

CONCOURS ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES B

SESSION 2026 - FILIÈRES MP-MPI

m.laamoum2@gmail.com¹

Préliminaire

1) On résout la récurrence $u_n = \alpha u_{n-1} - u_{n-2}$, d'équation caractéristique $r^2 - \alpha r + 1 = 0$ (E), de discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4$.

- Si $|\alpha| > 2$.

(E) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$ et $r_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$. Donc $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Les

conditions $u_0 = 0, u_1 = 1$ donnent :
$$u_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{\sqrt{\alpha^2 - 4}}.$$

- Si $|\alpha| < 2$.

(E) admet deux racines complexes conjuguées $r = \frac{\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2}$ et $\bar{r}$.

Les conditions initiales donnent :
$$u_n = \frac{r^n - \bar{r}^n}{i\sqrt{4 - \alpha^2}}.$$

Posons $\alpha = 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi[$, d'où $r_1 = \bar{r}_2 = e^{i\theta}$.

On obtient l'expression réelle :
$$u_n = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

- Si $\alpha = 2$.

(E) admet une racine double $r = 1$ et
$$u_n = n.$$

- Si $\alpha = -2$.

(E) admet une racine double $r = -1$ et
$$u_n = n(-1)^{n-1}.$$

Première partie

2) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\frac{2k}{2n+1} = \frac{k}{n + \frac{1}{2}}$ donc $\frac{k}{n+1} \leq \frac{2k}{2n+1} \leq \frac{k}{n}$.

Et $\frac{k}{n+1} - \frac{k-1}{n} = \frac{n-k+1}{n(n+1)} \geq 0$, donc

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n+1} \leq \frac{2k}{2n+1} \leq \frac{k}{n}$$

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

Soit $\sigma = \left(\frac{k}{n}\right)_{0 \leq k \leq n}$ la partition régulière de $[0, 1]$ et les deux suite $\alpha = \left(\frac{k}{n+1}\right)_{1 \leq k \leq n}$ et $\beta = \left(\frac{2k}{2n+1}\right)_{1 \leq k \leq n}$.

Remarquons que

$$v_n = \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-1}) f(\alpha_k) \text{ et } w_n = \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-1}) f(\beta_k)$$

Donc ce sont des sommes de Riemann de f sur $[0, 1]$ relativement à la partition σ et aux poids α et β .

$v_n = R(f, \sigma, \alpha)$ et $w_n = R(f, \sigma, \beta)$.

f est continue sur $[0, 1]$ donc : $\boxed{v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt \text{ et } w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt}$

3)

3.a) Soit $a \in [0, 2[$, l'intégrale $I_a(f) = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx$ est bien définie.

On pose $x = 2\cos(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ avec $\theta_0 = \arccos(a/2)$: alors $dx = -2\sin(\theta) d\theta$ et $\sqrt{4-x^2} = 2\sin(\theta) \geq 0$ par suite

$$I_a(f) = \int_{\theta_0}^{\pi - \theta_0} f(2\cos(\theta)) d\theta$$

Cette intégrale admet une limite quand $a \rightarrow 2^-$ (i.e. $\theta_0 \rightarrow 0^+$). D'où la convergence de $I(f)$.

Ainsi par passage à la limite on obtient : $\boxed{I(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(2\cos(\theta)) d\theta}$.

3.b) On a $I(f_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2\cos(\theta))^n d\theta$ et $\boxed{I(f_0) = 1, I(f_1) = 0 \text{ et } I(f_2) = 2}$.

3.c) $I(f_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2\cos(\theta))^n d\theta$

- Si n est impair :

Par le changement $t \mapsto \pi - \theta$ on a : $I(f_n) = -I(f_n) = 0$.

- Si n pair ($n = 2p$) :

En utilisant la formule d'Euler :

$$(2\cos(\theta))^{2p} = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} (e^{i\theta})^k (e^{-i\theta})^{2p-k} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)\theta}$$

donc

$$I(f_{2p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(k-p)\theta} \right) d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \int_0^\pi e^{2i(k-p)\theta} d\theta$$

Si $k \neq p$, l'exposant $2k - 2p \neq 0$, donc $\int_0^\pi e^{2i(k-p)\theta} d\theta = 0$, par suite $I(f_{2p}) = \binom{2p}{p}$.

Ainsi $\boxed{I(f_n) = \begin{cases} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$.

4)

4.a) Puisque U_n est uniforme sur $\{1, \dots, n\}$:

$$\mathbb{E}\left(f\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Posons $h(t) = f(2\cos(\pi t))$, elle est continue sur $[0, 1]$. Alors la somme ci-dessus vaut $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n+1}\right)$, qui est exactement le terme " v_n " de la question 2 appliquée à h . Donc elle converge vers

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(2\cos(\theta)) d\theta = I(f)$$

d'où le résultat.

4.b) Fixons $y \in [-2, 2]$.

D'une part, comme " $\cos$ " est décroissante sur $[0, \pi]$, on a

$$2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) < y \Leftrightarrow \theta_0 < \frac{k\pi}{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)\theta_0}{\pi} < k \leq n \quad (\text{avec } \theta_0 := \arccos(y/2))$$

Donc :

$$\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) = \frac{1}{n} \left(n - \left\lfloor \frac{(n+1)\theta_0}{\pi} \right\rfloor\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\theta_0}{\pi} = \frac{\pi - \arccos(y/2)}{\pi}.$$

D'autre part, par le changement de variable $x = 2\cos(\theta)$ on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi - \arccos(y/2)}{\pi}$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}}.$

Deuxième Partie

5)

5.a) • Si $n = 2$.

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \chi_2(X) = X^2 - 1, \text{Sp}(T_2) = \{-1, 1\}.$$

• Si $n = 3$.

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \chi_3(X) = X(X^2 - 2), \text{Sp}(T_3) = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

5.b) Soit $n \geq 4$. On développe $\det(XI_n - T_n)$ par rapport à la première ligne :

$$\chi_n(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X\chi_{n-1}(X) + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}}_{(n-1) \times (n-1)} = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X)$$

D'où pour tout $n \geq 4$: $\boxed{\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X)}.$

5.c) Soit α un réel tel que $|\alpha| < 2$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que pour $n \geq 3$, $u_n = \chi_{n-1}(\alpha)$.

Donc elle qui vérifie : $u_n = \alpha u_{n-1} - u_{n-2}$, $u_3 = \alpha^2 - 1$ et $u_4 = \alpha(\alpha^2 - 2)$.

On a alors : $u_2 = \alpha u_3 - u_4 = \alpha$, $u_1 = \alpha u_2 - u_3 = 1$ et $u_0 = \alpha u_1 - u_2 = 0$.

D'après Q.1 on a pour $n \geq 2$:

$$\chi_n(\alpha) = u_{n+1} = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

5.d) Posons $A = \frac{\alpha}{2}$ et $B = \frac{i\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned} \chi_n(\alpha) &= \frac{1}{2B} [(A+B)^{n+1} - (A-B)^{n+1}] \\ &= \frac{1}{2B} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^{n+1-k} B^k - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^{n+1-k} (-B)^k \right] \\ &= \frac{1}{B} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} A^{n-2j} B^{2j+1} \end{aligned}$$

donc

$$\chi_n(\alpha) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{n-2j} \left(\frac{\alpha^2 - 4}{4} \right)^j$$

La relation est vraie pour une infinité de réelles donc

$$\chi_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} \left(\frac{X}{2} \right)^{n-2j} \left(\frac{X^2 - 4}{4} \right)^j$$

En développant $(X^2 - 4)^j$ par le binôme, on obtient :

$$\chi_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{m=0}^j \binom{n+1}{2j+1} \binom{j}{m} (-4)^{j-m} X^{n-2(j-m)} \stackrel{k=j-m}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \binom{n+1}{2j+1} \binom{j}{k} (-4)^k X^{n-2k}$$

• Si $n = 2p$:

$$\chi_{2p}(X) = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^j \binom{2p+1}{2j+1} \binom{j}{k} (-4)^k X^{2(p-k)} = \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=k}^p \binom{2p+1}{2j+1} \binom{j}{k} (-4)^k \right) X^{2(p-k)}$$

Ce qui s'écrit

$$\chi_{2p}(X) = \sum_{k=0}^p \left(\frac{(-1)^{p-k}}{2^{2k}} \sum_{j=k}^p \binom{2p+1}{2j+1} \binom{j}{p-k} \right) X^{2k}$$

• Si $n = 2p+1$:

$$\chi_{2p+1}(X) = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^j \binom{2p+2}{2j+1} \binom{j}{k} (-4)^k X^{2(p-k)+1} = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^p \left(\sum_{j=k}^p \binom{2p+2}{2j+1} \binom{j}{k} (-4)^k \right) X^{2(p-k)+1}$$

Ce qui s'écrit

$$\chi_{2p+1}(X) = \sum_{k=0}^p \left(\frac{(-1)^{p-k}}{2^{2k+1}} \sum_{j=k}^p \binom{2p+2}{2j+1} \binom{j}{p-k} \right) X^{2k+1}$$

Ainsi les coefficients a_k de χ_n s'écrivent :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } n = 2p : & a_{2k+1} = 0 \text{ et } a_{2k} = \frac{(-1)^{p-k}}{2^{2k}} \sum_{j=k}^p \binom{2p+1}{2j+1} \binom{j}{p-k} \\ \text{Si } n = 2p+1 : & a_{2k} = 0 \text{ et } a_{2k+1} = \frac{(-1)^{p-k}}{2^{2k+1}} \sum_{j=k}^p \binom{2p+2}{2j+1} \binom{j}{p-k} \end{array}$$

6) Comme dans la question 1. on pose $\alpha = 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0, \pi[$, ce qui donne (notation de 5.c) :

$$\chi_n(\alpha) = u_{n+1} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

On a $\chi_n(\alpha) = 0$ si et seulement si $(n+1)\theta = k\pi$, soit $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (excluant $k = 0$ et $k = n+1$ qui donnent $\alpha = \pm 2$).

On obtient n valeurs propres distinctes : $\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

7) Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$ on a $m_\lambda = 1$. Donc :

$$S_f(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Par la question Q2, appliquée à la fonction $h : x \mapsto f(2\cos(\pi x))$ $x \in [0, 1]$, $S_f(T_n)$ converge vers

$$\int_0^1 f(2\cos(\pi x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(2\cos(\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

8)

8.a) On a $T_n(a, b, c) = aI_n + T_n(0, b, c)$. Les valeurs propres de $T_n(a, b, c)$ sont $a + \mu$ où μ parcourt $\text{Sp}(T_n(0, b, c))$.

8.b) Le cas $bc = 0$ est trivial. Supposons $bc \neq 0$.

On cherche une matrice diagonale inversible $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ telle que les matrices $T_n(0, b, c)$ et $T_n(0, bc, 1)$ soient semblables.

Posons $T_n(0, b, c) = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D^{-1}T_n(0, b, c)D = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a $\gamma_{i,j} = d_i^{-1}d_j t_{i,j}$.

Pour avoir $D^{-1}T_n(0, b, c)D = T_n(0, bc, 1)$, il suffit que :

- Sur la sur-diagonale ($j = i+1$) : $d_i^{-1}d_{i+1}b = bc$ (1).
- Sur la sous-diagonale ($j = i-1$) : $d_i^{-1}d_{i-1}c = 1$ (2).

La relation (2) donne $d_i = cd_{i-1}$. En fixant $d_1 = 1$, on obtient $d_i = c^{i-1}$.

Dans ce cas on a bien $d_i^{-1}d_{i+1}b = bc$. Ce qui prouve que $(T_n(0, b, c))$ et $T_n(0, bc, 1)$ sont semblables.

Par suite $\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))$. Ainsi $\boxed{\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{a + \mu \mid \mu \in \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))\}}$.

8.c) D'après Q.8b, pour toute (β, γ) , $\text{Sp}(T_n(0, \beta, \gamma)) = \text{Sp}(T_n(0, \beta\gamma, 1))$. En particulier pour $\beta = \gamma = \sqrt{bc}$ on a : $\text{Sp}(T_n(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})) = \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))$, par suite :

$$\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \text{Sp}(T_n(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}))$$

On a $T_n(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) = \sqrt{bc}T_n(0, 1, 1)$ donc $\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \sqrt{bc}.\text{Sp}(T_n(0, 1, 1))$.

D'après Q.6 on a $\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \left\{2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\right\}$.

Ainsi $\boxed{\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \left\{a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\right\}}$.

9)

9.a) D'après Q.8c,

$$S_f(T_n(a, b, c)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

La question 4a appliquée à la fonction $g(x) = f(a + \sqrt{bc}x)$, qui est continue, donne :

$$S_f(T_n(a, b, c)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(a + \sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

9.b) Soit U_n une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, on a égalité des événements

$$\left[a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{U_n \pi}{n+1}\right) < y \right] = \left[2\cos\left(\frac{U_n \pi}{n+1}\right) < \frac{y-a}{\sqrt{bc}} \right]$$

Posons $y_0 = \frac{y-a}{\sqrt{bc}}$. Donc

$$\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{U_n \pi}{n+1}\right) < y_0\right) = \mathbb{P}\left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{U_n \pi}{n+1}\right) < y\right) = \frac{q_n(y)}{n}$$

Discutons suivant les valeurs de y :

- Si $y_0 \in]-2, 2]$:

Donc $y \in]a - 2\sqrt{bc}, a + 2\sqrt{bc}]$ et d'après Q.4b :

$$\mathbb{P}\left(2\cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y_0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Par le changement de variable $x = 2\cos(\theta)$ on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-2}^{y_0} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi - \arccos(y_0/2)}{\pi}$$

donc

$$\frac{q_n(y)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi - \arccos(y_0/2)}{\pi} \quad (\neq 0)$$

ce qui donne

$$q_n(y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi - \arccos(y_0/2)}{\pi} . n$$

- Si $y_0 \in]-\infty, -2]$:

Donc $y \in]-\infty, a - 2\sqrt{bc}]$ et dans ce cas $q_n(y) = 0$.

- Si $y_0 \in]2, +\infty[$:

Donc $y \in]a + 2\sqrt{bc}, +\infty[$ et dans ce cas $q_n(y) = n$

Ainsi

Si $y \leq a - 2\sqrt{bc}$	alors $q_n(y) = 0$
Si $a - 2\sqrt{bc} < y \leq a + 2\sqrt{bc}$	alors $q_n(y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{y-a}{\sqrt{bc}}\right)\right) . n$
Si $a + 2\sqrt{bc} < y$	alors $q_n(y) = n$

Troisième partie

10)

10.a) Soit $\kappa \in [0, 1/2[$:

- Sur $[0, \kappa]$:

Soit $x \in [0, \kappa]$. On a $0 \leq x^n \leq \kappa^n$, donc $0 \leq 1 - Q_n(x) \leq 1 - Q_n(\kappa)$ par suite $\max_{x \in [0, \kappa]} |1 - Q_n(x)| \leq 1 - Q_n(\kappa)$.

Comme $0 \leq 2\kappa < 1$ alors

$$1 - Q_n(\kappa) = 1 - \exp(2^n \ln(1 - \kappa^n)) = 1 - \exp(-(2\kappa)^n + o((2\kappa)^n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $\max_{x \in [0, \kappa]} |1 - Q_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\boxed{Q_n \xrightarrow{CVU} 1 \text{ sur } [0, \kappa]}$.

- Sur $[1 - \kappa, 1]$:

Pour $x \in [1 - \kappa, 1]$ on a $0 \leq 1 - x^2 \leq 1 - (1 - \kappa)^2$.

Puisque $0 \leq \kappa < \frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{4} < (1 - \kappa)^2 \leq 1$ et $0 \leq 1 - (1 - \kappa)^2 < \frac{3}{4}$. Alors $0 \leq Q_n(x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $\boxed{Q_n \xrightarrow{CVU} 0 \text{ sur } [1 - \kappa, 1]}$.

10.b) Soit $0 < \eta \leq 1$. On a $P_n(x) = Q_n(\frac{1-x}{2})$.

- Si $x \in [\eta, 1]$ alors $\frac{1-x}{2} \in [0, \frac{1-\eta}{2}]$. Puisque $\frac{1-\eta}{2} < \frac{1}{2}$ alors (par 10.a) $P_n \xrightarrow{CVU} 1$ sur $[\eta, 1]$.
- Si $x \in [-1, -\eta]$ alors $\frac{1-x}{2} \in [\frac{1+\eta}{2}, 1]$. Puisque $\frac{1+\eta}{2} = 1 - \frac{1-\eta}{2}$ alors (par 10.a) $P_n \xrightarrow{CVU} 0$ sur $[-1, -\eta]$.

Donc P_n converge uniformément sur $[-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]$ vers la restriction de H sur $[-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]$.

11) On suppose $f(-1) = 0$ et f continue sur $[-1, 1]$. Donc f est uniformément continue sur $[-1, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - y| \leq \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Choisissons $N = \max(1, \lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor) \geq 1$, donc

$\frac{2}{N+1} \leq \alpha$. Posons pour $i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, $c_i = -1 + \frac{2i}{N+1}$, c'est la subdivision régulière d'ordre $N+1$ de $[-1, 1]$. On a donc $c_0 = -1 < c_1 < c_2 < \dots < c_N < 1 = c_{N+1}$ avec $0 \leq c_{i+1} - c_i \leq \alpha$. Posons $a_i = f(c_i) - f(c_{i-1})$ pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Par continuité uniforme : $|a_i| = |f(c_i) - f(c_{i-1})| \leq \varepsilon$, donc $(a_1, \dots, a_N) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$.

Pour $x \in [-1, 1[$ il existe $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tel que $x \in [c_j, c_{j+1}[$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) &= f(x) - \sum_{i=1}^j \underbrace{a_i H(x - c_i)}_{=1} - \sum_{i=1}^N \underbrace{a_i H(x - c_i)}_{=0} \\ &= f(x) - \sum_{i=1}^j f(c_i) - f(c_{i-1}) \\ &= f(x) - f(c_j) \quad (\text{car } f(-1) = 0) \end{aligned}$$

Pour $x = 1$ on a

$$f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) = f(x) - f(c_N)$$

Comme $|x - c_j| \leq |c_{j+1} - c_j| \leq \alpha$, donc

$$|f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i)| = |f(x) - f(c_j)| \leq \varepsilon$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in [-1, 1], \left| f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon} .$

12) Soit $\varepsilon > 0$. Si $f(-1) \neq 0$, quitte à changer f par $f - f(-1)$, on suppose donc $f(-1) = 0$.

D'après Q.11, il existe N , $c_0 = -1 < c_1 < c_2 < \dots < c_N < 1 = c_{N+1}$ ($c_i = -1 + \frac{2i}{N+1}$) et $(a_i) \in [-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}]^N$ tels que :

$$|f(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (1)$$

avec $F(x) = \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) .$

Soit $0 < \eta < \frac{1}{3} \min_{1 \leq i \leq N+1} (c_i - c_{i-1}) (= \frac{2}{3(N+1)})$. Les intervalles $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ sont donc deux à deux disjoints.

Posons $P = \sum_{i=1}^N a_i P_n(x - c_i)$. Ecrivons $|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - F(x)| + |F(x) - P(x)|$

Par la question Q10.b, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\sup_{[-1, 1] \setminus [c_i - \eta, c_i + \eta]} |P_n(x - c_i) - H(x - c_i)| \leq \frac{1}{N}$$

Soit $x \in [-1, 1]$ il existe $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tel que $x \in [c_j, c_{j+1}]$, donc $x \notin \bigcup_{i \neq j, i \neq j+1} [c_i - \eta, c_i + \eta]$, on a :

$$|F(x) - P(x)| \leq \sum_{i=j}^{j+1} |a_i| \cdot |P_n(x - c_i) - H(x - c_i)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, i \neq j+1}}^N |a_i| \cdot |P_n(x - c_i) - H(x - c_i)|$$

La deuxième somme se majore par

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j, i \neq j+1}}^N |a_i| \cdot |P_n(x - c_i) - H(x - c_i)| \leq \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

Comme $x \in [c_j, c_{j+1}]$ alors

$$\sum_{i=j}^{j+1} |a_i| \cdot |P_n(x - c_i) - H(x - c_i)| = |a_j| \cdot |P_n(x - c_j) - 1| + |a_{j+1}| \cdot |P_n(x - c_{j+1})|$$

et on a

$$\frac{1 - (x - c_j)}{2} \in \left[\frac{1 - (c_{j+1} - c_j)}{2}, \frac{1}{2} \right] \subset [0, 1]$$

et

$$\frac{1 - (x - c_{j+1})}{2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1 + (c_{j+1} - c_i)}{2} \right] \subset [0, 1]$$

Or $P_n(x) = Q_n(\frac{1-x}{2})$ et $Q_n([0, 1]) \subset [0, 1]$ donc $|P_n(x - c_j) - 1| \leq 1$ et $|P_n(x - c_{j+1})| \leq 1$, par suite

$$\sum_{i=j}^{j+1} |a_i| \cdot |P_n(x - c_i) - H(x - c_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3).$$

par les inégalités (2) et (3) on a

$$|F(x) - P(x)| \leq \frac{3\varepsilon}{4} \quad (4)$$

Les inégalités (1) et (4) donnent $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in [-1, 1], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon} .$

Quatrième partie

Les variables aléatoires $(W_{i,j})_{1 \leq i \leq j}$ sont indépendantes, de même loi de probabilité et centrées et réduites.

Donc pour tout $1 \leq i \leq j$ on a : $\mathbb{E}(W_{i,j}) = \mathbb{E}(W_{1,1}) = 0$, $\mathbb{E}(W_{i,j}^2) = \mathbb{E}(W_{1,1}^2) = 1$, $\mathbb{V}(W_{i,j}) = \mathbb{V}(W_{1,1}) = 1$ et $|W_{i,j}|^k$ est d'espérance finie pour tout entier $k \geq 0$.

13)

13.a) On sait que, pour toute matrice M ; $\text{Tr}(M^k) = \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} m_\lambda \lambda^k$.

Comme X_n est symétrique réelle, elle est diagonalisable et $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}$. Donc :

$$S_n(f_k) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m) \in \text{Sp}(X_n)} m \lambda^k = \frac{1}{n} \text{Tr}(X_n^k).$$

13.b) Par le changement $x = 2\cos(\theta)$:

$$\Sigma(f_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2^{k+1}}{\pi} \int_0^\pi \cos^k(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = \frac{2^{k+1}}{\pi} \int_0^\pi \cos^k(\theta) d\theta - \frac{2^{k+1}}{\pi} \int_0^\pi \cos^{k+2}(\theta) d\theta.$$

D'après Q.3.b on a $\Sigma(f_k) = 2I(f_k) - \frac{1}{2}I(f_{k+2})$ avec $I(f_n) = \begin{cases} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Donc

$$\Sigma(f_k) = \begin{cases} 2\binom{k}{k/2} - \frac{1}{2}\binom{k+2}{k/2+1} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi $\Sigma(f_k) = \begin{cases} \frac{2}{k+2} \binom{k}{k/2} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}.$

13.c) • Si $k = 0$.

On a $S_n(f_0) = \frac{1}{n} \text{Tr}(I_n) = 1$ et $\Sigma(f_0) = 1$. Donc (H_0) est vérifiée.

• Si $k = 1$.

$S_n(f_1) = \frac{1}{n} \text{Tr}(X_n) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n W_{i,i}$. Or $\mathbb{E}(W_{i,i}) = 0$, donc $\mathbb{E}(S_n(f_1)) = 0 = \Sigma(f_1)$.

$\mathbb{E}[S_n(f_1)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n W_{i,i}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3} \sum_{i,j} \mathbb{E}[W_{i,i}W_{j,j}]$. Comme les variables sont indépendantes, centrées et réduites, alors $\mathbb{E}[W_{i,i}W_{j,j}] = \delta_{i,j} \mathbb{E}[W_{i,i}^2] = \delta_{i,j}$. D'où $\mathbb{E}[S_n(f_1)^2] = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \Sigma(f_1)^2$ et (H_1) est vérifiée.

• Si $k = 2$.

On a $S_n(f_2) = \frac{1}{n} \text{Tr}(X_n^2) = \frac{1}{n} \sum_{i,j} X_{i,j}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} W_{i,j}^2$.

$$\mathbb{E}[S_n(f_2)] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{E}[W_{i,j}^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{E}[W_{1,1}^2] = \frac{1}{n^2} n^2 \mathbb{E}[W_{1,1}^2] = 1$$

Comme $\Sigma(f_2) = 1$ alors $\mathbb{E}[S_n(f_2)] = \Sigma(f_2)$.

Les variables $(W_{i,j})_{1 \leq i \leq j}$ sont indépendantes donc $(W_{i,j}^2)_{1 \leq i \leq j}$ le sont aussi, ce qui donne pour la variance

$$\mathbb{V}(S_n(f_2)) = \frac{1}{n^4} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{V}(W_{i,j}^2) \right) = \frac{\mathbb{V}(W_{1,1}^2)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\mathbb{V}(W_{i,j}^2) = \mathbb{V}(W_{1,1}^2))$$

On en déduit que : $\mathbb{E}[S_n(f_2)^2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[S_n(f_2)]^2 = 1 = \Sigma(f_2)^2$.

L'hypothèse (H_2) est vérifiée.

14) Soit $\varepsilon > 0$, $B > 0$ et $k \geq 0$. Soit $g_{k,B}(x) = |x|^k \mathbb{1}_{|x| > B}$.

On a $S_n(g_{k,B}) = \frac{1}{n} \sum_{|\lambda_i| > B} |\lambda_i|^k \geq 0$.

Comme $|\lambda_i| > B$, alors $|\lambda_i|^k = \frac{|\lambda_i|^{2k}}{|\lambda_i|^k} \leq \frac{\lambda_i^{2k}}{B^k}$. Par suite $S_n(g_{k,B}) \leq \frac{1}{B^k} S_n(f_{2k})$

Par l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(g_{k,B}))}{\varepsilon} \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}$.

15) Soit $\varepsilon > 0$, $B > 4$ et $k \geq 0$.

Pour tout $k' \geq k$ on a $g_{k,B} \leq g_{k',B}$ donc $S_n(g_{k,B}) \leq S_n(g_{k',B})$ ce qui donne l'inclusion des événements :

$$[S_n(g_{k',B}) < \varepsilon] \subset [S_n(g_{k,B}) < \varepsilon] \text{ et } [S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon] \subset [S_n(g_{k',B}) \geq \varepsilon]$$

par suite $\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(S_n(g_{k',B}) \geq \varepsilon)$.

Donc pour tout $k' \geq k$

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k'}))}{\varepsilon B^{k'}}.$$

Soit $k' \geq k$. D'après $(H_{k'})$ on a

$$\mathbb{E}(S_n(f_{2k'})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma(f_{2k'}) \quad (1)$$

Or $\Sigma(f_{2k'}) = \frac{1}{k' + 1} \binom{2k'}{k'}$. La formule de Stirling donne $\Sigma(f_{2k'}) \underset{k' \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^{k'}}{k'^{3/2} \sqrt{\pi}}$, par suite $\frac{\Sigma(f_{2k'})}{\varepsilon B^{k'}} \underset{k' \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4/B)^{k'}}{\varepsilon k'^{3/2} \sqrt{\pi}}$ qui tend vers 0 quand $k' \rightarrow +\infty$.

Donc pour $\varepsilon' > 0$ il existe $k_0 \geq k$ tel que si $k' \geq k_0$ alors $\frac{\Sigma(f_{2k'})}{\varepsilon B^{k'}} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ (2).

Soit $k' \geq k_0$ fixé tel que $\varepsilon B^{k'} > 1$. De (1) on a : il existe $n_0 \geq 0$ tel que si $n \geq n_0$ alors $|\mathbb{E}(S_n(f_{2k'})) - \Sigma(f_{2k'})| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$.

Donc pour $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\Sigma(f_{2k'}) + \frac{\varepsilon'}{2}}{\varepsilon B^{k'}} \leq \varepsilon'$$

Ainsi $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists n_0 \geq 0$ | $n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \varepsilon'$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) = 0$.

16) Soit $\varepsilon > 0$ et $k \geq 0$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n(f_k))}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}(S_n(f_k)^2) - \mathbb{E}(S_n(f_k))^2}{\varepsilon^2}.$$

Par (H_k) et la question 13a : $\mathbb{E}(S_n(f_k)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma(f_k)$ et $\mathbb{E}(S_n(f_k)^2) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^k)^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma(f_k)^2$.

Donc $\mathbb{V}(S_n(f_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) = 0$.

17) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-B, B]$ avec $B > 4$.

Soit $\varepsilon > 0$.

17.a) • D'après le théorème de Weierstrass (question Q12), il existe un polynôme $\tilde{P} \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(Bx) - \tilde{P}(x)| \leq \varepsilon/4.$$

Posons $P(x) = \tilde{P}(x/B)$ alors $\sup_{x \in [-B, B]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon/8.$

- On décompose la différence $S_n(f) - \Sigma(f)$ en utilisant le polynôme P comme intermédiaire :

$$S_n(f) - \Sigma(f) = \underbrace{S_n(f) - S_n(P\mathbb{1}_{|x| \leq B})}_{A1} - \underbrace{S_n(P\mathbb{1}_{|x| > B})}_{A2} + \underbrace{S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))}_{A3} + \underbrace{\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(f)}_{A4}$$

- Comme on a $[-2, 2] \subset [-B, B]$, alors :

$$|\Sigma(f) - \Sigma(P)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-2}^2 (f(x) - P(x)) \sqrt{4 - x^2} dx \right| \leq \Sigma(f_0) \sup_{x \in [-B, B]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad (1)$$

Par linéarité de l'espérance et de la trace, et d'après l'hypothèse (H_k) , on sait que $\mathbb{E}[S_n(P)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma(P).$

Il existe donc un entier N tel que pour tout

$$\forall n \geq N, |\mathbb{E}[S_n(P)] - \Sigma(P)| \leq \frac{\varepsilon}{8} \quad (2)$$

Ainsi, par (1) et (2), on a pour $n \geq N$

$$|A4| = |\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(f)| \leq |\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(P)| + |\Sigma(P) - \Sigma(f)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Puisque f est nulle hors de $[-B, B]$, on a $S_n(f) = S_n(f\mathbb{1}_{|x| \leq B})$ donc $S_n(f) - S_n(P\mathbb{1}_{|x| \leq B}) = S_n((f - P) \cdot \mathbb{1}_{|x| \leq B}).$

Par suite:

$$|A1| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(\lambda_i) - P(\lambda_i)| \cdot \mathbb{1}_{|\lambda_i| \leq B} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [-B, B]} |f(x) - P(x)| \cdot \mathbb{1}_{|\lambda_i| \leq B} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

- On obtient donc

$$|S_n(f) - \Sigma(f)| \leq |A1| + |A2| + |A3| + |A4| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |S_n(P\mathbb{1}_{|x| > B})| + |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))|$$

L'inclusion des événements

$$\left[|S_n(P\mathbb{1}_{|x| > B})| < \frac{\varepsilon}{4} \right] \cap \left[|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| < \frac{\varepsilon}{4} \right] \subset \left[|S_n(f) - \Sigma(f)| < \varepsilon \right]$$

entraîne :

$$\left[|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon \right] \subset \left[|S_n(P\mathbb{1}_{|x| > B})| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right] \cup \left[|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right]$$

$$\text{Ainsi : } \mathbb{P}\left(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|S_n(P\mathbb{1}_{|x| > B})| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) + \mathbb{P}\left(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

17.b) • Si $P = \sum_{k=0}^r a_k f_k$ alors

$$|P\mathbb{1}_{|x| > B}(\lambda)| = \left| \sum_{k=0}^r a_k \left(\lambda^k \mathbb{1}_{|x| > B} \right) \right| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| g_{k,B}(\lambda)$$

et

$$|S_n(P\mathbb{1}_{|x| > B})| \leq \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda |P\mathbb{1}_{|x| > B}(\lambda)| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| \left(\frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda g_{k,B}(\lambda) \right) = \sum_{k=0}^r |a_k| S_n(g_{k,B}).$$

On a

$$\bigcap_{\substack{0 \leq k \leq r \\ a_k \neq 0}} \left[S_n(g_{k,B}) < \frac{\varepsilon}{4|a_k|(r+1)} \right] \subset \left[|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| < \frac{\varepsilon}{4} \right]$$

donc

$$\left[|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right] \subset \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq r \\ a_k \neq 0}} \left[S_n(g_{k,B}) \geq \frac{\varepsilon}{4|a_k|(r+1)} \right]$$

par suite

$$\mathbb{P}\left(|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ a_k \neq 0}} \mathbb{P}\left(S_n(g_{k,B}) \geq \frac{\varepsilon}{4|a_k|(r+1)}\right)$$

D'après Q.15, on a pour tout $k, \alpha > 0$ et $B > 4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \alpha) = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0$$

- On a $|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \leq \sum_{k=0}^r |a_k| \cdot |S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))|$

Par la même méthode, que le cas précédent, on a

$$\mathbb{P}\left(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq r \\ a_k \neq 0}} \mathbb{P}\left(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \frac{\varepsilon}{4|a_k|(r+1)}\right)$$

D'après Q.16, on a tout $k, \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \alpha\right) = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0$$

Ainsi, d'après Q.17.a, on a $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon\right) = 0}$.