

X-ENS 2026

Épreuve de mathématiques A, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

Remarque de vocabulaire. Par souci de concision, nous parlerons de *sesquilinearité* pour évoquer la linéarité à gauche et semi-linéarité à droite du produit scalaire hermitien.

Préliminaires

1. L'application $x \mapsto Ax$ est continue sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$, car linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, et $S = \{x \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \mid \|x\| = 1\}$ est compact puisque c'est la sphère unité de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|$: les sphères sont compactes en dimension finie.

Enfin, $S \neq \emptyset$ puisque $n \geq 1$, donc par le théorème des bornes atteintes $|||A||| = \sup_{x \in S} \|Ax\|$ existe

et, par ailleurs, la borne supérieure est atteinte.

De plus, pour tout vecteur colonne x non nul, on a par homogénéité de la norme : $\frac{1}{\|x\|}x \in S$, donc :

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \frac{1}{\|x\|} x \right\| \leq |||A|||.$$

Par propriété de plus petit majorant : $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq |||A|||$.

Réciproquement, l'inclusion $S \subseteq M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ entraîne immédiatement l'inégalité en sens contraire, d'où l'égalité :

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |||A|||.$$

La borne supérieure est atteinte en n'importe quel vecteur unitaire x réalisant l'égalité $|||A||| = \|Ax\|$ (on a justifié son existence ci-dessus). On peut donc remplacer « sup » par « max ».

2. Notons que la conjugaison complexe étant un morphisme d'anneaux, pour tout vecteur colonne x , la définition du produit matriciel entraîne immédiatement : $\overline{Ax} = A\bar{x}$.

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (donc : $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$). On a par un calcul matriciel sans génie

(la première égalité est admise dans l'énoncé) :

$$\|Ax\|^2 = x^\top A^\top \overline{Ax} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2.$$

En notant $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que : $|\lambda_j| = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$, on a alors :

$$\|Ax\|^2 \leq |\lambda_j|^2,$$

puis par positivité de la norme : $\|Ax\| \leq |\lambda_j|$. Ceci étant valable pour tout x unitaire : $|||A||| \leq |\lambda_j|$.

En posant $x = (\delta_{j,i})_{1 \leq i \leq n}$ (qui est bien unitaire), nous avons l'inégalité en sens contraire, d'où :

$$|||A||| = |\lambda_j| = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|).$$

3. On a par la première question : $\forall x \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \|Ax\| \leq |||A||| \cdot \|x\|$ (le cas $x = 0$ devant être traité à part, mais il est trivial). En utilisant deux fois cette inégalité :

$$\|ABx\| \leq |||A||| \cdot \|Bx\| \leq |||A||| \cdot |||B||| \cdot \|x\|.$$

Ceci vaut pour tout x et en particulier pour tout x unitaire. D'où le résultat par définition de $|||AB|||$:

$$|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||.$$

4. Nous démontrons d'abord : $|||AU||| = |||A|||$, pour toute matrice A . Il est clair que si U est unitaire, alors U est inversible et son inverse est U^* ; de plus, U^* est unitaire aussi :

$$(U^*)^* U^* = UU^* = I_n.$$

La première égalité utilise le fait que la transposition soit involutive, comme la conjugaison complexe. La seconde égalité résulte du fait que dans $M_n(\mathbb{C})$, un inverse à gauche est aussi un inverse à droite.

On en déduit (par le résultat admis, selon lequel une matrice unitaire préserve la norme) que U et U^* induisent des bijections réciproques de $S = \{x \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \mid \|x\| = 1\}$ dans elle-même. D'où, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$:

$$|||AU||| = \sup_{x \in S} \|A(Ux)\| = \sup_{x \in S} \|Ax\| = |||A|||.$$

De plus : $|||UA||| = \sup_{x \in S} \|UAx\| = \sup_{x \in S} \|Ax\|$, pour toute matrice A (toujours parce que U préserve la norme). D'où :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad |||AU||| = |||UA||| = |||A|||.$$

Avec $A = I_n$, on obtient :

$$|||I_n||| \stackrel{(q.2)}{=} 1.$$

Remarque. On pouvait aussi déduire ces égalités du théorème de réduction (III) admis dans l'énoncé, et de la deuxième question.

5. Posons : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On a facilement : $p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$. Rappelons que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A . Par la question 2, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad \|p\|_{\sigma(A)} = \max(|p(\lambda_1)|, \dots, |p(\lambda_n)|) = |||p(D)|||.$$

Ainsi l'encadrement demandé équivaut à :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(D)||| \leq |||p(A)||| \leq \text{cond}(P) |||p(D)|||.$$

C'est sous cette forme que nous le démontrons. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $|||p(D)||| = |p(\lambda_j)|$, et soit x un vecteur propre de A associé à λ_j . On a :

$$|||p(A)||| \geq \frac{\|p(A)x\|}{\|x\|} = \frac{\|p(\lambda_j)x\|}{\|x\|} = |p(\lambda_j)| = |||p(D)|||,$$

d'où la première inégalité.

Passons à la seconde inégalité. On a : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^kP^{-1}$, donc par linéarité de $p \mapsto p(A)$ et $p \mapsto Pp(D)P^{-1}$, on a : $\forall p \in \mathbb{C}[X], p(A) = Pp(D)P^{-1}$. Soit alors $p \in \mathbb{C}[X]$. Par la question 3, on a donc :

$$|||p(A)||| \leq |||P^{-1}||| \cdot |||p(D)||| \cdot |||P||| = \text{cond}(P) |||p(D)|||,$$

d'où le résultat :

$$\|p\|_{\sigma(A)} \leq |||p(A)||| \leq \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}.$$

A Principe du maximum pour les polynômes

6. Notons σ le $(n-1)$ -cycle $(n \ (n-1) \ \dots \ 3 \ 2)$. On note $P_\sigma = \left((\delta_{i, \sigma(j)}) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, où la notation $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. La matrice P est unitaire puisque ses colonnes forment une famille orthonormée (nous ne faisons que permuter les vecteurs de la base canonique), et on a :

$$U = P_\sigma \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{avec : } M = \begin{pmatrix} z & s \\ s & -\bar{z} \end{pmatrix}.$$

Comme $|s|^2 + |z|^2 = 1$, et $z\bar{s} - s\bar{z} = 0$, la matrice M est unitaire. Par conséquent :

$$U^*U = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}^* P_\sigma^* P_\sigma \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^* & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^*M & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} = I_n,$$

d'où le résultat : U est unitaire.

7. Comme $p \mapsto p(z)$ et $p \mapsto e_1^* p(U) e_1$ sont linéaires, il suffit de démontrer le résultat voulu sur une famille génératrice de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, disons la base canonique $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$. On veut donc démontrer :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad e_1^* U^k e_1 = z^k.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Par définition de U , on a :

$$Ue_1 = ze_1 + se_n, \quad \text{et : } \forall j \in \llbracket 3, n \rrbracket, \quad Ue_j = e_{j-1}.$$

Supposons d'abord $z \neq 0$. On a, en multipliant par $z^{-k-1}U^k$ la première égalité :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \quad z^{-k-1}U^{k+1}e_1 - z^{-k}U^k e_1 = z^{-k-1}U^k se_n = z^{-k-1}se_{n-k}.$$

En sommant et en télescopant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad z^{-k}U^k e_1 - e_1 = \sum_{j=0}^{k-1} \left(z^{-(j+1)}U^{j+1}e_1 - z^{-j}U^j e_1 \right) = s \sum_{j=0}^{k-1} z^{-j-1}e_{n-j}.$$

On en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad U^k e_1 = z^k e_1 + s \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} e_{n-j}. \quad (*)$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, on a : $n-j \geq n-k+1 \geq 2$, donc : $e_1^* e_{n-j} = 0$.

On en déduit immédiatement :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad e_1^* U^k e_1 = z^k e_1^* e_1 = z^k.$$

Cette égalité reste valable si $z = 0$, par continuité de U selon la variable z (composante par composante) et de $z \mapsto z^k$. D'où le résultat.

8. Par le théorème (III) de l'énoncé, il existe P unitaire et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, avec les λ_i de module

1, telles que : $U = PDP^{-1}$. Notons $P^{-1}e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a : $p(U) = Pp(D)P^{-1} = (P^{-1})^* p(D)P^{-1}$,

et donc :

$$\begin{aligned}
 |p(z)| &\stackrel{(q.7)}{=} |e_1^* p(U) e_1| = \left| e_1^* \left(P^{-1} \right)^* p(D) P^{-1} e_1 \right| \\
 &= \left| (P^{-1} e_1)^* p(D) P^{-1} e_1 \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} p(\lambda_1) x_1 \\ \vdots \\ p(\lambda_n) x_n \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n p(\lambda_i) |x_i|^2 \right|.
 \end{aligned}$$

Or on a aussi, par la question 2 et en rappelant que P est unitaire :

$$|||p(U)||| \stackrel{(q.4)}{=} |||p(D)||| = \|p\|_{\sigma(D)}.$$

L'encadrement de l'énoncé équivaut donc à :

$$\left| \sum_{i=1}^n p(\lambda_i) |x_i|^2 \right| \leq \|p\|_{\sigma(D)} \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}. \quad (*)$$

C'est sous cette forme que nous allons le démontrer. La seconde inégalité est immédiate, puisque par définition des λ_i on a : $\sigma(D) \subseteq \partial\mathbb{D}$. Justifions la première. On a par l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{i=1}^n p(\lambda_i) |x_i|^2 \right| \leq \sum_{i=1}^n |p(\lambda_i)| \cdot |x_i|^2 \leq \|p\|_{\sigma(D)} \sum_{i=1}^n |x_i|^2,$$

or P est unitaire, donc conserve la norme :

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|P^{-1} e_1\|^2 = 1.$$

Ainsi :

$$\left| \sum_{i=1}^n p(\lambda_i) |x_i|^2 \right| \leq \|p\|_{\sigma(D)}.$$

Ceci achève de démontrer (*) et donc l'encadrement de l'énoncé :

$$|p(z)| \leq |||p(U)||| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

Autre démonstration. On pouvait aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|p(z)| = |\langle e_1 | p(U) e_1 \rangle| \leq \|p(U) e_1\| \cdot \|e_1\| \leq |||p(U)|||.$$

Elle est admise par l'énoncé dans le cas complexe. Cependant nous avons préféré nous en passer et utiliser l'inégalité triangulaire, en vue de la question suivante (cf. la remarque que nous y faisons).

9. Supposons : $|p(z)| = \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$. On en déduit que dans la résolution de la question précédente, toutes les inégalités sont des égalités. En particulier :

$$\left| \sum_{i=1}^n p(\lambda_i) |x_i|^2 \right| = \sum_{i=1}^n |p(\lambda_i)| \cdot |x_i|^2 = \|p\|_{\sigma(D)} \sum_{i=1}^n |x_i|^2. \quad (\dagger)$$

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p(\lambda_i) |x_i|^2 = \mu_i \omega$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $x_i \neq 0$, on a, toujours d'après $(\dagger)$:

$$|p(\lambda_i)| = \|p\|_{\sigma(D)}$$

et donc : $\mu_i = \frac{\|p\|_{\sigma(D)}}{|\omega|} |x_i|^2$. En particulier, toujours pour un tel i :

$$p(\lambda_i) = \frac{\mu_i \omega}{|x_i|^2} = \|p\|_{\sigma(D)} \frac{\omega}{|\omega|}.$$

Or, si $(C_1, \dots, C_n)$ désigne les colonnes de P (ce sont des vecteurs propres de U par construction de P , associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), on a :

$$e_1 = P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i C_i = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \neq 0}}^n x_i C_i$$

et donc :

$$p(U)e_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \neq 0}}^n x_i p(\lambda_i) C_i = \|p\|_{\sigma(D)} \frac{\omega}{|\omega|} \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \neq 0}}^n x_i C_i = \|p\|_{\sigma(D)} \frac{\omega}{|\omega|} e_1.$$

Autrement dit : e_1 est un vecteur propre de $p(U)$. En particulier, cela impose que la famille $(e_1, Ue_1, \dots, U^{n-1}e_1)$ est liée. D'après l'égalité (*) de la question 7, on a donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^{n-1} \\ 0 & 0 & * & * & s \\ \vdots & \vdots & * & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & s & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant par rapport à la première colonne, puis en permutant les lignes pour faire apparaître un déterminant de matrice triangulaire inférieure, on obtient :

$$\pm s^{n-1} = 0,$$

donc : $|z|^2 = 1$.

Par contraposée, si : $|z| < 1$, alors : $|p(z)| < \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$.

Remarque. Remarquer que l'on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, permettrait d'obtenir plus rapidement que $p(e_1)$ et e_1 sont proportionnels. Cependant l'énoncé ne mentionne pas que le cas d'égalité s'étend aux produits scalaires hermitiens : il aurait sans doute fallu le redémontrer.

10. La question précédente démontre que l'on a : $\|q\|_{\mathbb{D}} = \|q\|_{\partial\mathbb{D}}$, pour tout polynôme q non constant. En remarquant que pour tout $r > 0$, l'application $\varphi_r : z \mapsto rz$ est une bijection de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}_r = \mathbb{D}(0, r)$ induisant une bijection de $\partial\mathbb{D}$ dans $\partial\mathbb{D}_r$ (avec $p \circ \varphi_r$ toujours polynomiale et non constante), on a :

$$\forall r > 0, \quad \|p\|_{\mathbb{D}_r} = \|p \circ \varphi_r\|_{\mathbb{D}} = \|p \circ \varphi_r\|_{\partial\mathbb{D}} = \|p\|_{\partial\mathbb{D}_r}.$$

En raisonnant de même avec les translations $z \mapsto a + z$ (qui sont polynomiales), on a :

$$\forall r > 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \|p\|_{\mathbb{D}(z, r)} = \|p\|_{\partial\mathbb{D}(z, r)}.$$

D'après la question précédente, on a même mieux que cela : le maximum n'est réalisé qu'en des éléments de $\partial\mathbb{D}(z, r)$.

Déduisons-en le cas d'un compact non vide quelconque, en introduisant $z_S \in S$ vérifiant :

$$|p(z_S)| = \|p\|_S.$$

Ce nombre complexe existe par le théorème des bornes atteintes. Si z_S est intérieur à S , il existe $r > 0$ tel que : $\mathbb{D}(z_S, r) \subseteq S$. Or z_S n'est pas dans $\partial\mathbb{D}(z_S, r)$, donc : $|p(z_S)| < \|p\|_{\mathbb{D}(z_S, r)} \leq \|p\|_S$. Cela contredit la définition de z_S . Par l'absurde : $z_S \in \partial S$, donc : $\|p\|_S = |p(z_S)| \leq \|p\|_{\partial S}$. L'inégalité en sens contraire est immédiate et on a donc l'égalité :

$$\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}.$$

B Inégalité de Von Neumann

11. Lorsque A est unitaire, le théorème (III) de l'énoncé et le fait que $|||P^{-1}p(A)P||| = |||p(A)|||$ pour une matrice P unitaire (question 4) impliquent : $|||p(A)||| = \|p\|_{\sigma(A)}$, avec : $\sigma(A) \subseteq \mathbb{D}$. D'où le résultat :

$$|||p(A)||| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

12. Soit λ une valeur propre de A^*A et soit x un vecteur propre associé. On a d'une part : $x^*A^*Ax = \lambda x^*x = \lambda\|x\|^2$, et d'autre part :

$$x^*A^*Ax = (Ax)^*Ax = \|Ax\|^2.$$

Comme x est un vecteur propre, on peut diviser par $\|x\|^2 \neq 0$ et on en déduit :

$$\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, comme A est une contraction :

$$\lambda \leq \frac{|||A|||^2 \cdot \|x\|^2}{\|x\|^2} \leq 1.$$

On a démontré : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq [0, 1]$.

Ceci étant dit, construisons D_A . Remarquons que la matrice A^*A est hermitienne :

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A.$$

Par le théorème (III), il existe P unitaire et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^*A =$

PDP^{-1} . Les λ_i sont les valeurs propres de A^*A . Alors : $I_n - A^*A = P(I_n - D)P^{-1}$, et les coefficients diagonaux de $I_n - D$, à savoir les $1 - \lambda_i$, sont des réels positifs d'après ce qui précède. Il est donc licite de poser :

$$D_A = P \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{1 - \lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a clairement : $D_A^2 = P(I_n - D)P^{-1} = I_n - A^*A$. Vérifions que D_A est hermitienne. Cela découle du fait que P est unitaire :

$$D_A^* = (P^{-1})^* \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{1 - \lambda_n} \end{pmatrix}^* P^* = P \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{1 - \lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = D_A.$$

Enfin : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D_A) = \{\sqrt{1 - \lambda_i} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \subseteq \mathbb{R}_+$, ce qui achève de démontrer que la matrice D_A satisfait aux exigences de l'énoncé.

Appliquer ce qui précède, en remplaçant A par A^* , donne l'existence de D_{A^*} .

13. On reprend les notations de la question précédente et de sa résolution. L'application $x \mapsto \sqrt{1 - x}$ est injective sur $[0, 1]$. On en déduit que les $\sqrt{1 - \lambda}$, pour λ parcourant le spectre de A^*A , sont des réels tous distincts. Par interpolation de Lagrange, il existe $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A^*A), \quad q(\lambda) = \sqrt{1 - \lambda}.$$

Or :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A^*A)^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc par linéarité, en décomposant q dans la base canonique :

$$q(A^*A) = P \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{1-\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = D_A.$$

On veut démontrer que l'on a $q(AA^*) = D_{A^*}$, avec le même polynôme q . Pour cela, étant donné que AA^* est aussi diagonalisable, il suffit de démontrer que A^*A et AA^* ont les mêmes valeurs propres. Pour cela, démontrons :

$$\chi_{A^*A} = \chi_{AA^*}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{pmatrix} I_n & -A^* \\ -A & xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xI_n & A^* \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n & 0_n \\ -xA & xI_n - AA^* \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} xI_n & A^* \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^* \\ -A & xI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xI_n - A^*A & 0_n \\ -A & xI_n \end{pmatrix}.$$

Par multiplicativité du déterminant et commutativité du produit dans $\mathbb{C}$, ces deux matrices ont même déterminant. Or, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\det \left(\begin{pmatrix} xI_n & 0_n \\ -xA & xI_n - AA^* \end{pmatrix} \right) = x^n \chi_{AA^*}(x), \quad \det \left(\begin{pmatrix} xI_n - A^*A & 0_n \\ -A & xI_n \end{pmatrix} \right) = x^n \chi_{A^*A}(x),$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{C}^*, \quad \chi_{A^*A}(x) = \chi_{AA^*}(x).$$

Ces deux applications polynomiales coïncident sur $\mathbb{C}^*$, qui est infini, donc : $\chi_{A^*A} = \chi_{AA^*}$. Par le raisonnement ci-dessus, on a bien : $q(AA^*) = D_{A^*}$.

Remarque. On pouvait aussi démontrer que $\chi_{A^*A} = \chi_{AA^*}$ en supposant d'abord A inversible, puis en utilisant la densité de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

14. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$A^*(AA^*)^k = (A^*A)^k A^*.$$

On le démontre par récurrence sur k , le cas $k = 0$ étant immédiat. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que : $A^*(AA^*)^k = (A^*A)^k A^*$. Alors :

$$A^*(AA^*)^{k+1} = A^*(AA^*)^k(AA^*) = (A^*A)^k A^* AA^* = (A^*A)^{k+1} A^*,$$

donc l'égalité à démontrer est héréditaire. D'où le résultat, par principe de récurrence.

Les applications $p \mapsto A^*p(AA^*)$ et $p \mapsto p(A^*A)A^*$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique de $\mathbb{C}[X]$, donc :

$$A^*q(AA^*) = q(A^*A)A.$$

Par la question précédente : $A^*D_{A^*} = D_A A^*$. Le raisonnement est le même pour obtenir $AD_A = D_{A^*} A$.

15. Comme D_A et D_{A^*} sont hermitiennes, on a :

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^* & -D_A \\ D_{A^*} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A + D_A^2 & A^*D_{A^*} - D_A A^* \\ D_{A^*}A - AD_A & D_{A^*}^2 + AA^* \end{pmatrix} \stackrel{(q.14)}{=} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

Ceci démontre bien que U est unitaire.

16. Il s'agit de généraliser le raisonnement des questions 6 à 8, en remarquant que (A, A^*, D_A) joue le rôle de $(z, \bar{z}, s)$. Posons :

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} I_n & 0_n & \cdots & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & \cdots & 0_n & I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0_n \\ \vdots & 0_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & I_n & 0_n & \cdots & 0_n \end{pmatrix} \in M_{n(k+2)}(\mathbb{C}),$$

qui est unitaire puisque ses colonnes forment une famille orthonormée de $\mathbb{C}^{n(k+2)}$. On a, comme à la question 6 :

$$U_k = P_\sigma \begin{pmatrix} U & 0_{2n, nk} \\ 0_{nk, 2n} & I_{nk} \end{pmatrix},$$

où U est la matrice unitaire de la question précédente, et donc :

$$U_k^* U_k = \begin{pmatrix} U & 0_{2n, nk} \\ 0_{nk, 2n} & I_{nk} \end{pmatrix}^* P_\sigma^* P_\sigma \begin{pmatrix} U & 0_{2n, nk} \\ 0_{nk, 2n} & I_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^* U & 0_{2n, nk} \\ 0_{nk, 2n} & I_{nk} \end{pmatrix} = I_{n(k+2)},$$

donc U_k est aussi unitaire. Par la question 8, on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{C}_{n(k+2)-1}[X], \quad |||p(U_k)||| \leq \|p\|_{\partial \mathbb{D}} \leq \|p\|_{\mathbb{D}}. \quad (*)$$

Il reste à démontrer que l'on a : $|||p(A)||| \leq |||p(U_k)|||$, pour conclure. On imite la résolution de la question 7 (mais avec plus de prudence, vu que A et $-D_A$ ne sont pas des scalaires, au contraire de z et $-s$!), ce qui nécessite d'explicitier le bloc $(1, 1)$ de $p(U)$: l'énoncé nous indique que l'on devrait obtenir $p(A)$.

Notons pour tout $i \in \llbracket 1, k+2 \rrbracket$:

$$E_i = \begin{pmatrix} 0_n \\ \vdots \\ 0_n \\ I_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix} \in M_{n(k+2), n}(\mathbb{C}),$$

où la matrice I_n correspond au i^{e} bloc. Notons que E_i peut être multipliée à droite par une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, et le résultat est une matrice de $M_{n(k+2), n}(\mathbb{C})$. On a :

$$U_k E_1 = \begin{pmatrix} A \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \\ -D_A \end{pmatrix} = E_1 \cdot A - E_{k+2} \cdot D_A, \quad \text{et : } \forall j \in \llbracket 3, k+2 \rrbracket, \quad U_k E_j = E_{j-1}.$$

On en déduit :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket, \quad U_k^\ell E_1 = E_1 A^\ell - \sum_{j=0}^{\ell-1} E_{k+2-j} D_A \cdot A^{\ell-1-j}.$$

Pour obtenir cette relation, on pourrait prétendre imiter les calculs de la résolution de la question 7, où l'on remplace la multiplication à gauche par un scalaire, par la multiplication à droite par une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Le problème est que l'analogue de la multiplication par z^{-k} serait celle par

$A^{-\ell}$, or A n'est pas supposée inversible. Un raisonnement par densité de $\text{GL}_{n(k+2)}(\mathbb{C})$ marcherait, mais au prix d'un gros effort puisqu'il faudrait démontrer la continuité de $A \mapsto D_A$! Le plus sage est de plutôt démontrer l'identité ci-dessus par une récurrence bête et méchante.

Quoi qu'il en soit, on en déduit que si $p \in \mathbb{C}_{k+1}[X]$, alors par linéarité :

$$p(U_k)E_1 - E_1p(A) \in \text{Vect}(E_2, \dots, E_{k+2}),$$

ce qui se traduit par le fait que le bloc $(1, 1)$ de $p(U_k)$ égale $p(A)$.

Soit alors x un vecteur non nul de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, et posons : $X = E_1x$. Notons : $p(U_k)E_1 = E_1p(A) + \sum_{j=2}^{k+2} E_jC_j$, avec C_j les autres blocs de la première colonne de $p(U_k)$. On a :

$$p(U_k)X = E_1p(A)x + \sum_{j=2}^{k+2} E_jC_jx,$$

et on en déduit, par définition de $\|\cdot\|$ (on pourrait y reconnaître le théorème de Pythagore) :

$$\|p(U_k)X\|^2 = \|E_1p(A)x\|^2 + \sum_{j=2}^{k+2} \|E_jC_jx\|^2 \geq \|E_1p(A)x\|^2,$$

avec :

$$\|E_1p(A)x\|^2 = x^\top p(A)^\top E_1^\top \overline{E_1p(A)x} = x^\top p(A)^\top \overline{p(A)x} = \|p(A)x\|^2,$$

et donc :

$$\|p(A)x\| \leq \|p(U_k)X\| \leq \|p(U_k)\| \cdot \|X\| \stackrel{(*)}{\leq} \|p\|_{\mathbb{D}} \cdot \|X\|.$$

On peut effectivement utiliser $(*)$, puisque : $k+1 \leq n(k+2) - 1$ (cela équivaut à : $k(n-1) \geq 2(1-n)$, qui est vrai : distinguer les cas $n=1$ et $n \geq 2$). Par définition, on a facilement : $\|X\| = \|x\|$, donc on déduit de cette majoration :

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}},$$

d'où le résultat.

Remarque. Introduire et démontrer les propriétés de base du produit tensoriel matriciel permettrait peut-être une généralisation plus rapide du raisonnement de la partie A.

17. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Si A est la matrice nulle, on a :

$$\|p(A)\| = \|p(0)I_n\| \stackrel{(q,2)}{=} |p(0)| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0,0)}.$$

Supposons donc que A n'est pas nulle et posons : $B = \frac{1}{\|A\|}A$. On a : $\|B\| = 1$, donc B est contractante. En appliquant l'inégalité de Von Neumann avec B au lieu de A et $q = p(\|A\|X)$ au lieu de p , on a : $\|q(B)\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}$, c'est-à-dire :

$$\|p(A)\| \leq \|p \circ (\|A\|X)\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0,\|A\|)}.$$

La dernière égalité est vraie parce que $z \mapsto \|A\|z$ est une bijection de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}(0, \|A\|)$. D'où le résultat.

C Hausdorffien et rayon numérique

18. Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et soit x un vecteur propre de A associé à λ . Quitte à le diviser par sa norme, on peut supposer que x est unitaire. Alors :

$$\langle Ax \mid x \rangle = \lambda \langle x \mid x \rangle = \lambda,$$

d'où : $\lambda \in \mathcal{H}(A)$, ce qu'il fallait démontrer.

19. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Notons : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$, et :

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

On veut démontrer : $\mathcal{H}(D) = C$.

Soit $z \in C$, et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que : $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i$, avec : $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On a :

$$\left\langle D \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 \sqrt{\alpha_1} \\ \vdots \\ \lambda_n \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i = z,$$

donc : $z \in \mathcal{H}(D)$. Ceci démontre l'inclusion de C dans $\mathcal{H}(D)$.

Pour l'inclusion réciproque, soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire : $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$; notons de plus que $|x_i|^2$ est positif pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$). Le même calcul que ci-dessus donne :

$$\langle Dx \mid x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \in C,$$

d'où l'inclusion : $\mathcal{H}(D) \subseteq C$.

20. Soit A une matrice unitaire ou hermitienne. Par le théorème (III), il existe P unitaire et D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$ (on en sait davantage sur D : on y reviendra). Comme P^{-1} est unitaire, elle préserve les vecteurs unitaires (bijectivement) et on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(D) &= \left\{ \langle DP^{-1}x \mid P^{-1}x \rangle \mid \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \langle DP^{-1}x \mid P^*x \rangle \mid \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \langle PDP^{-1}x \mid x \rangle \mid \|x\| = 1 \right\} \\ &= \mathcal{H}(A). \end{aligned}$$

Notons alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D . Par la question précédente :

$$\mathcal{H}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}.$$

Si A est hermitienne, on sait de plus que les λ_i sont réels. D'où :

$$\mathcal{H}(A) = [\min(\sigma(A)), \max(\sigma(A))].$$

Si A est unitaire, on sait que les λ_i sont des nombres complexes de module 1. Dans ce cas, l'ensemble décrit est un polygone à n côtés, dont les sommets sont les λ_i .

21. Posons : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On suit l'indication. Remarquons que si $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est unitaire alors, en mettant α et β sous forme exponentielle (si α ou β est nul, on prend un réel quelconque en guise d'argument) :

$$\alpha = ae^{i\varphi_a}, \quad \beta = be^{i\varphi_b}, \quad (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2.$$

On a : $a^2 + b^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \|x\|^2 = 1$. Posons alors : $\theta = \varphi_b - \varphi_a$. Par sesquilinearité :

$$\langle Mx \mid x \rangle = \left\langle e^{i\varphi_a} M \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \mid e^{i\varphi_a} \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle = |e^{i\varphi_a}|^2 \left\langle M \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle M \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

De cela, on déduit facilement :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(M) &= \left\{ \left\langle M \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \right\rangle \mid (\theta, a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^2, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \{abe^{i\theta} \mid (\theta, a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+)^2, a^2 + b^2 = 1\} \\ &= \{a\sqrt{1-a^2}e^{i\theta} \mid (\theta, a) \in \mathbb{R} \times [0, 1]\}. \end{aligned}$$

L'application $a \mapsto a\sqrt{1-a^2}$ est de dérivée $a \mapsto \frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $[0, 1[$: on en déduit qu'elle est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Sa valeur en 0 et 1 est 0 ; sa valeur en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est $\frac{1}{2}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, son image est $[0, \frac{1}{2}]$. D'où le résultat :

$$\mathcal{H}(M) = \{\rho e^{i\theta} \mid (\theta, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\} = \mathbb{D}\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

22. Notons f l'application $x \mapsto \langle Ax \mid x \rangle$. Elle est continue par composition de $x \mapsto (Ax, x)$ (linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie) et de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (c'est la composition de $(z, \omega) \mapsto (z, \bar{\omega})$, qui est $\mathbb{R}$ -linéaire sur $(\mathbb{C}^n)^2$ qui est de dimension finie, et de $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ qui est polynomiale). On a :

$$\mathcal{H}(A) = f(\partial\mathbb{D}).$$

Comme $\partial\mathbb{D}$ est compact, en tant que sphère unité d'un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{H}(A)$ est aussi compact : d'où le résultat.

23. La compacité de $\mathcal{H}(A)$ assure que $r(A)$ est bien défini.

Remarquons que par sesquilinearité du produit scalaire et homogénéité de la norme, on a aussi :

$$\mathcal{H}(A) = \left\{ \frac{\langle Ax \mid x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\} \right\}.$$

En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad |\langle Ax \mid x \rangle| \leq r(A)\|x\|^2.$$

Pour $x \neq 0$ cela découle de ce qu'on vient de dire ; pour $x = 0$ c'est immédiat.

Ceci étant dit, soit x un vecteur unitaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (dont l'énoncé demande d'admettre qu'elle reste valable dans le cas complexe), on a :

$$\langle Ax \mid x \rangle \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|.$$

Par propriété de la borne supérieure : $\mathcal{H}(A) \subseteq \mathbb{D}(0, \|A\|)$, et donc : $r(A) \leq \|A\|$.

Pour l'autre inégalité de l'énoncé, on utilise l'indication avec y quelconque dans un premier temps (nous ne démontrerons pas l'identité de polarisation, qui découle sans difficulté de la sesquilinearité du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} &|\langle Ax \mid y \rangle| \\ &= \left| \frac{1}{4} (\langle A(x+y) \mid x+y \rangle - \langle A(x-y) \mid x-y \rangle + i \langle A(x+iy) \mid x+iy \rangle - \langle A(x-iy) \mid x-iy \rangle) \right| \\ &\leq \frac{1}{4} (|\langle A(x+y) \mid x+y \rangle| + |\langle A(x-y) \mid x-y \rangle| + |\langle A(x+iy) \mid x+iy \rangle| + |\langle A(x-iy) \mid x-iy \rangle|) \\ &\leq \frac{r(A)}{4} (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2). \end{aligned}$$

La sesquilinearité et l'identité évidente $\langle a | b \rangle = \overline{\langle b | a \rangle}$ permettent de simplifier cette somme de normes au carré :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On simplifie de même $\|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2$ et on en déduit :

$$|\langle Ax | y \rangle| \leq r(A) (\|x\|^2 + \|y\|^2) = r(A) (1 + \|y\|^2),$$

Si $Ax \neq 0$, nous pouvons poser $y = \frac{1}{\|Ax\|} Ax$ (qui est unitaire), de sorte que :

$$\|Ax\| = |\langle Ax | y \rangle| \leq 2r(A).$$

Si $Ax = 0$, cette inégalité reste vraie puisque $r(A)$ est positif : c'est une conséquence facile de sa définition. Ceci vaut donc pour tout x unitaire et on en déduit : $\|Ax\| \leq 2r(A)$.

D'où le résultat : $\frac{1}{2} \|Ax\| \leq r(A) \leq \|Ax\|$.

24. Tout d'abord, r est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La question précédente implique aisément :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad (r(A) = 0 \iff \|Ax\| = 0 \iff A = 0_{M_n(\mathbb{C})}),$$

donc r sépare les points.

Démontrons que r est homogène. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a, par linéarité à gauche du produit scalaire : $\mathcal{H}(\lambda A) = \{\lambda z \mid z \in \mathcal{H}(A)\}$, donc :

$$r(\lambda A) = \sup_{z \in \mathcal{H}(\lambda A)} |z| = \sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |\lambda z| = \sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |\lambda| \cdot |z| = |\lambda| \sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |z| = |\lambda| r(A).$$

Enfin, pour toutes matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ et pour tout vecteur x unitaire on a :

$$|\langle (A+B)x | x \rangle| = |\langle Ax | x \rangle + \langle Bx | x \rangle| \leq |\langle Ax | x \rangle| + |\langle Bx | x \rangle| \leq r(A) + r(B).$$

Par propriété de la borne supérieure : $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$, donc r vérifie l'inégalité triangulaire. Ceci achève de démontrer que r est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$.

25. Par la question 21, on a : $r(A) = \frac{1}{2}$, or :

$$\mathcal{H}(B) = \{\langle A^* x | x \rangle \mid \|x\| = 1\} = \{\langle x | Ax \rangle \mid \|x\| = 1\} = \{\overline{\langle Ax | x \rangle} \mid \|x\| = 1\}.$$

On en déduit : $r(B) = r(A) = \frac{1}{2}$, donc : $r(A)r(B) = \frac{1}{4}$. Or :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc par la question 19 on a : $r(AB) = \sup[0, 1] = 1$.

Ainsi r n'est pas une norme sous-multiplicative : $r(AB) > r(A)r(B)$.

26. (a) On a :

$$1 - X^k = X^k(X^{-k} - 1) = X^k \prod_{\ell=1}^k (X^{-1} - \omega_k^\ell) = \prod_{\ell=1}^k X (X^{-1} - \omega_k^\ell) = \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^\ell X).$$

Pour la seconde identité, on remarque que d'après la première identité, elle revient à démontrer :

$$\frac{1}{1 - X^k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{1 - \omega_k^j X}.$$

Or on a la fameuse identité suivante, facile à démontrer (somme géométrique) que l'on a parfois coutume d'appeler *formule d'orthogonalité* (sous-entendu : des caractères de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_k^{jn} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{k}, \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{k}. \end{cases}$$

On a donc pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{kn} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{k}}}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_k^{jn} \right) x^n = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (\omega_k^j x)^n = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1-\omega_k^j x},$$

où la dernière égalité est vraie parce que : $|\omega_k^j x| = |x| < 1$.

L'égalité étant vérifiée en une infinité de complexes, elle se relève dans $\mathbb{C}(X)$. Remarquer que l'égalité $\omega_k^0 = \omega_k^k$ permet d'obtenir la même indexation que dans l'énoncé.

Autres démonstrations de la seconde identité. On pouvait aussi effectuer de l'interpolation de Lagrange avec le polynôme constant égal à 1 (cela nécessite de savoir démontrer :

$\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (\omega_k^j - \omega_k^\ell) = k\omega_k^{-j}$, par exemple en dérivant $X^k - 1 = \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^\ell)$ et en l'évaluant en ω_k^j), ou utiliser la formule du pôle simple pour obtenir la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1-X^k}$.

(b) On évalue les deux identités de la question précédente en A puis en x . Cela donne :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x - A^k x = \prod_{\ell=1}^k (I_n - \omega_k^\ell A) x = (I_n - \omega_k^j A) x_j, \quad (*)$$

et :

$$x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (I_n - \omega_k^\ell A) x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j. \quad (\dagger)$$

Comme x est unitaire, on a donc :

$$1 - \langle A^k x \mid x \rangle = \langle x - A^k x \mid x \rangle \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle x - A^k x \mid x_j \rangle \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I_n - \omega_k^j A) x_j \mid x_j \rangle,$$

d'où le résultat :

$$1 - \langle A^k x \mid x \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle x_j - \omega_k^j A x_j \mid x_j \rangle = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left[\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j \mid x_j \rangle \right].$$

(c) On suit l'indication. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(1 - e^{ik\theta} \langle A^k x \mid x \rangle \right) &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \operatorname{Re} \left(\|x_j\|^2 - \omega_k^j e^{i\theta} \langle A x_j \mid x_j \rangle \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\|x_j\|^2 - \operatorname{Re} \left(\omega_k^j e^{i\theta} \langle A x_j \mid x_j \rangle \right) \right). \end{aligned}$$

Or, comme on l'a vu en résolvant la question 23 :

$$\operatorname{Re} \left(\omega_k^j e^{i\theta} \langle A x_j \mid x_j \rangle \right) \leq \left| \omega_k^j e^{i\theta} \langle A x_j \mid x_j \rangle \right| = |\langle A x_j \mid x_j \rangle| \leq r(A) \|x_j\|^2,$$

et par hypothèse : $r(A) \leq 1$. On a donc :

$$\operatorname{Re} \left(1 - e^{ik\theta} \langle A^k x \mid x \rangle \right) \geq 0.$$

Choisissons θ de sorte que $e^{ik\theta} \langle A^k x \mid x \rangle$ soit un nombre réel positif : si $\langle A^k x \mid x \rangle = 0$, n'importe quel choix de θ convient ; sinon, il suffit de poser $\theta = -\frac{\varphi}{k}$ où φ est un argument du nombre complexe $\langle A^k x \mid x \rangle$. L'inégalité ci-dessus devient :

$$\left| \langle A^k x \mid x \rangle \right| = e^{ik\theta} \langle A^k x \mid x \rangle \leq 1.$$

Ceci vaut pour tout x unitaire, d'où le résultat :

$$r(A^k) \leq 1.$$

- (d) Si $k = 0$, alors l'inégalité souhaitée équivaut à : $r(I_n) \leq 1$. Cela découle par exemple des questions 23 et 2 (dans cet ordre).

Supposons donc : $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme r est une norme, elle sépare les points. Soit alors $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle et posons : $B = \frac{1}{r(A)} A$. On a : $r(B) = 1$, donc par la question précédente : $r(B^k) \leq 1$. Par homogénéité :

$$\frac{1}{r(A)^k} r(A^k) \leq 1,$$

d'où le résultat : $r(A^k) \leq r(A)^k$, qui reste trivialement vérifié si A est la matrice nulle.

D Conjecture de Crouzeix

27. Supposons l'existence de $c \leq 2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(A)||| \leq 2 \|p\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

Posons : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la question 21, on a (en prenant $p = 2X$) :

$$\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \|2X\|_{\mathbb{D}(0, \frac{1}{2})} = 1,$$

et :

$$|||p(A)||| = 2 |||A||| = 2 \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \\ |x|^2 + |y|^2 = 1}} \left\| \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2 \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \\ |x|^2 + |y|^2 = 1}} |y| = 2,$$

donc :

$$2 \leq c.$$

On en déduit : $c = 2$. Ainsi la constante 2, si elle convient, est optimale.

28. Soit $k \in \mathbb{N}$. On veut démontrer : $|||A^k||| \leq 2 \|X^k\|_{\mathcal{H}(A)}$. On a :

$$|||A^k||| \stackrel{(q. 23)}{\leq} 2r(A^k) \stackrel{(q. 26.(d))}{\leq} 2r(A)^k,$$

or il n'est pas difficile de se convaincre que la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto x^k$ implique :

$$\|X^k\|_{\mathcal{H}(A)} = \sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |z^k| = \sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |z|^k = \left(\sup_{z \in \mathcal{H}(A)} |z| \right)^k = r(A)^k,$$

d'où le résultat :

$$|||A^k||| \leq 2 \|X^k\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

29. Le fait que z soit dans $\mathcal{H}(A)$ résulte du théorème des bornes atteintes.

L'existence de φ implique :

$$p(z) = \sum_{k=0}^r c_k r(A)^k e^{ik\theta} = e^{i\varphi} \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

On en déduit :

$$|p(z)| = \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire :

$$|||p(A)||| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| \cdot |||A^k||| \stackrel{(q.28)}{\leq} 2 \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k = 2|p(z)| = 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)},$$

d'où le résultat.

30. (a) Si A est nulle, alors : $r(A) = |||A||| = 0$. L'inégalité $|||p(A)||| \leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0,|||A|||)}$ n'est alors qu'une variante affaiblie de l'inégalité de la question 17.

Supposons que A est une matrice non nulle. Soit $B = \frac{1}{r(A)}A$, et soit X une matrice inversible telle que : $\text{cond}(X) \leq 2$, et telle que $C = X^{-1}BX$ soit contractante. L'existence de cette matrice provient du théorème d'Okubo-Ando admis dans l'énoncé (car $r(B) = 1$). Par l'inégalité de Von Neumann – démontrée à la question 16 –, on a :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(C)||| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

Comme la norme est sous-multiplicative (question 3) et que : $B = XCBX^{-1}$, on en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(B)||| \leq \text{cond}(X) |||p(C)||| \leq 2\|p\|_{\mathbb{D}}.$$

En particulier, en remplaçant p par $p(r(A)X)$ dans cette inégalité :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(A)||| \leq 2\|p(r(A)X)\|_{\mathbb{D}} = 2\|p\|_{\mathbb{D}(0,r(A))},$$

d'où le résultat.

(b) Soit $\mathcal{D}$ un disque contenant $\mathcal{H}(A)$. Le bord d'un disque n'étant pas défini, nous présumons que l'on a : $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$.

Soit $p \in \mathbb{C}[X]$. Par la question précédente : $|||p(A)||| \leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0,r(A))}$. Si $\mathcal{D}$ est un disque centré en 0 et de rayon R , le fait de contenir $\mathcal{H}(A)$ implique : $r(A) \leq R$, et donc : $\mathbb{D}(0,r(A)) \subseteq \mathcal{D}$. On en déduit :

$$|||p(A)||| \leq 2\|p\|_{\mathcal{D}}.$$

Supposons désormais que l'on a : $\mathcal{D} = \mathbb{D}(z, R)$, avec $z \in \mathbb{C}$. On se ramène au cas précédent par translation. Pour cela, remarquons que l'on a :

$$\mathcal{H}(A - zI_n) = \{\langle Ax \mid x \rangle - z \mid \|x\| = 1\} = -z + \mathcal{H}(A).$$

Il est alors manifeste que l'on a : $\mathcal{H}(A - zI_n) \subseteq \mathbb{D}(0, R)$ (on translate tout selon le vecteur $-z$), donc par le cas précédent :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(A - zI_n)||| \leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0,R)}.$$

Cela vaut pour tout p , donc en remplaçant p par $p(X + z)$ on obtient :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(A)||| \leq 2\|p(X + z)\|_{\mathbb{D}(0,R)}.$$

Comme $\omega \mapsto \omega + z$ est une bijection de $\mathbb{D}(0, R)$ dans $\mathbb{D}(z, R) = \mathcal{D}$, le principe du maximum permet de conclure :

$$\forall p \in \mathbb{C}[X], \quad |||p(A)||| \leq 2\|p\|_{\mathcal{D}} \stackrel{(q.9)}{=} 2\|p\|_{\mathcal{C}}.$$