

Correction de l'épreuve :

X-ENS – MP – 2026 – sujet A

Note des correcteurs : le sujet initial comportait les parties « Préliminaires », A, B, C et D. Quant à la partie E reproduite ici, elle nous a été transmise par la vidéo

<https://www.youtube.com/watch?v=UqIaATKBWcs>

de Philippe Caldero sur sa chaîne Youtube. Comme il l'explique, cette dernière constitue la suite de cette épreuve, initialement prévue par son auteur. Elle est rédigée dans un style très proche des quatre premières parties.

PRÉAMBULE ET NOTATIONS

Dans tout le texte, la lettre $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes muni de la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on notera $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ le module de z . La lettre $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels qui sont positifs ou nuls.

Pour $x \in \mathbb{C}$ et $\delta \in \mathbb{R}_+$, on notera

$$\mathbb{D}(x, \delta) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| \leq \delta\} \quad \text{et} \quad \partial\mathbb{D}(x, \delta) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x| = \delta\}$$

respectivement le disque fermé et le cercle centrés en x et de rayon δ .

(I) Pour $n \geq 1$ entier, on considère le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ que l'on munit de l'application $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

où les x_i (resp. y_i) sont les coordonnées de x (resp. y). On notera aussi pour $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

Les candidates et candidats pourront utiliser sans justification les faits suivants :

- Pour $x \in \mathbb{C}^n$ fixé, l'application $\varphi_x : y \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est semi-linéaire au sens où $\varphi_x(y + \alpha y') = \varphi_x(y) + \bar{\alpha} \varphi_x(y')$ alors que $\psi_y : x \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est linéaire ;
- $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$;
- $|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Par analogie avec le cas euclidien, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est souvent appelé produit scalaire hermitien et lorsque $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ telle que $\langle u_i \mid u_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ et $\|u_i\| = 1$ avec $1 \leq i, j \leq n$, on dira que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale.

(II) Pour deux entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ désigne les matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) := \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ les matrices carrées $n \times n$.

- (i) Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on notera ${}^t A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ sa transposée et $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués dans $\mathbb{C}$ des coefficients de A . Les éléments de $\mathbb{C}^n$ seront identifiés aux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On notera aussi $A^* := {}^t \bar{A}$. On pourra utiliser sans justification que pour tous x et y dans $\mathbb{C}^n$, on a

$$\langle x | y \rangle = {}^t x \bar{y} \text{ et } \langle Ax | y \rangle = \langle x | A^* y \rangle.$$

- (ii) On considère pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

qui définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on ne demande pas de le démontrer) appelée norme subordonnée. Lorsque $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on définit le **conditionnement** de P par

$$\text{cond}(P) := \|P\| \cdot \|P^{-1}\|.$$

- (iii) Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **unitaire** si $A^* A = I_n$. Elle est dite **hermitienne** si $A^* = A$. On pourra utiliser sans démonstration que A est unitaire si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a $\|Ax\| = \|x\|$ ou encore si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormale.

(III) Pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, on notera $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont données par les λ_i . Le théorème de réduction suivant pourra, et devra, être utilisé.

Théorème Soit A une matrice unitaire (resp. hermitienne). Il existe alors une matrice unitaire U telle que

$$A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A qui sont alors de module 1 (resp. réelles).

Autrement dit une matrice unitaire (resp. hermitienne) est diagonalisable en base orthonormale pour le produit scalaire hermitien avec valeurs propres de module 1 (resp. réelles).

(IV) Pour tout polynôme à coefficients complexes $p = \sum_{i=0}^r p_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ et toute matrice

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle que $p(A)$ est la matrice $\sum_{i=0}^r p_i A^i$. On s'intéresse alors à $\|p(A)\|$ que l'on essaie de majorer par

$$\|p\|_S := \sup_{\alpha \in S} |p(\alpha)|.$$

pour un ensemble S compact qui, bien sûr, va dépendre de A .

Les candidates et candidats sont invités à ne pas rester bloqués sur une question (notamment celles, plus difficiles, situées en fin de partie). On attend toutefois un traitement de portions substantielles de chacune d'elles, plutôt qu'un « grappillage » de points.

Dans toute la suite, on considère $n \geq 1$ entier.

Préliminaires

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\|A\|$ et montrer que $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Notons Σ la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

- Soit $f_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue comme composée de $x \mapsto Ax$ et de la norme,

$$x \longmapsto \|Ax\|$$

où $x \mapsto Ax$ est continue car $\mathbb{R}$ -linéaire en dimension finie ($\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$),
 et la norme est toujours continue par rapport à elle-même.

Alors $\Sigma = f_I^{-1}(\{1\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

De plus, Σ est borné, or nous sommes en dimension finie, donc Σ est compact.

Enfin, $f_A(\Sigma)$ est compact comme image directe d'un compact par une application continue.

Donc $\max(f_A(\Sigma))$ existe.

Comme $f_A(\Sigma) = \{\|Ax\| ; x \in \Sigma\}$, nous avons montré que :

$$\boxed{\|A\| \text{ existe et } \|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|.$$

Or l'application $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \Sigma$ est surjective, donc :

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

$$\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} ; x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} = \{\|Ax\| ; x \in \Sigma\}.$$

Donc

$$\boxed{\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \text{ existe et vaut } \|A\|}.$$

2. Dans le cas où A est une matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donner une expression de $\|A\|$ en fonction des λ_i .

Notons encore Σ la sphère unité de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soient $x \in \Sigma$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$.

Alors, compte tenu du fait que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$:

$$\|Ax\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_i x_i \overline{\lambda_j x_j} \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2$$

Notons i_0 un indice tel que $|\lambda_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$. On obtient la majoration :

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_{i_0}|^2 |x_i|^2 = |\lambda_{i_0}|^2$$

En passant à la racine carrée, puis au maximum sur $x \in \Sigma$, on en déduit que :

$$\|A\| \leq |\lambda_{i_0}|.$$

Ce majorant est atteint : $e_{i_0} \in \Sigma$ et $\|Ae_{i_0}\| = \|\lambda_{i_0} e_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}|$. Donc,

$$\boxed{\|A\| = |\lambda_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|}.$$

3. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Soit $x \in \Sigma$. Alors, que Bx soit nul ou non, la question 1 appliquée au vecteur Bx donne :

$$\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

↑
Q. 1

Puis en passant au maximum sur la sphère Σ , on obtient :

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|}.$$

4. Vérifier que pour U unitaire, on a $\|U\| = 1$ et montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$.

D'après l'énoncé, puisque U est unitaire, U induit une isométrie sur $\mathbb{C}^n$, donc :

$$\boxed{\|U\| = \max\{\|Ux\| ; x \in \Sigma\} = \max\{1\} = 1}.$$

L'isométrie induite par U sur $\mathbb{C}^n$ induit à son tour une bijection de Σ sur Σ , donc :

$$\boxed{\|AU\| = \max_{x \in \Sigma} \|AUx\| = \max_{y \in \Sigma} \|Ay\| = \|A\|}.$$

Enfin, de nouveau, puisque U induit une isométrie sur $\mathbb{C}^n$,

$$\boxed{\|UA\| = \max_{x \in \Sigma} \|U(Ax)\| = \max_{x \in \Sigma} \|Ax\| = \|A\|}.$$

5. On suppose A diagonalisable de sorte qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Montrer que pour $\text{cond}(P)$ défini dans le préambule et $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A , on a pour tout $p \in \mathbb{C}[X]$

$$\|p\|_{\sigma(A)} \leq \|p(A)\| \leq \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}.$$

- Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Donc $p(D) = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et e_i le i -ème vecteur élémentaire de $\mathbb{C}^n$. Alors :

$$\|p(PDP^{-1})Pe_i\| = \|Pp(D)P^{-1}Pe_i\| = \|Pp(\lambda_i)e_i\| = |p(\lambda_i)| \cdot \|Pe_i\|,$$

donc

$$|p(\lambda_i)| \cdot \|Pe_i\| = \|p(A)Pe_i\| \leq \|p(A)\| \cdot \|Pe_i\|.$$

Or $\|Pe_i\| \neq 0$ car P est inversible. Donc $|p(\lambda_i)| \leq \|p(A)\|$.

Ceci étant vrai pour tout i , on en déduit :

$$\boxed{\|p\|_{\sigma(A)} = \max_{1 \leq i \leq n} |p(\lambda_i)| \leq \|p(A)\|}.$$

- D'après la question **3**,

$$\|p(A)\| = \|p(PDP^{-1})\| \leq \|P\| \cdot \|p(D)\| \cdot \|P^{-1}\| = \text{cond}(P) \|p(D)\|.$$

Rappelons que $\|p(D)\| = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$ où les λ_i sont les valeurs propres de A .

Donc, d'après la question **2**, $\|p(D)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |p(\lambda_i)| = \|p\|_{\sigma(A)}$. Ainsi :

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}}.$$

A Principe du maximum pour les polynômes

On note $\mathbb{D} := \mathbb{D}(0, 1)$ le disque unité et $\partial\mathbb{D} := \partial\mathbb{D}(0, 1)$ le cercle unité. Pour $p \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n - 1$ et $z \in \mathbb{D}$ on se propose de montrer que $|p(z)| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$. On suppose ici $n \geq 2$. Soit $s = \sqrt{1 - |z|^2}$. On introduit la matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le vecteur $e_1 \in \mathbb{C}^n$ par

$$U = \begin{pmatrix} z & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ s & -\bar{z} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que U est unitaire.

Notons $U_1, \dots, U_n$ les colonnes de U et $e_1, \dots, e_n$ les colonnes élémentaires.

- Tout d'abord, $\|U_1\|^2 = \|U_2\|^2 = |z|^2 + s^2 = 1$ et de plus $U_1^* U_2 = \bar{z}s - \bar{s}z = 0$.

Or $U_1, U_2 \in \text{Vect}(e_1, e_n)$.

Ainsi, par égalité des dimensions, (U_1, U_2) est une b.o.n. de $\text{Vect}(e_1, e_n)$.

- Puisque $(U_3, \dots, U_n) = (e_2, \dots, e_{n-1})$, qui est une famille orthonormale, la famille $(U_3, \dots, U_n)$ est une b.o.n. de $\text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$.

- Enfin, $\text{Vect}(e_1, e_n) \oplus^\perp \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc $(U_1, \dots, U_n)$ est une b.o.n. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc U est unitaire.

7. Montrer que $p(z) = e_1^* p(U) e_1$.

On montre un résultat un petit peu plus précis que celui nécessaire, en vue de la question 9 : montrons par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$U^k e_1 = z^k e_1 + \sum_{\ell=0}^{k-1} s z^\ell e_{n+1-k+\ell} = \begin{pmatrix} z^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s \\ s z \\ \vdots \\ s z^{k-1} \end{pmatrix} \leftarrow (n+1-k)\text{-ème rang.}$$

Au rang $k=0$: $U^0 e_1 = e_1 = z^0 e_1 + 0$ (la somme porte sur un ensemble vide d'indices).

Soit $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Supposons le résultat vrai au rang k .

Alors au rang $k+1$,

$$\begin{aligned} U^{k+1} e_1 &= U(U^k e_1) = z^k U e_1 + \sum_{\ell=0}^{k-1} s z^\ell U e_{\underbrace{n+1-k+\ell}_{\geq 3}} \\ &= (z^{k+1} e_1 + s z^k e_n) + \sum_{\ell=0}^{k-1} s z^\ell e_{n+1-k+\ell-1} \\ &= z^{k+1} e_1 + \sum_{\ell=0}^{(k+1)-1} s z^\ell e_{n+1-(k+1)+\ell} \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

Maintenant, en notant $p = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell X^\ell$ le polynôme de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} p(U) e_1 &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j U^j e_1 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j \left(z^j e_1 + \sum_{\ell=0}^{j-1} s z^\ell e_{n+1-j+\ell} \right) \\ &= p(z) e_1 + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{j-1} c_j s z^\ell e_{\underbrace{n+1-j+\ell}_{\geq 2}}. \end{aligned}$$

Alors $\boxed{e_1^* p(U) e_1 = p(z)}$.

8. Montrer, en utilisant le théorème du préambule, que

$$|p(z)| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

D'après la question 7, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|p(z)| = |e_1^* p(U) e_1| = |\langle e_1 | p(U) e_1 \rangle| \leq \|e_1\| \|p(U) e_1\| \leq \|p(U)\|.$$

Puisque U est unitaire, il existe P unitaire et D diagonale telles que $U = PDP^{-1}$.

Alors, d'après la question 4, puisque P et P^{-1} sont unitaires :

$$\|p(U)\| = \|p(PDP^{-1})\| = \|Pp(D)P^{-1}\| \underset{\text{Q. 4}}{=} \|p(D)\|.$$

Puis d'après la question 2, puisque D est diagonale : $\|p(D)\| = \|p\|_{\sigma(D)}$.

Or $\sigma(D) = \sigma(U)$ et comme U est unitaire, $\sigma(U) \subset \partial\mathbb{D}$, donc $\|p\|_{\sigma(D)} \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$.

Donc :

$$\boxed{|p(z)| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}}.$$

REM. Une rédaction passant par la question 5 est possible, cf. question 11.

9. On suppose ici que $|z| < 1$. Montrer que $|p(z)| < \|p\|_{\partial\mathbb{D}}$.

• Nous montrons que si $|z| < 1$, alors c'est la première des inégalités précédentes qui est stricte :

$$|p(z)| = |e_1^* p(U) e_1| = |\langle e_1 | p(U) e_1 \rangle| < \|e_1\| \|p(U) e_1\| \leq \|p(U)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}.$$

En effet, si cette inégalité était une égalité (cas d'égalité de Cauchy-Schwarz) seulement si $p(U)e_1$ est colinéaire à e_1 .

Ce cas d'égalité ne figure pas dans le préambule. En guise de justification, remarquons que :

$$\|p(U)e_1\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle e_i | p(U) e_1 \rangle|^2,$$

donc

$$\|p(U)e_1\| = |\langle e_1 | p(U) e_1 \rangle| \iff p(U)e_1 \in \text{Vect}(e_1).$$

• Montrons donc que e_1 n'est pas vecteur propre de $p(U)$.

D'après la question 7 telle que nous l'avons rédigée,

en notant c_{n-1} le coefficient dominant de p (de degré $n-1$), nous avons vu que :

$$p(U)e_1 = p(z)e_1 + sc_{n-1}e_2 + y \text{ où } y \in \text{Vect}(e_3, \dots, e_n).$$

Or $s = \sqrt{1 - |z|^2} > 0$ et $c_{n-1} \neq 0$, donc $e_2^* p(U)e_1 \neq 0$.

Donc e_1 n'est pas vecteur propre de $p(U)$, ce qui justifie l'inégalité stricte.

$$\boxed{\text{Si } |z| < 1, \text{ alors } |p(z)| < \|p\|_{\partial\mathbb{D}}}.$$

10. Soit S un fermé borné non vide de $\mathbb{C}$. On définit alors $\partial S \subset S$ comme suit : $x \in S \setminus \partial S$ si et seulement s'il existe $\delta > 0$ tel que le disque $\mathbb{D}(x, \delta) \subset S$. Montrer que $\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}$.

- Nous commençons par étudier le cas où $S = \mathbb{D}(a, r)$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ quelconques. Posons alors $q = p(rX + a)$, qui est un polynôme de même degré que p .

Soit $z \in \overset{\circ}{\mathbb{D}(a, r)}$. Alors $\frac{z-a}{r} \in \overset{\circ}{\mathbb{D}}$.

En appliquant la question **9** au polynôme q et au complexe $\frac{z-a}{r}$, on obtient :

$$|p(z)| = |p(r \frac{z-a}{r} + a)| = |q(\frac{z-a}{r})| < \|q\|_{\partial \mathbb{D}} = \|p\|_{\partial \mathbb{D}(a, r)}. \quad (1)$$

- Soit maintenant le compact non vide S de l'énoncé.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\|p\|_S \neq \|p\|_{\partial S}$, donc $\|p\|_{S \setminus \partial S} > \|p\|_{\partial S}$.

Notons x un point en lequel la fonction continue $z \mapsto p(z)$ atteint son maximum sur S compact.

D'après notre hypothèse, $x \in S \setminus \partial S$. Soit $\delta > 0$ tel que $\mathbb{D}(x, \delta) \subset S$.

Appliquons (1) au disque $\mathbb{D}(x, \delta)$, au polynôme p et au point x :

$$|p(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{<} \|p\|_{\partial \mathbb{D}(x, \delta)} \leq \|p\|_S = |p(x)|,$$

ce qui est absurde. Donc $\boxed{\|p\|_S = \|p\|_{\partial S}}$.

B Inégalité de Von Neumann

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une contraction au sens où $\|A\| \leq 1$ et que $p \in \mathbb{C}[X]$. On veut montrer l'inégalité de Von Neumann suivante :

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}$$

11. En utilisant la question 5, traiter le cas où A est unitaire.

Soit P unitaire et D diagonale à coefficients dans $\partial\mathbb{D}$ tels que $A = P^{-1}DP$.

Alors, d'après la question 5,

$$\|p(A)\| \leq \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Mais P étant unitaire, P^{-1} l'est également, donc d'après la question 4, $\|P\| = \|P^{-1}\| = 1$, donc $\text{cond}(P) = 1$. En outre, $\sigma(A) \subset \partial\mathbb{D}$, donc :

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}}}.$$

REM. Jusque là, c'était exactement la question 8. On aurait pu le dire directement, mais l'énoncé nous demande de passer par la question 5.

Puis, d'après le principe du maximum vu à la question 10 (ou 8),

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\partial\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}}}.$$

12. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne D_A (resp. D_{A^*}) dont les valeurs propres sont réelles positives et telle que $D_A^2 = I - A^*A$ (resp. $D_{A^*}^2 = I - AA^*$).

Indication : utiliser le théorème de réduction du préambule.

La matrice $(I - A^*A)$ est hermitienne, donc :

il existe P unitaire, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $I - A^*A = PDP^*$.

Montrons que les coefficients de D sont positifs. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle (I - A^*A)x | x \rangle = \langle x | x \rangle - \langle Ax | Ax \rangle = \|x\|^2 - \|Ax\|^2 \geq \underbrace{(1 - \|A\|^2)}_{\geq 0} \|x\|^2 \geq 0.$$

Prenons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous allons appliquer à $x = Pe_i$ ce qui précède :

$$\lambda_i = \langle De_i | e_i \rangle = \langle DP^*Pe_i | P^*Pe_i \rangle = \langle PDP^*Pe_i | Pe_i \rangle = \langle (I - A^*A)x | x \rangle \geq 0.$$

Posons alors $D_A = P^* \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$.

Bien sûr, $D_A^2 = P^*DP = I - A^*A$ et D_A est hermitienne à valeurs propres positives.

En appliquant ceci à la matrice A^* plutôt qu'à A , on obtient la matrice D_{A^*} .

$$\boxed{D_A \text{ et } D_{A^*} \text{ sont les racines carrées hermitiennes à spectres positifs de } I - A^*A \text{ et } I - AA^*}.$$

13. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $D_A = q(A^*A)$ et $D_{A^*} = q(AA^*)$.

Les matrices $I - A^*A$ et $I - AA^*$ sont hermitiennes positives, donc diagonalisables en base orthonormales.

Soient P et Q unitaires et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n) \in (\mathbb{R}_+)^{2n}$ tels que

$$I - A^*A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^* \text{ et } I - AA^* = Q \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) Q^*.$$

Soit $E = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n\}$.

(On pourrait démontrer que $\operatorname{Sp}(I - A^*A) = \operatorname{Sp}(I - AA^*)$ et même que $I - A^*A$ et $I - AA^*$ sont conjugués, mais c'est inutile).

Soit p le polynôme interpolateur de Lagrange envoyant x sur $\sqrt{x}$ pour tout $x \in E$.

Alors

$$\begin{aligned} p(I - A^*A) &= p(P^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P) \\ &= P^* \operatorname{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) P \\ &= P^* \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P = D_A \end{aligned}$$

De même, $p(I - AA^*) = D_{A^*}$. Posons $q = p(1 - X)$.

Alors $\boxed{q(A^*A) = p(I_n - A^*A) = D_A}$ et de même $\boxed{q(AA^*) = p(I_n - AA^*) = D_{A^*}}$.

14. Dédurre de la question précédente que

$$A^*D_{A^*} = D_AA^* \quad \text{et} \quad AD_A = D_{A^*}A.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^*(AA^*)^k = (A^*A)^k A^*$.

Donc par linéarité, en utilisant le polynôme q de la question **13**, $A^*q(AA^*) = q(A^*A)A^*$.

Autrement dit, $\boxed{A^*D_{A^*} = D_AA^*}$. De même, $\boxed{AD_A = D_{A^*}A}$.

15. Montrer que la matrice $U \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par

$$U = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix}$$

est unitaire.

$$U^*U = \begin{pmatrix} A^* & (-D_A)^* \\ (D_{A^*})^* & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D_{A^*} \\ -D_A & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^*A + D_A^2 & A^*D_{A^*} - (D_A)^*A^* \\ D_{A^*}A - AD_A & D_{A^*}^2 + AA^* \end{pmatrix}$$

D'après la question **12**, $A^*A + D_A^2 = I$ et $(D_{A^*})^2 + AA^* = I$.

D'après la question **14**, $D_{A^*}A - AD_A = 0$ et $A^*D_{A^*} - (D_A)^*A^* = 0$.

Donc $\boxed{U \text{ est unitaire}}$.

16. En utilisant les matrices

$$U_k = \begin{pmatrix} A & D_{A^*} & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0_n & 0_n & & & I_n \\ -D_A & A^* & 0_n & \cdots & 0_n \end{pmatrix},$$

où k est le nombre de matrices nulles 0_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur la première ligne, démontrer l'inégalité de Von Neumann.

Indication : on notera l'analogie avec la matrice U de la partie A. On montrera ainsi que pour p de degré $\leq k+1$, le premier bloc en haut à gauche de $p(U_k)$ est égal à $p(A)$.

Pour tout $\ell \in \llbracket 1, k+2 \rrbracket$, notons $J_\ell = {}^t(0|\cdots|0|I_n|0|\cdots|0) \in \mathcal{M}_{(k+2)n,n}(\mathbb{C})$ où la matrice I_n est située en ℓ -ème position.

Alors, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{(k+2)n,n}(\mathbb{C})$,

$$\begin{cases} J_1^* U M &= A J_1^* M + D_{A^*} J_2^* M, \\ J_m^* U M &= J_{m+1}^* M \quad (\forall m \in \llbracket 2, k+1 \rrbracket), \\ J_{k+2}^* U M &= -D_A J_1^* M + A^* J_2^* M \quad (\text{inutile}) \end{cases} \quad (*)$$

On en déduit par récurrence comme la question 7, que pour tout $\ell \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket$,

$$\begin{cases} J_1^* U_k^\ell J_1 &= A^\ell, \\ J_m^* U_k^\ell J_1 &= 0_n \quad (\forall m \in \llbracket 2, k+2-\ell \rrbracket). \end{cases} \quad (**)$$

En effet, le résultat est clair au rang 0.

On suppose le résultat au rang $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$. On part donc de (**).

En appliquant (*), on obtient :

$$\begin{cases} J_1^* U_k^{\ell+1} J_1 = J_1^* U (U_k^\ell J_1) = A J_1^* U_k^\ell J_1 + D_{A^*} \underbrace{J_2^* U_k^\ell J_1}_{0_n} = A^{\ell+1}, \\ J_m^* U_k^{\ell+1} J_1 = J_m^* U (U_k^\ell J_1) = J_{m+1}^* (U_k^\ell J_1) = 0_n \quad (\forall m \in \llbracket 2, k+2-\ell-1 \rrbracket). \end{cases}$$

Ceci achève la récurrence.

Par linéarité, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{C}_{k+1}[X], J_1^* p(U_k) J_1 = p(A)}$.

REM. Je conseillerais, le jour du concours, de se contenter d'écrire (**) et d'affirmer que la récurrence est identique à celle de la question 7.

Lorsque p est constant, $\|p(A)\| = \|p(1)I_n\| = |p(1)| = \|p\|_{\mathbb{D}}$.

Lorsque p est de degré $d \geq 1$, posons $k = d-1$ et U_k la matrice précédente.

Soient $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(k+2)n}$; on a aussi $\|X\| = 1$.

Alors, en appliquant la question 11 à la matrice unitaire U_k ,

$$\|p(A)x\| = \|p(U_k)X\| \leq \|p(U_k)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}.$$

$\uparrow$
Q. 17

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1, il en résulte que $\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}}}$.

17. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Si A est la matrice nulle 0_n , le résultat est clair :

$$\|p(0_n)\| = \|p(0)I_n\| = |p(0)| = \|p\|_{\{0\}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|0_n\|)}.$$

- Passons au cas où A n'est pas nulle.

Posons $B = \frac{A}{\|A\|}$ de sorte que $\|B\| = 1$.

Notons $(c_\ell)_\ell$ les coefficients de $p : p = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell X^\ell$.

Posons $q = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \|A\|^\ell X^\ell$ un polynôme de même degré que p .

Alors, en appliquant la question **16**    la contraction B et au polynôme q :

$$\|p(A)\| = \left\| q\left(\frac{A}{\|A\|}\right) \right\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Or

$$\|q\|_{\mathbb{D}} = \max_{z \in \mathbb{D}} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell (\|A\|z)^\ell \right| = \max_{y \in \mathbb{D}(0, \|A\|)} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell y^\ell \right| = \|q\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}.$$

Donc,

$$\boxed{\|p(A)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}(0, \|A\|)}}.$$

C Hausdorffien et rayon numérique

Le Hausdorffien de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est par définition le sous-ensemble suivant de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{H}(A) := \{\langle Ax | x \rangle \mid x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$$

18. Montrer que $\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)$ où $\sigma(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A .

Soient $\lambda \in \sigma(A)$ et v un vecteur propre de norme 1 associé à λ . Alors :

$$\lambda = \lambda \|v\|^2 = \langle Av | v \rangle \in \mathcal{H}(A).$$

Donc $\boxed{\sigma(A) \subset \mathcal{H}(A)}$.

19. Montrer que pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ est l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ c'est-à-dire l'ensemble $\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_i \in \mathbb{R}_+ \right\}$.

Notons $\mathcal{C}$ l'enveloppe convexe de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

- Soit $z \in \mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

Il existe alors $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $z = \langle Ax | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$.

Or les $|x_i|^2$ sont des réels positifs de somme 1, donc $z \in \mathcal{C}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \subset \mathcal{C}}$

- Soient $z \in \mathcal{C}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i$.

Posons $x = \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} e_i$. Alors $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = 1$ et $\langle Ax | x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i = z$.

Donc $z \in \mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C} \subset \mathcal{H}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))}$.

20. En déduire $\mathcal{H}(A)$ lorsque A est unitaire (resp. hermitienne).

- Lorsque A est unitaire, il existe P unitaire et D diagonale tels que $A = PDP^*$.

D'où, pour tout $x \in \Sigma$ (la sphère unité de $\mathbb{C}^n$), $\langle Ax | x \rangle = \langle DP^*x | P^*x \rangle$.

Or P^* induit une bijection de Σ sur elle-même, donc d'après ce qui précède, $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(D)$.

Donc $\mathcal{H}(A)$ est l'enveloppe convexe des valeurs propres de A .

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}(A) \text{ est un polygone convexe inscrit dans } \partial\mathbb{D}}$.

- Lorsque A est hermitienne, le raisonnement est identique.

Et puisque $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, on a : $\boxed{\mathcal{H}(A) \text{ est le segment } [\min(\sigma(A), \max \sigma(A))]}$.

21. Montrer que $\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$.

Indication : on pourra commencer par calculer $\langle Ax|x \rangle$ pour $x = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a^2 + b^2 = 1$.

• Soient $r \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Ainsi, $re^{i\theta}$ est un point générique de $\mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$.

Soient $\alpha = \frac{1}{2}\text{Arcsin}(2r)$ et $(a, b) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Alors $ab = \cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) = r$ (car $\sin \circ \text{Arcsin} = \text{id}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$).

Posons $x = \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix}$. Puisque $a^2 + b^2 = 1$, $\|x\| = 1$.

De plus, $\langle Ax|x \rangle = \langle \begin{pmatrix} be^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a \\ be^{i\theta} \end{pmatrix} \rangle = abe^{i\theta} = re^{i\theta}$.

Ainsi, $\mathbb{D}(0, \frac{1}{2}) \subset \mathcal{H}(A)$.

• Soit $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Alors $\langle Ax|x \rangle = \langle \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rangle = \bar{\alpha}\beta$ est un point générique de $\mathcal{H}(A)$.

Or $|\bar{\alpha}\beta| \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{H}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})}$.

22. Montrer que $\mathcal{H}(A)$ est un fermé borné de $\mathbb{C}$.

L'application $f_A : (\mathbb{C}^n)^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$ -bilinéaire en dimension finie,

$$(x, y) \longmapsto \langle Ax|y \rangle$$

puisque $\dim_{\mathbb{R}}((\mathbb{C}^n)^2) = 4n$, donc f_A est continue.

L'application $\alpha : \mathbb{C}^n \longrightarrow (\mathbb{C}^n)^2$ est linéaire en dimension finie donc continue.

$$z \longmapsto (z, z)$$

Rappelons que Σ , la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, est compacte.

Donc $f_A \circ \alpha(\Sigma)$ est compact comme image directe d'un compact par une application continue.

Mais $f_A \circ \alpha(\Sigma) = \mathcal{H}(A)$, donc $\boxed{\mathcal{H}(A) \text{ est compact (un fermé borné de } \mathbb{C})}$.

On introduit le rayon numérique $r(A)$ de A défini par

$$r(A) := \max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z|.$$

23. Montrer que $\frac{1}{2}\|A\| \leq r(A) \leq \|A\|$.

Pour la première inégalité, on pourra utiliser l'identité de polarisation

$$\begin{aligned} 4\langle Ax | y \rangle &= \langle A(x+y) | x+y \rangle - \langle A(x-y) | x-y \rangle \\ &\quad + i\langle A(x+iy) | x+iy \rangle - i\langle A(x-iy) | x-iy \rangle. \end{aligned}$$

- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, présente dans le préambule, pour tout $x \in \Sigma$,

$$|\langle Ax|x \rangle| \leq \|Ax\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|.$$

En passant au maximum sur $x \in \Sigma$, on obtient : $\boxed{r(A) \leq \|A\|}$.

- Passons à l'inégalité inverse.

Ecartons le cas $A = 0$ évident (car $r(0_n) = 0$ et $\|0_n\| = 0$).

Soient $x \in \Sigma \setminus \text{Ker}(A)$ tel que $\|A\| = \|Ax\|$ et $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$.

Ainsi, $\|A\| = \langle Ax|y \rangle$ avec $x, y \in \Sigma$.

Pour alléger les calculs, pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, notons $z_k = x + i^k y$.

D'après l'égalité de polarisation,

$$\|A\| = \langle Ax|y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle Az_k|z_k \rangle = \frac{1}{4} \left| \sum_{k=0}^3 i^k \langle Az_k|z_k \rangle \right| \leq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 |\langle Az_k|z_k \rangle| \leq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 r(A) \|z_k\|^2$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$,

$$\|z_k\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (-i)^k \langle x|y \rangle + i^k \langle y|x \rangle = 2 + 2\text{Re}(i^k \langle y|x \rangle).$$

Donc

$$\sum_{k=0}^3 \|z_k\|^2 = \sum_{k=0}^3 \left(2 + 2\text{Re}(i^k \langle y|x \rangle) \right) = 8 + 2\text{Re} \left(\langle y|x \rangle \sum_{i=0}^3 i^k \right) = 8.$$

Donc

$$\boxed{\|A\| \leq 2r(A)}.$$

24. Montrer que $r : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto r(A) \in \mathbb{R}_+$ est une norme.

- *Homogénéité*

Pour tout $s \in \Sigma$ (la sphère unité de $\mathbb{C}^n$),

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), |\langle \lambda Ax | x \rangle| = |\lambda| \cdot |\langle Ax | x \rangle|,$$

donc en passant au maximum sur $x \in \Sigma$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), r(\lambda A) = |\lambda| r(A).$$

- *Séparation*

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $r(A) = 0$, alors d'après la question **23**, $\|A\| = 0$, donc $A = 0$.

- *Inégalité triangulaire*

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $x \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} |\langle (A+B)x | x \rangle| &= |\langle Ax | x \rangle + \langle Bx | x \rangle| \\ &\leq |\langle Ax | x \rangle| + |\langle Bx | x \rangle| \\ &\leq r(A) + r(B) \end{aligned}$$

Donc $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

Ainsi, $\boxed{r : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto r(A) \in \mathbb{R}_+ \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

25. En considérant les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^*$, montrer que l'inégalité $r(AB) \leq r(A)r(B)$ n'est pas vraie.

D'après la question **21**, $r(A) = \frac{1}{2}$.

Puis $r(A^*) = \frac{1}{2}$, car pour tout $x \in \Sigma$,

$$|\langle A^*x | x \rangle| = |\langle x | Ax \rangle| = |\overline{\langle Ax | x \rangle}| = |\langle Ax | x \rangle|.$$

D'un autre côté,

$$r(AA^*) = \max_{\|x\|=1} \langle E_{12}E_{21}x | x \rangle = \max_{\|x\|=1} \langle E_{11}x | x \rangle = \max_{\|x\|=1} \langle E_{11}^2x | x \rangle = \max_{\|x\|=1} \|E_{11}x\|^2 = 1$$

Or $1 > \frac{1}{4}$.

On voit sur cet exemple que $\boxed{\text{l'inégalité } r(AB) \leq r(A)r(B) \text{ peut être mise en défaut}}$.

26. On veut dans cette question montrer l'inégalité $r(A^k) \leq r(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

26.a) On suppose $k \geq 1$. On note $\omega_k = \exp\left(\frac{2i\pi}{k}\right)$ une racine primitive k -ème de l'unité. Partant de l'égalité polynomiale usuelle $X^k - 1 = \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^\ell)$, en déduire les égalités polynomiales

$$1 - X^k = \prod_{\ell=1}^k (1 - \omega_k^\ell X) \quad \text{et} \quad 1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^\ell X).$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{\ell=1}^k \omega_k^{-\ell} = \omega_k^{\sum_{\ell=1}^k \ell} = \left(\omega_k^{\frac{k(k+1)}{2}}\right)^{-1} = \begin{cases} +1 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{2}, \\ -1 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$

(en effet, ω_k est d'ordre k , or k divise $\frac{k(k+1)}{2}$ si et seulement si $\frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$.)

Donc $\prod_{\ell=1}^k (-\omega_k^{-\ell}) = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent,

$$1 - X^k = - \prod_{\ell=1}^k (X - \omega_k^\ell) = \prod_{\ell=1}^k (-\omega_k^{-\ell} (X - \omega_k^\ell)) \underset{j=-\ell}{=} \prod_{j=1}^k (1 - \omega_k^j X).$$

- Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, notons $P_j = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^\ell X)$.

Alors pour tout $m \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus \{j\}$, $P_j(\omega_k^{-m}) = 0$ tandis que pour $m = j$, on obtient :

$$P_j(\omega_k^{-j}) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^{\ell-j}) \underset{\ell'=\ell-j}{=} \prod_{\ell'=1}^{k-1} (1 - \omega_k^{\ell'}) = P_k(1).$$

Notons $Q = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^\ell X) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k P_j$. Etudions le polynôme $Q - \frac{1}{k} P_k(1)$:

pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $Q(\omega_k^{-j}) - \frac{1}{k} P_k(1) = 0$, donc $Q - \frac{1}{k} P_k(1) = 0$,
car un polynôme de degré au plus $k-1$ s'annulant en k points différents est le polynôme nul.
Donc Q est constant sur la valeur $\frac{1}{k} P_k(1)$. Or $Q(0) = 1$, donc :

$$1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (1 - \omega_k^\ell X).$$

Il découle de notre argumentation que $P_k(1) = k$, autrement dit, $\prod_{\ell=1}^{k-1} (1 - \omega_k^\ell) = k$.

On peut aussi le prouver directement en considérant le terme constant du polynôme

$$\frac{(X+1)^k - 1}{X}.$$

Ainsi, les $\frac{1}{k} P_j$ sont les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $(\omega_k^{-j})_{1 \leq j \leq k}$.

26.b) Pour $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1, on pose pour $j = 1, \dots, k$

$$x_j = \left(\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (I - \omega_k^\ell A) \right) x.$$

Déduire de la question précédente la formule suivante :

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j \mid x_j \rangle] = 1 - \langle A^k x \mid x \rangle.$$

D'après la question **26.a)** appliquée à la matrice A , puis à x , on obtient :

$$(i) \quad (I - A^k)x = \left(\prod_{\ell=1}^k (I - \omega_k^\ell A) \right) x = (I - \omega_k^j A)x_j \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket;$$

$$(ii) \quad x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^k (I - \omega_k^\ell A) \right) x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k [\|x_j\|^2 - \langle \omega_k^j A x_j \mid x_j \rangle] &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I - \omega_k^j A)x_j \mid x_j \rangle \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ (i)}}{=} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \langle (I - A^k)x \mid x_j \rangle \\ &= \langle (I - A^k)x \mid \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j \rangle \\ &\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ (ii)}}{=} \langle (I - A^k)x \mid x \rangle \\ &= 1 - \langle A^k x \mid x \rangle. \end{aligned}$$

26.c) On suppose $r(A) \leq 1$. Soit θ un réel quelconque et soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur unitaire. En écrivant l'égalité précédente pour $e^{i\theta}A$, montrer que la partie réelle de $1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle$ est toujours positive et en déduire que $r(A^k) \leq 1$.

- On applique la question **26.b)** et on utilise l'inégalité suivante pour tout j :

$$|\langle Ax_j | x_j \rangle| = \|x_j\|^2 | \langle A \frac{x_j}{\|x_j\|} | \frac{x_j}{\|x_j\|} \rangle | \leq \|x_j\|^2 r(A).$$

Remarquons que l'inégalité tient même si $x_j = 0$ (et c'est alors une égalité). Il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) &= \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^k \left(\|x_j\|^2 - (\omega_k^j e^{i\theta} \langle Ax_j | x_j \rangle) \right) \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\|x_j\|^2 - \operatorname{Re} (\omega_k^j e^{i\theta} \langle Ax_j | x_j \rangle) \right) \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\|x_j\|^2 - |\langle Ax_j | x_j \rangle| \right) \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\|x_j\|^2 \underbrace{(1 - r(A))}_{\geq 0} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Re} (1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) \geq 0}$.

- Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et $r(A^k) = |\langle A^k x | x \rangle|$.

Posons $\theta = -\frac{1}{k} \operatorname{Arg} \langle A^k x | x \rangle$.

Alors $r(A^k) = |\langle A^k x | x \rangle| = e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle = \operatorname{Re} (e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle)$.

Donc $\operatorname{Re} (1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) = 1 - r(A^k)$.

Or $\operatorname{Re} (1 - e^{ik\theta} \langle A^k x | x \rangle) \geq 0$ d'après ce qui précède.

Autrement dit, $\boxed{r(A^k) \leq 1}$.

26.d) En déduire le résultat annoncé, i.e. $r(A^k) \leq r(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$.

D'après la question **24**, nous savons que $r(A) \neq 0$.

Soit $B = \frac{A}{r(A)}$. Toujours d'après la question **24**, $r(B) = 1$.

Mais alors on peut appliquer la question **26.c)** à B : on obtient que $r(B^k) \leq 1$.

Donc $r\left(\frac{A^k}{r(A)^k}\right) \leq 1$.

Donc, toujours par homogénéité de la norme r , d'après la question **24** :

$$\boxed{r(A^k) \leq r(A)^k}.$$

D Conjecture de Crouzeix

La conjecture de Crouzeix s'énonce comme suit : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ on a

$$\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}. \quad (1)$$

27. En étudiant l'exemple de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que la constante 2 dans la conjecture ne peut pas être améliorée.

On a vu à la question **21** que $\mathcal{H}(A) = \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})$, donc $r(A) = \frac{1}{2}$. Prenons $p = X$. Alors $\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \max_{z \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{2})} |z| = \frac{1}{2}$. Or :

$$\|p(A)\| = \|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{|a|^2+|b|^2=1} \|A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\| = \max_{|a|^2+|b|^2=1} |b| = 1.$$

Donc $\|p(A)\| = 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}$: la constante 2 ne peut pas être améliorée.

28. En utilisant le résultat de la question **26**, montrer que la formule (1) est toujours vérifiée pour les monômes $p(X) = X^k$ avec $k \geq 0$ entier.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\|A^k\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Question 23}}}{\leq} 2r(A^k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Question 26}}}{\leq} 2r(A)^k = 2 \left(\max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z| \right)^k = 2 \left(\max_{z \in \mathcal{H}(A)} |z^k| \right) = 2\|X^k\|_{\mathcal{H}(A)}.$$

29. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $z = r(A)e^{i\theta} \in \mathcal{H}(A)$ et $p(X) = \sum_{k=0}^r c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $c_k = |c_k| e^{i(\varphi - k\theta)}$ pour $0 \leq k \leq r$. Montrer que (1) est vérifiée pour le couple (A, p) considéré.

• Comme au début de la question **28** :

$$\|p(A)\| = \left\| \sum_{k=0}^r c_k A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| \|A^k\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Question 23}}}{\leq} 2 \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Question 26}}}{\leq} 2 \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k.$$

• D'un autre côté, d'après la définition de $r(A)$, $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(0, r(A))$, donc :

$$\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \max_{y \in \mathcal{H}(A)} \left| \sum_{k=0}^r c_k y^k \right| \leq \max_{y \in \mathbb{D}(0, r(A))} \left| \sum_{k=0}^r c_k y^k \right| \leq \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k$$

Mais par ailleurs, d'après les hypothèses de la question **29** et le fait que $z \in \mathcal{H}(A)$:

$$\sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k = \left| \sum_{k=0}^r |c_k| e^{i\varphi} \underbrace{(e^{-i\theta} z)^k}_{\in \mathbb{R}_+} \right| = \left| e^{i\varphi} \sum_{k=0}^r c_k z^k \right| = |p(z)| \leq \|p\|_{\mathcal{H}(A)}$$

On en déduit que $\|p\|_{\mathcal{H}(A)} = \sum_{k=0}^r |c_k| r(A)^k$ et donc :

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(A)}}.$$

30. Un résultat de Okubo et Ando montre que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $r(B) \leq 1$ alors il existe une matrice inversible X vérifiant $\text{cond}(X) \leq 2$ telle que $C := X^{-1}BX$ soit une contraction.

30.a) En utilisant le résultat de Okubo-Ando, montrer que

$$\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Soit $B = \frac{A}{r(A)}$. Alors $r(B) \leq 1$.

Soit $p = \sum_{k=0}^r c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme quelconque. Il vient :

$$\begin{aligned} \|p(A)\| &= \left\| \sum_{k=0}^r c_k A^k \right\| = \left\| \sum_{k=0}^r c_k r(A)^k B^k \right\| = \left\| X \left(\sum_{k=0}^r c_k r(A)^k C^k \right) X^{-1} \right\| \\ &\leq \underbrace{\|X\| \|X^{-1}\|}_{\text{cond}(X)} \left\| \sum_{k=0}^r c_k (r(A)C)^k \right\| \\ &\leq 2 \|p(r(A)C)\| \\ &\leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0, \|r(A)C\|)} \\ &\stackrel{\text{Q. 17}}{\uparrow} \\ &\leq 2\|p\|_{\mathbb{D}(0, r(A))} \\ &\stackrel{\|C\| \leq 1}{\uparrow} \end{aligned}$$

30.b) En déduire, pour tout disque contenant $\mathcal{H}(A)$ de bord $\mathcal{C}$, que

$$\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{C}}.$$

Soit $p \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme quelconque.

Soient z et $\rho > 0$ tels que $\mathcal{C} = \partial\mathbb{D}(z, \rho)$.

Posons $B = A - zI$.

Posons $q = p(X + z)$, de sorte que $p = q(X - z)$, donc $p(A) = q(A - zI) = q(B)$. Alors :

$$\|p(A)\| = \|q(B)\| \stackrel{\text{Q. 30.a}}{\leq} 2\|q\|_{\mathbb{D}(0, r(B))}.$$

Montrons que $r(B) \leq \rho$.

$$\mathcal{H}(B) = \{\langle Ax - zx|x \rangle ; \|x\| = 1\} = \{\langle Ax|x \rangle - z ; \|x\| = 1\} = \mathcal{H}(A) - z.$$

Par hypothèse, $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{D}(z, \rho)$, donc $\mathcal{H}(B) \subset \mathbb{D}(0, \rho)$, donc $r(B) \leq \rho$.

On en déduit que $\mathbb{D}(0, r(B)) \subset \mathbb{D}(0, \rho)$. Donc :

$$\|q\|_{\mathbb{D}(0, r(B))} \leq \|q\|_{\mathbb{D}(0, \rho)} \stackrel{\text{Q. 10}}{\leq} \|q\|_{\partial\mathbb{D}(0, \rho)}.$$

Exprimons cette dernière quantité en fonction de p :

$$\|q\|_{\partial\mathbb{D}(0, \rho)} = \max_{y \in \partial\mathbb{D}(0, \rho)} |q(y)| = \max_{y \in \partial\mathbb{D}(z, \rho)} |q(y - z)| = \max_{y \in \mathcal{C}} |p(y)| = \|p\|_{\mathcal{C}}.$$

Finalement, nous avons montré que :

$$\boxed{\|p(A)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{C}}}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE¹

1. telle qu'elle a été donnée au concours le lundi 13 avril 2026.

E Matrices de Jordan perturbées

Soit $n \geq 2$. Comme à la partie **C**, on note $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

On considère la matrice $J_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ v & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $0 \leq v < 1$.

31. Donner les valeurs propres de J_v .

La matrice J_v est la transposée de la matrice compagnon classique $X^n - v$.

Or le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon d'un polynôme unitaire de degré n est ce polynôme. Donc ici, $\chi_{J_v} = \chi_{J_v^t} = X^n - v = \prod_{k=1}^n (X - v^{1/n} \omega_n^k)$.

Les matrices compagnon étant hors-programme, donnons-en une démonstration.

$$\begin{aligned} \det(XI_n - J_v) &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X & -1 \\ -v & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} X^{-\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} X^n & -X^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X^2 & -X \\ -v & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{(2)}{=} X^{-\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} X^n - v & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -v & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v & \cdots & 0 & X^2 & 0 \\ -v & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix} = X^n - v \end{aligned}$$

(1) Pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on a effectué $L'_k \leftarrow X^{n-k} L_k$,

(2) Pour tout $k \in \{n-1, n-2, \dots, 1\}$, on a effectué $L'_k \leftarrow L_k + L'_{k+1}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{Sp}(J_v) = \{v^{1/n} \omega_n^k ; k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}}$.

32. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}}M$ est unitaire et en déduire le conditionnement de M .

Notons $(m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n} = (M_1 | \cdots | M_n) = M$. Ainsi, pour tous k, ℓ , $m_{k,\ell} = \omega_n^{k\ell}$.

Alors pour tous $k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, remarquons que $\ell - k \equiv 0 [n] \iff k = \ell$. On en déduit que :

$$M_k^* M_\ell = \sum_{m=1}^n \overline{\omega_n^{mk}} \omega_n^{m\ell} = \sum_{m=1}^n (\omega_n^{(\ell-k)})^m = \begin{cases} n & \text{si } k = \ell, \\ \frac{1 - (\omega_n^{(\ell-k)})^n}{1 - \omega_n^{(\ell-k)}} = 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

Ainsi, $(M_1, \dots, M_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs de norme constante égale à $\sqrt{n}$.

Donc $(\frac{1}{\sqrt{n}}M_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}M_n)$ est une b.o.n., donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}M \text{ est unitaire}}$.

Alors $\|M\| = \sqrt{n} \|\frac{1}{\sqrt{n}}M\| = \sqrt{n}$.

Et $\|M^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|\sqrt{n}M^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|(\frac{1}{\sqrt{n}}M)^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donc $\boxed{\text{cond}(M) = \|M\| \cdot \|M^{-1}\| = 1}$.

33. Pour tout $k = 1, \dots, n$, on note

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ v^{1/n} \omega_n^{k-1} \\ v^{2/n} \omega_n^{2(k-1)} \\ \vdots \\ v^{(n-1)/n} \omega_n^{(n-1)(k-1)} \end{pmatrix}.$$

Soit alors P la matrice de passage où on exprime les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans la base canonique. Montrer que son conditionnement, cf. la question 5, est égal à $v^{-(n-1)/n}$.

Soit $D = \text{diag}(1, v^{1/n}, \dots, v^{(n-1)/n})$ de sorte que $P = DM$. Alors $\boxed{\text{cond}(P) = v^{-(n-1)/n}}$ car :

$$\begin{aligned} \text{cond}(P) &= \|P\| \|P^{-1}\| \\ &= \|DM\| \|M^{-1}D^{-1}\| \\ &= \sqrt{n} \|\frac{1}{\sqrt{n}}DM\| \|\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}M^{-1}D^{-1}\| \\ &= \|D(\frac{1}{\sqrt{n}}M)\| \|(\frac{1}{\sqrt{n}}M)^{-1}D^{-1}\| \\ &\stackrel{(1)}{=} \|D\| \|D^{-1}\| \\ &= \max \text{Sp}(D) \max \text{Sp}(D^{-1}) \\ &= 1 \times v^{-(n-1)/n} \end{aligned}$$

(1) En application de la question 4, puisque $\frac{1}{\sqrt{n}}M$ et $(\frac{1}{\sqrt{n}}M)^{-1}$ sont unitaires.

Attention : l'enchaînement des questions 32 - 33 est susceptible de nous laisser chercher comment exprimer $\text{cond}(DM)$ en fonction de $\text{cond}(D)$ et $\text{cond}(M)$. Et de fait, on trouve l'égalité $\text{cond}(DM) = \text{cond}(D) \text{cond}(M)$, mais on ne peut utiliser a priori une telle égalité, car la norme $\|\cdot\|$ est seulement *sous-multiplicative*. On a utilisé sa multiplicativité *exacte* lorsque l'une des matrice (ici M) du produit est colinéaire à une matrice unitaire.

34. Dédurre des calculs précédents que si $v \geq 2^{-n/(n-1)}$ alors la conjecture de Crouzeix est vérifiée pour J_v .

Remarquons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J_v v_k = v^{1/n} \omega_n^{k-1} v_k$.
Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J_v P E_k = P D E_k$ avec $D = \text{diag}(v^{1/n}, v^{1/n} \omega_n, \dots, v^{1/n} \omega_n^{k-1})$.
Donc $J_v P(E_1 | \dots | E_n) = P D(E_1 | \dots | E_n)$, ainsi $J_v = P^{-1} D P$.
Alors, d'après les questions **5** puis **18** :

$$\|p(J_v)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Q. 5}}}{\leq} \text{cond}(P) \|p\|_{\sigma(J_v)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Q. 17}}}{\leq} \text{cond}(P) \|p\|_{\mathcal{H}(J_v)}.$$

Afin de vérifier la conjecture de Crouzeix, il suffit que $v^{-(n-1)/n} = \text{cond}(P) \leq 2$.

Donc si $v \geq 2^{-n/(n-1)}$ alors la conjecture de Crouzeix est vérifiée pour J_v .

35. Montrer que

$$\mathcal{H}(J_0) = \mathbb{D}(0, \cos(\pi/(n+1))).$$

Indication : à ce stade du sujet on pourra utiliser sans en donner les preuves les faits élémentaires suivants :

- (i) $\mathcal{H}(\alpha A) = \alpha \mathcal{H}(A)$;
- (ii) la projection sur l'axe des réels de $\mathcal{H}(A)$ est égale à $\mathcal{H}\left(\frac{A+A^*}{2}\right)$;
- (iii) J_0 est semblable à cJ_0 pour tout $c \in \mathbb{C}^*$;
- (iv) les valeurs propres de $\frac{J_0+J_0^*}{2}$ sont les $\cos(k\pi/(n+1))$ pour $k = 1, \dots, n$.

Attention : Nous remplaçons (iii) par (iii)' (et il semble que ceci soit nécessaire) :

(iii)' J_0 est unitairement semblable à $e^{i\theta} J_0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

En effet, une matrice de passage P possible telle que $P^{-1} J_0 P = c J_0$ est $\text{diag}(1, c, \dots, c^{n-1})$ et si $|c| = 1$, cette matrice diagonale est unitaire.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, d'après (i) puis (iii)', il existe $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$e^{i\theta} \mathcal{H}(J_0) = \mathcal{H}(e^{i\theta} J_0) = \mathcal{H}(P^{-1} J_0 P).$$

D'après (iii)', cette matrice P peut être choisie unitaire, donc $P^{-1} = P^*$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(P^* J_0 P) &= \{ \langle P^* J_0 P x | x \rangle ; \|x\| = 1 \} \\ &= \{ \langle J_0 P x | P x \rangle ; \|x\| = 1 \} \\ &= \{ \langle J_0 y | y \rangle ; \|y\| = 1 \} \\ &= \mathcal{H}(J_0) \end{aligned}$$

car les matrices unitaires réalisent une bijection de la sphère unité sur elle-même.

Ainsi, dès qu'un complexe z appartient à $\mathcal{H}(J_0)$, $e^{i\theta} z$ y appartient, et ce pour tout θ .

Donc $\mathcal{H}(J_0)$ est une réunion de cercles centrés en 0.

Autrement dit, il existe une partie non vide $R \subset \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathcal{H}(J_0) = \bigcup_{r \in R} \partial \mathbb{D}(0, r).$$

Par conséquent, la projection de $\mathcal{H}(J_0)$ sur l'axe des réels est $\bigcup_{r \in R} \partial \{-r, r\}$.

Or d'après (ii), cette projection coïncide avec $\mathcal{H}\left(\frac{J_0+J_0^*}{2}\right)$.

Mais $\frac{J_0+J_0^*}{2}$ est hermitienne.

nous avons vu question **20** que dans ce cas, $\mathcal{H}\left(\frac{J_0+J_0^*}{2}\right) = [\min \sigma\left(\frac{J_0+J_0^*}{2}\right), \max \sigma\left(\frac{J_0+J_0^*}{2}\right)]$.

D'après (iv), ce segment est $[-\cos(\pi/(n+1)), \cos(\pi/(n+1))]$.

Récapitulons :

$$\mathcal{H}(\frac{J_0+J_0^*}{2}) = \bigcup_{r \in R} \partial\{-r, r\} \text{ et } \mathcal{H}(\frac{J_0+J_0^*}{2}) = [-\cos(\pi/(n+1)), \cos(\pi/(n+1))].$$

Par conséquent, $R = [0, \cos(\pi/(n+1))]$ et donc $\mathcal{H}(J_0) = \bigcup_{r \in R} \partial\mathbb{D}(0, r)$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H}(J_0) = \mathbb{D}(0, \cos(\pi/(n+1)))}$.

36. En déduire que $\mathbb{D}(0, \cos(\pi/n)) \subset \mathcal{H}(J_v)$.

Dans ce qui suit, nous noterons en exposant la taille des matrices.

Soit $z \in \mathbb{D}(0, \cos(\pi/n))$.

D'après la question **35**, $z \in \mathcal{H}(J_0^{(n-1)})$, où $J_0^{(n-1)} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Alors il existe $x \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|x\| = 1$ et $\langle J_0^{(n-1)} x | x \rangle = z$.

Notons $x' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont les coordonnées sont celles de x , avec un 0 en plus en position n .

Notons $x_1, \dots, x_{n-1}$ les coordonnées de x . Alors :

Remarquons que les expressions de $\langle J_v^{(n)} x' | x' \rangle$ et de $\langle J_0^{(n-1)} x | x \rangle$ ci-dessous sont toutes deux

égales à $\sum_{k=1}^{n-2} \overline{x_{k+1}} x_k$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ v & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \\ v z_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Autrement dit :

$$\langle J_v^{(n)} x' | x' \rangle = \sum_{k=1}^{n-2} \overline{x_{k+1}} x_k = \langle J_0^{(n-1)} x | x \rangle = z.$$

Donc $z \in \mathcal{H}(J_v)$. Ceci montre que $\boxed{\mathbb{D}(0, \cos(\pi/n)) \subset \mathcal{H}(J_v)}$.

37. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{C}^*$, cJ_v est semblable à $J_{c^n v}$.

Notons $Q = \text{diag}(c, c^2, \dots, c^n)$. Alors pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$QMQ^{-1} = (c^i m_{ij} c^{-j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

En effet, multiplier à gauche (respectivement à droite) par une matrice diagonale D revient à multiplier chaque ligne (resp. chaque colonne) par les coefficients diagonaux de D .

Donc $\boxed{QJ_vQ^{-1} = J_{c^n v}}$.

38. On suppose $0 < v \leq (\cos(\pi/n))^n$ et on pose $c = \cos(\pi/n)^{-1}$. Montrer que $J_{c^n v}$ est une contraction.

Avec ces hypothèses, $c^n v \in]0, 1]$.

Alors, pour tout vecteur $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, en identifiant $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$J_{c^n v} a = (a_2, \dots, a_n, c^n v a_1).$$

$$\text{Donc } \|J_{c^n v} a\|^2 = \sum_{i=2}^n |a_i|^2 + |c^n v a_1|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq \|a\|^2.$$

Donc $\|J_{c^n v}\| \leq 1$, c'est-à-dire que $J_{c^n v}$ est une contraction.

39. Dédurre de l'inégalité de Von Neumann que

$$\|p(J_v)\| \leq \cos(\pi/n)^{1-n} \|p\|_{\mathcal{H}(J_v)},$$

et conclure que pour $n > 6$, toutes les matrices J_v vérifient la conjecture de Crouzeix.

Indication : on pourra utiliser que pour $n > 6$, on a $\cos(\pi/n)^{1-n} \leq 2$.

Soit $n > 6$.

- Cas où $2^{-n/(n-1)} \leq v < 1$.

Dans ce cas, d'après la question **34**, J_v vérifie la conjecture de Crouzeix.

- Cas où $0 < v < 2^{-n/(n-1)}$.

puisque $\cos(\pi/n)^{1-n} \leq 2$, on a : $\cos(\pi/n)^n \geq 2^{-n/(n-1)}$, donc $0 < v < \cos(\pi/n)^n$.

Posons $c = \cos(\pi/n)^{-1} \in]1, +\infty[$ (comme à la question **38**).

Soit $p \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme.

Reprenons la matrice diagonale $Q = \text{diag}(c, c^2, \dots, c^n)$ de la question **37**.

Sa plus grande valeur propre est c^n , donc $\|Q\| = c^n$ (puisque Q est diagonale).

La plus grande valeur propre de Q^{-1} est c^{-1} , donc $\|Q^{-1}\| = c^{-1}$ (puisque Q^{-1} est diagonale).

Donc $\text{cond}(D) = c^{n-1}$.

Posons $q = p(c^{-1}X)$.

$$\|p(J_v)\| = \|q(cJ_v)\| = \|QqJ_{c^n v}Q^{-1}\| \leq \text{cond}(D)\|q(J_{c^n v})\| = c^{n-1}\|q(J_{c^n v})\|.$$

Or, en appliquant l'inégalité de Von Neumann (question **16**) à la contraction $J_{c^n v}$ (cf. question **38**) et au polynôme q , on a

$$\|q(J_{c^n v})\| \leq \|q\|_{\mathbb{D}}.$$

Mais

$$\|q\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{D}(0, \cos(\pi/n))} \subset \mathcal{H}(J_v).$$

Donc

$$\|p(J_v)\| \leq \cos(\pi/n)^{1-n} \|p\|_{\mathcal{H}(J_v)}.$$

A nouveau, comme $n > 6$, on a : $\cos(\pi/n)^{1-n} \leq 2$, d'où :

$$\|p(J_v)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(J_v)} \text{ et } J_v \text{ vérifie la conjecture de Crouzeix.}$$

- Cas où $v = 0$.

Soit $(v_k)_k$ une suite dans $]0, 1]$ tendant vers 0.

Pour tout k , l'ensemble $\mathcal{H}(J_{v_k})$ est compact, donc il existe $z_k \in \mathcal{H}(J_{v_k})$ tel que

$$\|p\|_{\mathcal{H}(J_{v_k})} = |p(z_k)|.$$

Pour tout k , soit $a_k \in \Sigma$ (la sphère unité) tel que $z_k = \langle J_{v_k} a_k | a_k \rangle = z_k$.

Puisque Σ est compacte, il existe une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(a_{\varphi(k)})_k$

converge.

Soit $a \in \Sigma$ la limite. Alors, pour tout k ,

$$\|p(J_{v_{\varphi(k)}})\| \leq 2|p(\langle J_{\varphi(k)} a_{\varphi(k)} | a_{\varphi(k)} \rangle)|.$$

Lorsque k tend vers $+\infty$, $\|p(J_{v_{\varphi(k)}})\|$ tend vers $\|p(J_0)\|$ et $|p(\langle J_{\varphi(k)} a_{\varphi(k)} | a_{\varphi(k)} \rangle)|$ tend vers $|p(\langle J_0 a | a \rangle)|$, puisque toutes les fonctions mises en jeu sont continues.

L'inégalité est maintenue à la limite, d'où :

$$\|p(J_0)\| \leq 2|p(\langle J_0 a | a \rangle)|.$$

Alors, a fortiori,

$$\boxed{\|p(J_0)\| \leq 2\|p\|_{\mathcal{H}(J_0)} \text{ et } J_0 \text{ vérifie la conjecture de Crouzeix.}}$$

autrement dit, dans ce cas là également (où $v = 0$), J_0 vérifie la conjecture de Crouzeix.

Commentaires : la conjecture est vérifiée pour toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

La conjecture est démontrée pour $n = 2$ et dans le cas général elle est valable si on remplace la constante 2 par $1 + \sqrt{2}$