$ avec $\|x\| = 1$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|z| \leq \|Ax\| \leq \|A\|$. Donc $r(A) \leq \|A\|$.

- Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$. La formule de polarisation (fournie dans l'énoncé) donne :

$$4|\langle Ax | y \rangle| \leq |\langle A(x + y) | x + y \rangle| + |\langle A(x - y) | x - y \rangle| + |\langle A(x + iy) | x + iy \rangle| + |\langle A(x - iy) | x - iy \rangle|$$

Or pour tout vecteur $v \in \mathbb{C}^n$, on a $|\langle Av | v \rangle| \leq r(A)\|v\|^2$ donc :

$$4|\langle Ax | y \rangle| \leq r(A) (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + \|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2)$$

Comme on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$ alors

$$\blacktriangleright \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

$$\blacktriangleright \|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Par suite : $4|\langle Ax | y \rangle| \leq 4r(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ donc $|\langle Ax | y \rangle| \leq r(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Si l'on choisit x et y unitaires ($\|x\| = \|y\| = 1$), on obtient :

$$|\langle Ax | y \rangle| \leq 2r(A)$$

En particulier pour : $\|x\| = 1$, $Ax \neq 0$ et $y = \frac{1}{\|Ax\|} Ax$, on a $\|Ax\| \leq 2r(A)$.

Ce qui donne $\|Ax\| \leq 2r(A)$ pour tout x tel que $\|x\| = 1$, d'où $\|A\| \leq 2r(A)$.

Ainsi $\boxed{\frac{1}{2}\|A\| \leq r(A) \leq \|A\|}$.

24) On a pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- $r(A) \geq 0$ par définition .
- Si $r(A) = 0$, alors $0 \leq \|A\| \leq 2r(A) = 0$, donc $\|A\| = 0$ et $A = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a pour $x \in S(0, 1)$: $|\langle \lambda Ax | x \rangle| = |\lambda| |\langle Ax | x \rangle| \leq |\lambda| r(A)$ donc $r(\lambda A) \leq |\lambda| r(A)$.

Comme $r(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax | x \rangle|$ alors il existe x_0 unitaire tel que $r(A) = |\langle Ax_0 | x_0 \rangle|$.

Par suite $|\lambda| r(A) = |\langle \lambda Ax_0 | x_0 \rangle| \leq r(\lambda A)$. D'où $\boxed{r(\lambda A) = |\lambda| r(A)}$.

- Soit $x \in S(0, 1)$, on a

$$|\langle (A + B)x | x \rangle| = |\langle Ax | x \rangle + \langle Bx | x \rangle| \leq |\langle Ax | x \rangle| + |\langle Bx | x \rangle| \leq r(A) + r(B)$$

ce qui donne $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

r est donc une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

25) Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la question Q21, $r(A) = 1/2$ et $r(B) = 1/2$, donc $r(A)r(B) = 1/4$.

Comme $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est une matrice hermitienne dont les valeurs propres sont $\{0, 1\}$, d'après la question Q20, son Hausdorffien est le segment $[0, 1]$, donc $r(AB) = 1$ et l'inégalité $r(AB) \leq r(A)r(B)$ est fausse.

26) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

26.a) • On a

$$1 - X^k = - \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^{k-\ell}) = - \prod_{\ell=1}^k (-\omega_k^{-\ell}) \cdot \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^{\ell} X)$$

et pour $X = 0$: $1 = - \prod_{\ell=1}^k (-\omega_k^{\ell})$, ce qui donne $\boxed{1 - X^k = \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^{\ell} X)}$.

• La décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{1 - X^k}$ s'écrit

$$\frac{1}{1 - X^k} = \sum_{\ell=1}^k \frac{A_{\ell}}{1 - \omega_k^{\ell} X}$$

avec

$$A_{\ell} = \left[\frac{1 - \omega_k^{\ell} X}{1 - X^k} \right]_{X=\omega_k^{-\ell}} = \omega_k^{\ell} \left[\frac{X - \omega_k^{-\ell}}{X^k - 1} \right]_{X=\omega_k^{-\ell}} = \omega_k^{\ell} \left[\frac{1}{(X^k - 1)'} \right]_{X=\omega_k^{-\ell}} = \frac{1}{k}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1 - X^k} = \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{1 - \omega_k^{\ell} X}$$

Ainsi $\boxed{1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^{\ell} X)}$

26.b) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, posons :

$$x_j = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^{\ell} A)x = Q_j(A)x \text{ et } T_j = \|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle = \langle (I - \omega_k^j A)x_j | x_j \rangle$$

Par définition de x_j et d'après Q26-a, on a :

$$(I_n - \omega_k^j A)x_j = (I_n - \omega_k^j A) \prod_{\ell \neq j} (I_n - \omega_k^{\ell} A)x = (I_n - A^k)x$$

D'où $T_j = \langle (I_n - A^k)x | x_j \rangle$. En sommant :

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k T_j = \left\langle (I_n - A^k)x \left| \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j \right. \right\rangle$$

Or, $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Q_j(A) \right) x = I_n x = x$ d'après Q26-a. On en conclut :

$$\boxed{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle \right) = \langle (I_n - A^k)x | x \rangle = 1 - \langle A^k x | x \rangle}$$

26.c) Supposons que $r(A) \leq 1$.

Pour tout vecteur v on a $|\langle Av|v \rangle| \leq \|v\|^2$, par conséquent, pour tout θ , on a $\operatorname{Re}(e^{i\theta} \langle Av|v \rangle) \leq \|v\|^2$.

Donc pour chaque j :

$$\operatorname{Re} \left(\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle \right) \geq \|x_j\|^2 - |\langle A x_j | x_j \rangle| \geq 0$$

ce qui donne

$$\operatorname{Re}(1 - \langle A^k x | x \rangle) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \operatorname{Re} \left(\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j | x_j \rangle \right) \geq 0$$

En remplaçant A par $e^{i\theta} A$, on obtient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) \geq 0$$

En choisissant θ tel que $e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle = |\langle A^k x | x \rangle|$, on conclut que : $|\langle A^k x | x \rangle| \leq 1$.

Ceci étant vrai pour tout x de norme 1, donc $\boxed{r(A^k) \leq 1}$.

26.d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $r(A) = 0$, alors $A = 0$ et le résultat est trivial.

Sinon, posons $B = \frac{1}{r(A)} A$. Alors $r(B) = 1$, et par (c), $\frac{r(A^k)}{r(A)^k} = r(B^k) \leq 1$, donc $r(A^k) \leq r(A)^k$.

Ainsi $\boxed{r(A^k) \leq r(A)^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}}$.

D – Conjecture de Crouzeix

27) Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $p(X) = X$. Alors $p(A) = A$ et $\|p(A)\| = \|A\| = 1$. D'après la question Q21, $\mathcal{H}(A) = D(0, \frac{1}{2})$, donc $\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \frac{1}{2}$.

On a une égalité dans l'inégalité (1) donc la constante 2 est optimale.

28) Par la question Q26.d, $r(A^k) \leq r(A)^k$. La question Q23 appliquée à A^k donne $\|A^k\| \leq 2 r(A^k)$.

Donc :

$$\|A^k\| \leq 2 r(A^k) \leq 2 r(A)^k = 2 \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z^k| = 2 \|X^k\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

29) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $z = r(A)e^{i\theta} \in \mathcal{H}(A)$, $p(X) = \sum_{k=0}^r c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $c_k = |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)}$ pour $0 \leq k \leq r$.

On a $p(X) = e^{i\varphi} q(e^{-i\theta} X)$ où $q(Y) = \sum_{k=0}^r |c_k| Y^k$.

Par la question Q28 :

$$\|p(A)\| = \|q(e^{-i\theta} A)\| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| \|A\|^k \leq 2 \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k \leq 2 \|p\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

30)

30.a) Si $A = 0$ c'est trivial. Sinon posons $q(X) = p(r(A) X)$ et $B = \frac{1}{r(A)} A$. Alors $r(B) = 1$.

Par Okubo-Ando, il existe X inversible avec $\operatorname{cond}(X) \leq 2$ tel que $C = X^{-1} B X$ est une contraction.

Par Von Neumann : $\|q(C)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}$. Comme $q(B) = X q(C) X^{-1}$, par la question Q5 :

$$\|q(B)\| \leq \operatorname{cond}(X) \|q(C)\| \leq 2 \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Or $q(B) = p(A)$ et $\|q\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}$.

Donc $\boxed{\|p(A)\| \leq 2 \|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}}$.

30.b) Soit $\mathbb{D}(z_0, \rho)$ un disque contenant $\mathcal{H}(A)$, de bord $\mathcal{C} = \partial\mathbb{D}(z_0, \rho)$. Par le principe du maximum (question Q10) : $\|p\|_{\mathbb{D}(z_0, \rho)} = \|p\|_{\mathcal{C}}$. Puisque $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(z_0, \rho)$, on a $\|p\|_{\mathcal{H}(A)} \leq \|p\|_{\mathbb{D}(z_0, \rho)} = \|p\|_{\mathcal{C}}$. La conjecture de Crouzeix, question Q29 dans le cas particulier considéré, donne : $\boxed{\|p(A)\| \leq 2 \|p\|_{\mathcal{H}(A)} \leq 2 \|p\|_{\mathcal{C}} .}$