

X 2026

Épreuve de mathématiques B, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $r^2 - \alpha r + 1 = 0$ ayant pour discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4$, on en déduit que :

— si $|\alpha| > 2$, alors $\Delta > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ est combinaison linéaire de suites géométriques de raisons respectives $r_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = ar_1^n + br_2^n,$$

où la condition $(u_0, u_1) = (0, 1)$ permet d'expliciter (a, b) et d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2};$$

— si $|\alpha| = 2$, alors $\Delta = 0$ et on trouve de même, en posant $r = \frac{\alpha}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = nr^{n-1} = \begin{cases} n & \text{si } \alpha = 2, \\ n(-1)^{n-1} & \text{si } \alpha = -2; \end{cases}$$

— si $|\alpha| < 2$, on trouve la même expression que dans le cas $|\alpha| > 2$, mais en posant $r_1 = \frac{\alpha + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{\alpha - i\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Première Partie

2. La limite de $(v_n)_{n \geq 1}$ résulte du théorème sur les sommes de Riemann, avec la subdivision régulière de $[0, 1]$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n+1}\right) = \int_0^1 f,$$

et $(v_n)_{n \geq 1}$ ne diffère de cette somme que d'un terme, à savoir $\frac{f(0)}{n+1}$, qui converge vers 0 (noter aussi que l'on a : $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$). On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f.$$

Pour démontrer que $(w_n)_{n \geq 1}$ a même limite, il suffit de démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n) = 0$. Faisons. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, le théorème de Heine assure qu'elle est uniformément continue. Soit $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f associé à ε , et soit n au voisinage de l'infini, de sorte que :

$$\frac{1}{2n+1} \leq \eta.$$

On a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\left| \frac{k}{n+1} - \frac{2k}{2n+1} \right| = \frac{2k}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{1}{2n+1} \leq \eta,$$

et donc :

$$|v_n - w_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k}{n+1}\right) - f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon = \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n) = 0,$$

d'où le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \int_0^1 f.$$

Remarque. Le résultat reste valable si f est continue par morceaux (même s'il faut être plus soigneux, puisque le théorème de Heine n'est plus valable).

3. (a) Par composition, l'application $\theta \mapsto f(2 \cos(\theta))$ est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale $\int_0^\pi f(2 \cos(\theta)) d\theta$ converge.

Effectuons alors le changement de variable $x = 2 \cos(\theta)$, ou de manière équivalente $\theta = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ (on intègre sur $[0, \pi]$). L'application $\varphi : x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $] -2, 2[$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$. Comme

les changements de variable préservent la nature des intégrales, on en déduit que les intégrales :

$$\int_{-2}^2 f(x) \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = - \int_{-2}^2 f(2 \cos(\varphi(x))) \varphi'(x) dx$$

et $\int_\pi^0 f(2 \cos(\theta)) d\theta$ ont même nature : elles convergent donc et on a :

$$\int_{-2}^2 f(x) \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = - \int_\pi^0 f(2 \cos(\theta)) d\theta = \int_0^\pi f(2 \cos(\theta)) d\theta,$$

d'où le résultat.

- (b) Par la question précédente, on a :

$$I(f_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta = 1, \quad I(f_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta = 0,$$

et :

$$I(f_2) = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi (\cos(\theta))^2 d\theta = \frac{2}{\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^\pi = 2.$$

- (c) Nous effectuons une distinction de cas, selon que n soit pair ou impair.

Si n est impair, alors le changement de variable $u = \theta - \frac{\pi}{2}$ permet de reconnaître l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 :

$$I(f_n) = \frac{2^n}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^n du = 0.$$

Si n est pair, disons de la forme $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$, alors par la formule d'Euler puis la formule du binôme de Newton on a :

$$I(f_n) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{-i(2m-k)\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \int_0^\pi e^{2i(k-m)\theta} d\theta,$$

or on a classiquement :

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2i\ell\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc seul le terme correspondant à $k = m$ donne une contribution non nulle à l'intégrale $I(f_n)$:

$$I(f_n) = \binom{2m}{m}.$$

En conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(f_n) = \begin{cases} \binom{n}{n/2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par le théorème de transfert (utilisable sans réserve puisque les variables aléatoires en jeu sont à support fini), on a :

$$\mathbb{E} \left(f \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) = \sum_{k=1}^n f \left(2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right) \mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right).$$

La fonction $x \mapsto f(2 \cos(\pi x))$ étant continue sur $[0, 1]$, on peut utiliser la question 2 (on reconnaît la suite $(v_n)_{n \geq 1}$). On en déduit :

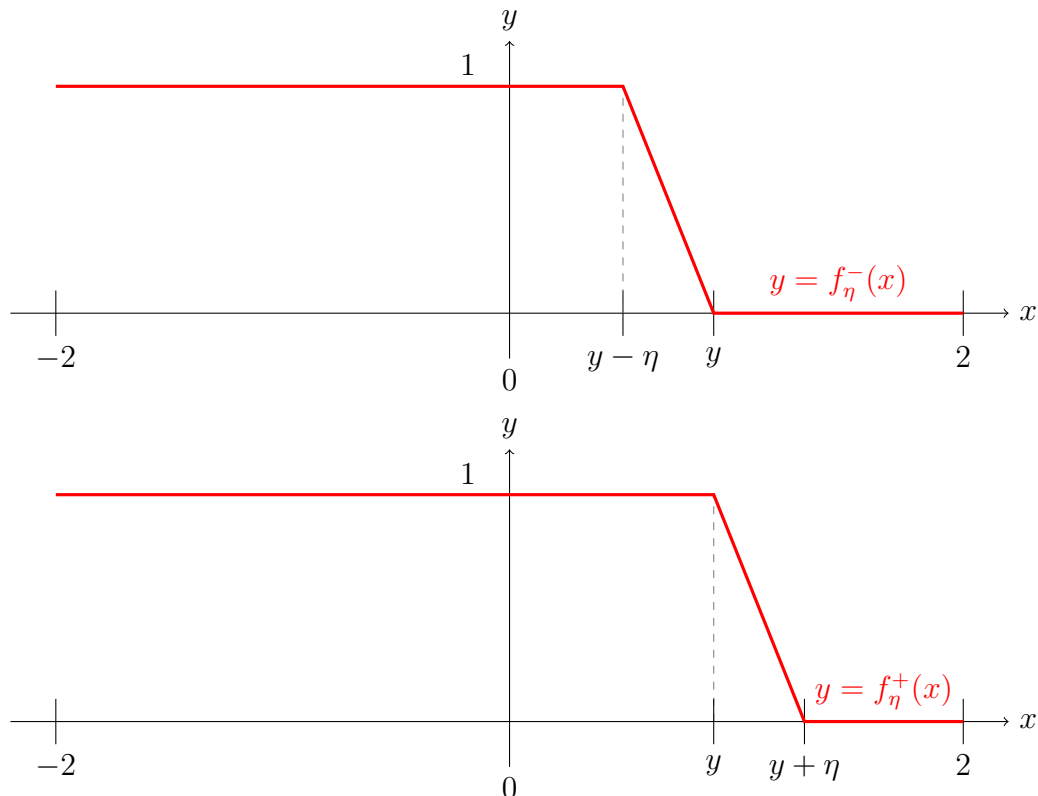
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(f \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) &= \int_0^1 f(2 \cos(\pi x)) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(2 \cos(\theta)) \, d\theta \\ &\stackrel{(q. 3.(a))}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} \, dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- (b) Soit $y \in [-2, 2]$. Comme :

$$\mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(2 \cos(\frac{\pi U_n}{n+1}) < y)} \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[-2, y[} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right),$$

on aimerait utiliser la question précédente avec la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[-2, y[}$. Le problème est qu'elle n'est pas continue. On y remédie par approximation. Supposons d'abord $y \in]-2, 2[$. Pour tout $\eta > 0$ suffisamment petit (pour avoir $y - \eta \in [-2, 2]$ et $y + \eta \in [-2, 2]$), considérons les applications f_η^- et f_η^+ dont les graphes sont ci-dessous :



Leur description analytique n'a pas d'importance. On remarque que l'on a :

$$f_{\eta}^{-} \leq \mathbb{1}_{[-2, y[} \leq f_{\eta}^{+}$$

et elles sont continues : cela motive leur construction. Par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E} \left(f_{\eta}^{-} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) \leq \mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) \leq \mathbb{E} \left(f_{\eta}^{+} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right).$$

Or, par la question précédente, pour tout $\circ \in \{-, +\}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(f_{\eta}^{\circ} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f_{\eta}^{\circ}(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (*)$$

et :

$$\left| \int_{-2}^2 \frac{f_{\eta}^{\circ}(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx - \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \right| \leq \left| \int_y^{y \pm \eta} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \right| \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \quad (\dagger)$$

Ce dernier calcul de limite résulte, par exemple, de la continuité de $\eta \mapsto \int_y^{y \pm \eta} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ au voisinage de 0 (par le théorème fondamental de l'analyse). Pour $y = \pm 2$ plus tard, on justifiera que cette limite est nulle par la convergence des intégrales $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ et

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$: elle découle de la question 3.(a) avec $f = 1$.

Voyons comment conclure. Soit $\varepsilon > 0$. Par $(\dagger)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\circ \in \{-, +\}$ on ait :

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-2}^2 \frac{f_{\eta}^{\circ}(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx - \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \right| \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel η . Par $(*)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $\circ \in \{-, +\}$, on ait :

$$\left| \mathbb{E} \left(f_{\eta}^{\circ} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f_{\eta}^{\circ}(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx \right| \leq \varepsilon.$$

L'encadrement ci-dessus implique alors :

$$\int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 2\varepsilon \leq \mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) \leq \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + 2\varepsilon.$$

On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) - \frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \right| \leq 2\varepsilon,$$

d'où le résultat si $y \neq \pm 2$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Si $y = 2$, on reprend le même raisonnement, mais en remplaçant f_{η}^{+} par la fonction constante égale à 1. De même si $y = -2$, en remplaçant f_{η}^{-} par 0 (on peut aussi faire le calcul exact des probabilités dans ce cas particulier, et trouver $0 = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ si

$y = -2$, $1 = I(f_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ si $y = 2$).

Remarque. On pouvait aussi traiter cette question en vérifiant directement que les questions précédentes s'adaptent au cas des fonctions continues par morceaux. Pour la première limite calculée dans la question 2, c'est au programme ; pour le changement de variable de la question 3.(a), également. Il faut s'assurer que $x \mapsto f(2 \cos(\pi x))$ reste continue par morceaux si f l'est, dans la question 4.(a) : c'est loin d'être insurmontable grâce à la continuité et stricte décroissance du cosinus sur $[0, \pi]$.

Deuxième Partie

5. (a) On trouve :

n	χ_n	$\text{Sp}(T_n)$
2	$X^2 - 1$	$\{(-1, 1), (1, 1)\}$
3	$X^3 - 2X$	$\{(0, 1), (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1)\}$

(b) Soit $n \geq 4$. On développe χ_n par rapport à la première colonne, puis suivant la première ligne du déterminant obtenu à la deuxième étape :

$$\chi_n = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X\chi_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathbf{0} & & -1 & X \end{vmatrix} \\ = X\chi_{n-1} - \chi_{n-2},$$

ce qui fournit la relation de récurrence demandée :

$$\chi_n - X\chi_{n-1} + \chi_{n-2} = 0.$$

(c) La suite $(\chi_n(\alpha))_{n \geq 2}$ vérifie la relation de récurrence de la question 1, mais avec des conditions initiales légèrement différentes. Pas bien grave ; on sait en effet que toutes les suites qui conviennent sont de la forme :

$$\left(a \left(\frac{\alpha + i\sqrt{\delta}}{2} \right)^n + b \left(\frac{\alpha - i\sqrt{\delta}}{2} \right)^n \right)_{n \geq 2}, \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2,$$

avec $\delta = 4 - \alpha^2$.

En particulier, le membre de droite de l'égalité de l'énoncé (que nous noterons u_n ci-dessous) vérifie la même relation de récurrence que $(\chi_n(\alpha))_{n \geq 2}$, avec les mêmes conditions initiales. La formule du binôme de Newton permet en effet de simplifier ces quantités :

$$u_2 = \frac{3\alpha^2 i\sqrt{\delta} + (i\sqrt{\delta})^3}{2^2 i\sqrt{\delta}} = \frac{3\alpha^2 - (4 - \alpha^2)}{4} = \alpha^2 - 1 = \chi_2(\alpha), \\ u_3 = \frac{4\alpha^3 i\sqrt{\delta} + 4\alpha(i\sqrt{\delta})^3}{2^3 i\sqrt{\delta}} = \frac{\alpha^3 - \alpha(4 - \alpha^2)}{2} = \alpha^3 - 2\alpha = \chi_3(\alpha).$$

Il y a donc égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \chi_n(\alpha) = u_n = \frac{1}{i\sqrt{4 - \alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

(d) Soient $\alpha \in]-2, 2[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On utilise la formule du binôme de Newton, en isolant la partie imaginaire. Cela revient à séparer les termes pairs et impairs :

$$\begin{aligned} & (\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2})^{n+1} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sqrt{4 - \alpha^2}^k \alpha^{n+1-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sqrt{4 - \alpha^2}^k \alpha^{n+1-k} \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{4 - \alpha^2}^k \alpha^{n+1-k}}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{4 - \alpha^2}^k \alpha^{n+1-k}}_{\in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

On en déduit, par la question précédente :

$$\chi_n(\alpha) = \frac{2i}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} (4-\alpha^2)^{\frac{k-1}{2}} \alpha^{n+1-k}.$$

Nous avons une égalité entre deux applications polynomiales sur $] -2, 2[$, qui est infini. L'égalité se relève donc dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\chi_n = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} (4-X^2)^{\frac{k-1}{2}} X^{n+1-k}.$$

L'énoncé demande une expression exacte des coefficients de χ_n . C'est l'objectif du calcul qui suit :

$$\begin{aligned} \chi_n &= \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1} (-1)^\ell (4-X^2)^\ell X^{n-2\ell} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1} (-1)^\ell \left(\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^{\ell-k} X^{2(\ell-k)} 4^k \right) X^{n-2\ell} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left((-4)^k \sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1} \binom{\ell}{k} \right) X^{n-2k}. \end{aligned}$$

Le coefficient de X^{n-2k} est donc : $\frac{(-4)^k}{2^n} \sum_{\ell=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2\ell+1} \binom{\ell}{k}$, pour tout $k \in \llbracket 0, \lfloor n/2 \rfloor \rrbracket$.

6. Évaluons l'identité de la question 5.(c) en $\alpha = 2 \cos(\theta)$, avec $\theta \in]0, \pi[$ (on a bien : $|\alpha| < 2$). On a :

$$\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}, \quad \alpha + i\varepsilon\sqrt{4-\alpha^2} = 2 \cos(\theta) + 2i\varepsilon|\sin(\theta)| = 2e^{i\varepsilon\theta},$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \chi_n(2 \cos(\theta)) = \frac{1}{2i \sin(\theta)} \left(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} \right) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

On en déduit en particulier, avec $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1} \in]0, \pi[$:

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \chi_n(2 \cos(\theta_k)) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin(\theta_k)} = 0.$$

Ainsi $2 \cos(\theta_k)$ est racine de χ_n pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme le cosinus est injectif sur $]0, \pi[$, cela fournit n racines distinctes d'un polynôme de degré n : on les a toutes, et ce sont des racines simples.

Comme les racines de χ_n sont les valeurs propres de T_n , on conclut :

$$\operatorname{Sp}(T_n) = \left\{ \left(2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

7. Supposons que $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. On a, d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad S_f(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right) = \operatorname{E} \left(f \left(2 \cos \left(\frac{U_n \pi}{n+1} \right) \right) \right).$$

Par la question 4.(a) (dont l'hypothèse est vérifiée), on a le résultat voulu :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(T_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

8. (a) On a : $T_n(a, b, c) = aI_n + T_n(0, b, c)$, donc :

$$\chi_{T_n(a,b,c)} = \det((X - a)I_n - T_n(0, b, c)) = \chi_{T_n(0,b,c)}(X - a).$$

On en déduit immédiatement :

$$\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{(a + \lambda, m_\lambda) \mid (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n(0, b, c))\}.$$

(b) Par la question précédente, il suffit de lier les spectres de $T_n(0, b, c)$ et $T_n(0, bc, 1)$. Supposons d'abord que c n'est pas nul. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour uniformiser les notations, notons : $x_0 = x_{n+1} = 0$, et posons aussi :

$$\forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \quad y_i = \frac{1}{c^{i-1}} x_i, \quad \text{et} : \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} T_n(0, b, c)X = \lambda X &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad cx_{i-1} + bx_{i+1} = \lambda x_i \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad c^i y_{i-1} + bc^{i+1} y_{i+1} = \lambda c^i y_i \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_{i-1} + bcy_{i+1} = \lambda y_i \quad (c \neq 0) \\ &\iff T_n(0, bc, 1)Y = \lambda Y. \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ker(T_n(0, b, c) - \lambda I_n) = \ker(T_n(0, bc, 1) - \lambda I_n)$, puis :

$$\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \text{Sp}(T_n(0, bc, 1)).$$

(Cette égalité est *a priori* hâtive : on ne sait rien des ordres de multiplicité et nous parlons ici du spectre au sens classique ; cependant, la question suivante assure que toutes les valeurs propres sont simples – et sans raisonnement circulaire – donc l'égalité est aussi vraie pour le spectre au sens de l'énoncé, pour $c \neq 0$.)

Si $c = 0$, cela reste valable : $T_n(0, b, 0)$ et $T_n(0, 0, 1)$ sont triangulaires strictes et ont donc pour même spectre $\{(0, n)\}$.

Par la question précédente :

$$\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{(a + \lambda, m_\lambda) \mid (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))\}.$$

(c) D'après la question précédente, il suffit d'expliciter les valeurs propres de $T_n(0, bc, 1)$. Or on a :

$$\begin{aligned} \text{Sp}(T_n(0, bc, 1)) &= \text{Sp}(T_n(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})) \\ &= \text{Sp}(\sqrt{bc}T_n) \\ &\stackrel{(q.6)}{=} \left\{ \left(2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}. \end{aligned}$$

On conclut :

$$\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \left\{ \left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}.$$

9. (a) Par la question précédente, pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$S_f(T_n(a, b, c)) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n)} f\left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right).$$

Posons g la fonction $x \mapsto f(a + \sqrt{bc}x)$. Elle est aussi continue et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad S_f(T_n(a, b, c)) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n)} g\left(2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = S_g(T_n).$$

Par la question 7, on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(T_n(a, b, c)) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{g(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(a + \sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

- (b) Notons que pour $bc > 0$, les valeurs propres de $T_n(a, b, c)$ sont toutes simples : il n'y a pas d'ambiguïté sur le fait de devoir tenir compte des multiplicités ou non.

Remarquons que si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors :

$$a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \leq y \iff 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \leq \frac{y-a}{\sqrt{bc}}.$$

On cherche donc à dénombrer asymptotiquement :

$$q_n(y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\left[-2, \frac{y-a}{\sqrt{bc}}\right]} \left(2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = nP\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) \leq \frac{y-a}{\sqrt{bc}}\right),$$

où la dernière égalité résulte du théorème de transfert et de l'égalité $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$, valable pour tout événement A .

Si : $\frac{y-a}{\sqrt{bc}} \leq -2$, on a immédiatement : $q_n(y) = 0$.

Si : $\frac{y-a}{\sqrt{bc}} \in]-2, 2[$, par la question 4.(b) on a :

$$q_n(y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \int_{-2}^{\frac{y-a}{\sqrt{bc}}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{n}{\pi} \int_{\pi}^{\arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)} d\theta = \frac{n}{\pi} \left(\pi - \arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)\right).$$

Enfin, si $\frac{y-a}{\sqrt{bc}} \geq 2$: $q_n(y) = n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Autrement dit, hormis dans les cas « pathologiques » :

$$q_n(y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \left(\pi - \arccos\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right)\right).$$

J'imagine cependant que ce n'était pas la démarche attendue par l'énoncé : je n'ai pas utilisé la question précédente (et pour cause : j'avais envie d'éviter le moment technique où l'on doit gérer le problème de discontinuité de la fonction indicatrice).

Troisième Partie

10. (a) Soit n au voisinage de l'infini. Soit $\kappa \in [0, \frac{1}{2}[$. On a :

$$\forall x \in [0, \kappa], \quad |Q_n(x) - 1| = 1 - (1 - x^n)^{2^n} \leq 1 - (1 - \kappa^n)^{2^n} \leq 2^n \kappa^n,$$

en vertu de l'inégalité de convexité : $\forall u > -1, (1+u)^{2^n} \geq 1 + 2^n u$, et :

$$\forall x \in [1 - \kappa, 1], \quad |Q_n(x)| = (1 - x^n)^{2^n} \leq (1 - (1 - \kappa)^n)^{2^n} \leq e^{-2^n(1-\kappa)^n},$$

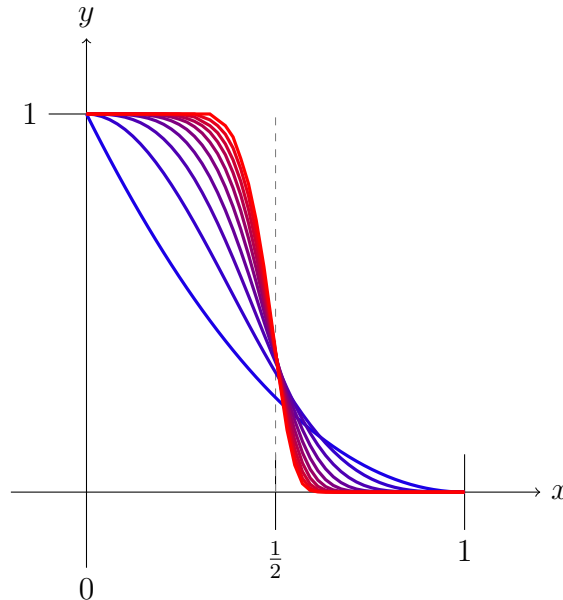
en vertu de l'inégalité de concavité : $\forall u > -1, \ln(1+u) \leq u$.

Comme : $0 \leq 2\kappa < 1$, et : $1 < 2(1-\kappa)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\kappa)^n = 0, \quad \text{et} : \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (2(1-\kappa))^n = +\infty,$$

donc les inégalités ci-dessus démontrent bien la convergence uniforme de $(Q_n)_{n \geq 0}$ sur $[0, \kappa]$ et $[1-\kappa, 1]$ vers $x \mapsto 1$ et $x \mapsto 0$ respectivement.

Remarque. La figure ci-dessous représente le graphe de Q_n pour $n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ (le bleu correspond aux petites valeurs de n et le rouge aux grandes valeurs).



- (b) L'application $x \mapsto \frac{1-x}{2}$ est une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ dans $[0, 1]$, de réciproque $g : x \mapsto 1 - 2x$. Pour tout $\kappa \in [0, \frac{1}{2}[$ on a : $g([0, \kappa]) = [1 - 2\kappa, 1]$, et : $g([1 - \kappa, 1]) = [-1, -1 + 2\kappa]$. On en déduit, par la question précédente, que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[1 - 2\kappa, 1]$ vers $x \mapsto 1 = H_{[1-2\kappa, 1]}(x)$ et sur $[-1, -1 + 2\kappa]$ vers $x \mapsto 0 = H_{[-1, -1+2\kappa]}(x)$.

Pour résumer, pour tout $\kappa \in [0, \frac{1}{2}[$ la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers H sur $[-1, 1] \setminus [-1 + 2\kappa, 1 - 2\kappa]$. Il suffit alors de noter que tout $\eta \in]0, 1]$ peut s'écrire $\eta = 1 - 2\kappa$ avec $\kappa \in [0, \frac{1}{2}[$ pour avoir le résultat (poser $\kappa = \frac{1-\eta}{2} \in [0, \frac{1}{2}[$).

11. Comme f est continue sur le segment $[-1, 1]$, elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ un module d'uniforme continuité de f associé à ε . Considérons un entier naturel non nul N tel que : $\frac{2}{N} \leq \eta$, et posons :

$$\forall i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket, \quad c_i = -1 + \frac{2i}{N+1}.$$

On a : $c_0 = -1$, $c_{N+1} = 1$, et : $c_1 < c_2 < \dots < c_N$. On vérifie alors facilement que la fonction en escalier :

$$g : x \mapsto \sum_{i=0}^{N-1} f(c_i) \mathbb{1}_{[c_i, c_{i+1}[}(x) + f(c_N) \mathbb{1}_{[c_N, 1]}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} f(c_i) \mathbb{1}_{[c_i, c_{i+1}[}(x) + f(c_N) \mathbb{1}_{[c_N, 1]}(x)$$

vérifie : $\forall x \in [-1, 1], |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ (il suffit de constater que pour tout $x \in [-1, 1]$, soit il existe $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tel que : $x \in [c_i, c_{i+1}[$, et alors : $|f(x) - g(x)| = |f(x) - f(c_i)| \leq \varepsilon$ grâce à l'inégalité $|x - c_i| \leq c_{i+1} - c_i \leq \eta$, soit $x = 1$ et on conclut similairement).

Or : $\forall x \in [-1, 1], \mathbb{1}_{[c_N, 1]}(x) = H(x - c_N)$, et :

$$\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \mathbb{1}_{[c_i, c_{i+1}[}(x) = \mathbb{1}_{[c_i, 1]}(x) - \mathbb{1}_{[c_{i+1}, 1]}(x) = H(x - c_i) - H(x - c_{i+1}),$$

donc pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \sum_{i=1}^{N-1} f(c_i) (H(x - c_i) - H(x - c_{i+1})) + f(c_N) H(x - c_N) \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} f(c_i) H(x - c_i) - \sum_{i=2}^N f(c_{i-1}) H(x - c_i) + f(c_N) H(x - c_N) \\
 &= \sum_{i=1}^N f(c_i) H(x - c_i) - \sum_{i=1}^N f(c_{i-1}) H(x - c_i) \quad (f(c_0) = 0) \\
 &= \sum_{i=1}^N (f(c_i) - f(c_{i-1})) H(x - c_i).
 \end{aligned}$$

En posant : $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $a_i = f(c_i) - f(c_{i-1})$, l'uniforme continuité de f entraîne bien : $(a_1, \dots, a_N) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$, et on a :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat.

12. On suit l'indication. Posons : $g = f - f(-1)$. La fonction g est continue et vérifie : $g(-1) = 0$, ce qui permet de lui appliquer la question précédente. Il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, une subdivision $-1 < c_1 < \dots < c_N < 1$ et $(a_1, \dots, a_N) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$ tels que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| g(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors un réel $\eta > 0$ tel que les intervalles $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ sont deux à deux disjoints ; il suffit de poser $\eta = \frac{1}{3} \min_{0 \leq i \leq N} (c_{i+1} - c_i) > 0$ (avec $c_0 = -1$, $c_{N+1} = 1$) pour que cette condition soit réalisée. Quitte à remplacer η par $\min(\eta, 1)$, on peut supposer : $\eta \in]0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{\varepsilon, n} = \sum_{i=1}^N a_i P_n(X - c_i).$$

Notons que P_n est effectivement un polynôme pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $F_{\varepsilon, n}$ l'est aussi. Par la question 10.(b), la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge vers H sur $[-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]$. On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall x \in [-1, 1] \setminus [-\eta, \eta], \forall n \geq n_0, \quad |a_i P_n(x) - a_i H(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N}.$$

Par translation, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \forall x \in [-1 + c_i, 1 + c_i] \setminus [c_i - \eta, c_i + \eta], \forall n \geq n_0, \quad |a_i P_n(x - c_i) - a_i H(x - c_i)| \leq \frac{\varepsilon}{N}.$$

Déduisons-en que $F_{\varepsilon, n}$ approche uniformément g sur $[-1, 1]$. Soit $x \in [-1, 1]$. S'il existe $i_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que : $x \in [c_{i_0} - \eta, c_{i_0} + \eta]$, alors le fait que les intervalles $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ soient disjoints assure que l'inégalité ci-dessus peut être utilisée pour tout $i \neq i_0$, donc pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) - F_{\varepsilon, n}(x) \right| &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^N |a_i P_n(x - c_i) - a_i H(x - c_i)| + |a_{i_0}| \cdot |P_n(x - c_{i_0}) - H(x - c_{i_0})| \\
 &\leq \frac{N-1}{N} \varepsilon + \varepsilon \left(\|P_n\|_{\infty, [-1, 1]} + \|H\|_{\infty, [-1, 1]} \right) \\
 &\leq 3\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Si x n'appartient pas à $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on reprend ces mêmes majorations sans isoler de terme particulier de la somme. Le majorant 3ε reste valable. Ainsi :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [-1, 1], \quad \left| \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) - F_{\varepsilon, n}(x) \right| \leq 3\varepsilon,$$

et donc, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout $x \in [-1, 1]$:

$$|g(x) - F_{\varepsilon, n}(x)| \leq \left| g(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) - F_{\varepsilon, n}(x) \right| \leq 4\varepsilon.$$

Pour approcher f , il suffit de poser : $P = F_{\varepsilon, n} - f(-1)$, qui est aussi un polynôme, et d'écrire :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in [-1, 1], \quad |f(x) - P(x)| = |g(x) - F_{\varepsilon, n}(x)| \leq 4\varepsilon.$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui démontre le résultat voulu.

Quatrième Partie

13. (a) Soient $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La matrice $X_n(\omega)$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Si D est une matrice diagonale semblable à $X_n(\omega)$, alors D^k est semblable à $X_n(\omega)^k$ et on en déduit :

$$\frac{1}{n} \text{tr} \left(X_n(\omega)^k \right) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n(\omega))} m_\lambda \lambda^k = S_n(f_k)(\omega),$$

d'où le résultat : $S_n(f_k) = \frac{1}{n} \text{tr} \left(X_n^k \right)$.

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue le changement de variable $\theta = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$ (ou de manière équivalente $x = 2 \cos(\theta)$), justifié comme dans la question 3.(a). On obtient :

$$\begin{aligned} \Sigma(f_k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_k(2 \cos(\theta)) (\sin(\theta))^2 d\theta \\ &= 2I(f_k) - \frac{I(f_{k+2})}{2} \\ &= \begin{cases} 2 \binom{k}{k/2} - \frac{1}{2} \binom{k+2}{(k+2)/2} & \text{si } k \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) Notons que $\Sigma(f_0) = 1$, $\Sigma(f_1) = 0$ et $\Sigma(f_2) = 1$ d'après la question précédente. Soit n au voisinage de l'infini. Pour $k = 0$, on a immédiatement :

$$\frac{1}{n} \text{E} \left(\text{tr}(X_n^0) \right) = \text{E}(1) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \Sigma(f_0),$$

et de même : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \text{E} \left(\text{tr}(X_n^0)^2 \right) = \Sigma(f_0)^2 = 1$. Ceci démontre (H_0) .

Pour $k = 1$, on utilise la linéarité de l'espérance et le fait que les variables $W_{i,i}$ soient centrées :

$$\frac{1}{n} \text{E}(\text{tr}(X_n)) = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \text{E}(W_{i,i}) = 0,$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{E}(\text{tr}(X_n^1)) = \Sigma(f_1) = 0$, et :

$$\frac{1}{n^2} \text{E}(\text{tr}(X_n)^2) = \frac{1}{n^2} \text{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{W_{i,i}}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n \text{E}(W_{i,i}^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{E}(W_{i,i} W_{j,j}) \right).$$

Les variables aléatoires $W_{i,j}$ étant supposées indépendantes, on a :

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left(\text{tr} (X_n)^2 \right) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(W_{i,i}^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(W_{i,i}) \mathbb{E}(W_{j,j}) \right) = \frac{1}{n^3} \cdot (n + 0) = \frac{1}{n^2},$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left(\text{tr} (X_n^1)^2 \right) = \Sigma(f_1)^2 = 0$. Ceci démontre (H_1) .

Il reste le cas $k = 2$. On facilite le calcul de $\text{tr}(X_n^2)$ en reconnaissant la norme euclidienne usuelle de $M_n(\mathbb{R})$ au carré (rappelons que X_n est une matrice symétrique) :

$$\text{tr} (X_n^2) = \text{tr} (X_n^\top X_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\frac{W_{i,j}}{\sqrt{n}} \right)^2.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\text{tr} (X_n^2) \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}(W_{i,j}^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 = 1,$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \left(\text{tr} (X_n^1) \right) = \Sigma(f_2) = 1$. Enfin :

$$\text{tr} (X_n^2)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} W_{i,j}^2 \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq k, \ell \leq n}} W_{i,j}^2 W_{k,\ell}^2.$$

Si $(k, \ell) \neq (i, j)$, alors par indépendance de $W_{i,j}^2$ et $W_{k,\ell}^2$ (lemme des coalitions) on a : $\mathbb{E} (W_{i,j}^2 W_{k,\ell}^2) = \mathbb{E} (W_{i,j}^2) \mathbb{E} (W_{k,\ell}^2) = 1$. Cela incite à isoler les termes tels que $(k, \ell) = (i, j)$:

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left(\text{tr} (X_n^2)^2 \right) = \frac{1}{n^4} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E} (W_{i,j}^4) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ 1 \leq k, \ell \leq n \\ (i,j) \neq (k,\ell)}} 1 \right) = \frac{1}{n^4} \left(n^2 \mathbb{E}(W_{1,1}^4) + (n^4 - n^2) \right),$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left(\text{tr} (X_n^2)^2 \right) = \Sigma(f_2)^2 = 1$. Ceci démontre (H_2) .

D'où le résultat : on a démontré (H_0) , (H_1) et (H_2) .

14. Soient $k \in \mathbb{N}$, $B > 0$ et $\varepsilon > 0$. On a facilement, en effectuant une distinction de cas selon que $|x| > B$ ou $|x| \leq B$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^{2k} \geq B^k g_{k,B}(x).$$

On en déduit, par définition de $S_n(f_{2k})$ et $S_n(g_{k,B})$:

$$S_n(f_{2k}) \geq S_n(B^k g_{k,B}) = B^k S_n(g_{k,B}).$$

Or, pour toute variable aléatoire X positive, on a :

$$X \geq \varepsilon \mathbb{1}_{(X \geq \varepsilon)},$$

donc :

$$S_n(f_{2k}) \geq \varepsilon B^k \mathbb{1}_{(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon)}.$$

On conclut par croissance et linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{P} (S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon)} \right) \leq \frac{\mathbb{E} (S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}.$$

15. Soient $\varepsilon > 0$ et $B > 4$. On suit l'indication. Démontrons d'abord que pour tout $(k, k') \in \mathbb{N}^2$, si : $k \leq k'$, alors : $g_{k,B} \leq g_{k',B}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si : $x < B$, alors : $g_{k,B}(x) = g_{k',B}(x) = 0$. Si $|x| \geq B$, alors en particulier $|x| \geq 1$ puisque B est supposé strictement supérieur à 4, donc : $|x|^k \leq |x|^{k'}$. Ainsi on a bien : $g_{k,B}(x) \leq g_{k',B}(x)$, ce qui démontre l'inégalité ci-dessus dans tous les cas.

Ceci étant dit : pour calculer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de $P(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon)$, il s'agit d'utiliser la question précédente et en particulier cela nécessite de contrôler la taille de $E(S_n(f_{2k}))$. Faisons. D'après la question 13.(a) et l'hypothèse (H_{2k}) (supposée vérifiée), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n(f_{2k})) = \Sigma(f_{2k}) \stackrel{(q. 13.(b))}{=} 2 \binom{2k}{k} - \frac{1}{2} \binom{2k+2}{k+1}. \quad (*)$$

Or, pour tout k au voisinage de l'infini, on a par la formule de Stirling :

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} = \frac{4^k}{\sqrt{\pi k}}.$$

Comme : $B > 4$, on en déduit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4^k}{B^k \sqrt{\pi k}} = 0,$$

et donc, par l'encadrement : $0 \leq \Sigma(f_{2k}) \leq 2 \binom{2k}{k}$ (la positivité de $\Sigma(f_{2k})$ découle de la positivité de f_{2k} et de la croissance de l'intégrale) :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Sigma(f_{2k})}{B^k} = 0.$$

Voyons comment en déduire le résultat. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Par ce calcul de limite, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on ait :

$$\frac{\Sigma(f_{2k})}{\varepsilon B^k} \leq \varepsilon_0,$$

et par (*), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$E(S_n(f_{2k_0})) \leq \frac{\Sigma(f_{2k_0})}{\varepsilon B^{k_0}} + \varepsilon_0 \leq 2\varepsilon_0. \quad (\dagger)$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}$, et posons : $k' = \max(k_0, k)$. On a : $k \leq k'$, donc : $g_{k,B} \leq g_{k',B}$, et on en déduit :

$$(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \subseteq (S_n(g_{k',B}) \geq \varepsilon),$$

donc par croissance d'une probabilité, pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$P(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq P(S_n(g_{k',B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{E(S_n(f_{2k'}))}{\varepsilon B^k} \stackrel{(\dagger)}{\leq} 2\varepsilon_0.$$

On a démontré :

$$\forall \varepsilon_0 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq P(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq 2\varepsilon_0,$$

d'où le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) = 0.$$

16. Soient n au voisinage de l'infini, $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que nous pouvons utiliser grâce à la question 13.(a) (elle implique en particulier que $S_n(f_k)$ est une somme de variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2), on a :

$$P(|S_n(f_k) - E(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n(f_k))}{\varepsilon^2}.$$

Or, par la formule de Huygens :

$$V(S_n(f_k)) = E(S_n(f_k)^2) - E(S_n(f_k))^2 \stackrel{(q.13.(a))}{=} \frac{1}{n^2} E(\text{tr}(X_n^k)^2) - \left(\frac{1}{n} E(\text{tr}(X_n^k)) \right)^2,$$

et par l'hypothèse (H_k) on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n(f_k)) = \Sigma(f_k)^2 - \Sigma(f_k)^2 = 0.$$

On conclut donc avec le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n(f_k) - E(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) = 0.$$

17. (a) On applique le théorème d'approximation de Weierstraß à $f|_{[-B,B]}$, continue par hypothèse. Soit $(\varepsilon, \varepsilon_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [-B, B], \quad |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon_0.$$

Nous préciserons plus tard la valeur prise par ε_0 , selon ce dont nous aurons besoin.

Soit n au voisinage de l'infini. L'énoncé nous demande de lier $S_n(f) - \Sigma(f)$ et $S_n(P) - E(S_n(P))$. Ceci incite au découpage suivant :

$$S_n(f) - \Sigma(f) = (S_n(f) - S_n(P)) + (S_n(P) - E(S_n(P))) + (E(S_n(P)) - \Sigma(f)),$$

mais il est plus naturel de vouloir comparer $E(S_n(P))$ et $\Sigma(P)$. On préfère écrire :

$$S_n(f) - \Sigma(f) = (S_n(f) - S_n(P)) + (S_n(P) - E(S_n(P))) + (E(S_n(P)) - \Sigma(P)) + (\Sigma(P) - \Sigma(f)).$$

Mesurons la taille de chaque quantité. Tout d'abord, la linéarité de $\Sigma(\cdot)$ et $S_n(\cdot)$ entraîne, grâce à l'hypothèse (H_k) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(S_n(P)) = \Sigma(P),$$

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$|E(S_n(P)) - \Sigma(P)| \leq \varepsilon_0. \quad (\heartsuit)$$

Ensuite, l'approximation de f par P implique, comme B est strictement supérieur à 4 :

$$|\Sigma(f) - \Sigma(P)| \leq \int_{-2}^2 |f(x) - P(x)| \sqrt{4 - x^2} dx \leq \varepsilon_0 \Sigma(f_0) = \varepsilon_0. \quad (\diamond)$$

Puisque $S_n(P) - E(S_n(P))$ apparaît dans la majoration demandée, nous n'y touchons pas : il reste à estimer $S_n(f) - S_n(P)$. Les calculs qui suivent sont motivés par l'apparition de la variable aléatoire $S_n(P \mathbb{1}_{|x| > B})$ dans la majoration demandée. Son apparition est plutôt naturelle : la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{|x| \leq B}$, ci-dessous, est là pour tenir compte que la taille de $f - P$ n'est contrôlée que sur $[-B, B]$, alors que les valeurs propres de X_n ne sont pas nécessairement dans cet intervalle.

Plus précisément (l'indexation de toutes les sommes est sur $(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)$, mais nous l'omettons pour alléger les notations) :

$$\begin{aligned} n(S_n(f) - S_n(P)) &= \sum_{\lambda} m_{\lambda}(f(\lambda) - P(\lambda)) \\ &= \sum_{\lambda} m_{\lambda}(f(\lambda) - P(\lambda))\mathbb{1}_{|x|>B}(\lambda) + \sum_{\lambda} m_{\lambda}(f(\lambda) - P(\lambda))\mathbb{1}_{|x|\leq B}(\lambda) \\ &= -\sum_{\lambda} m_{\lambda}P(\lambda)\mathbb{1}_{|x|>B}(\lambda) + \sum_{\lambda} m_{\lambda}(f(\lambda) - P(\lambda))\mathbb{1}_{|x|\leq B}(\lambda) \\ &= -nS_n(P\mathbb{1}_{|x|>B}) + \sum_{\lambda} m_{\lambda}(f(\lambda) - P(\lambda))\mathbb{1}_{|x|\leq B}(\lambda). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$|S_n(f) - S_n(P)| \leq |S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| + \frac{\varepsilon_0}{n} \sum_{\lambda} m_{\lambda}\mathbb{1}_{|x|\leq B}(\lambda) \leq |S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| + \varepsilon_0. \quad (\clubsuit)$$

Par $(\heartsuit)$, $(\diamondsuit)$ et $(\clubsuit)$, on a donc pour tout $n \geq N$:

$$|S_n(f) - \Sigma(f)| \leq |S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| + |S_n(P) - E(S_n(P))| + 3\varepsilon_0.$$

Fixons $n \geq N$. Pour en déduire l'inégalité de l'énoncé, il faudrait choisir ε_0 de sorte que cette majoration implique :

$$(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \subseteq \left(|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \cup \left(|S_n(P) - E(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right). \quad (*)$$

Pour cela, notons que si $|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon$ se réalise, alors on a :

$$|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| + |S_n(P) - E(S_n(P))| \geq |S_n(f) - \Sigma(f)| - 3\varepsilon_0 \geq \varepsilon - 3\varepsilon_0.$$

Pour que nécessairement, l'un des deux termes de la somme soit supérieur à $\frac{\varepsilon}{4}$, il suffit d'avoir : $\varepsilon - 3\varepsilon_0 \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Ceci conduit à poser :

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{6}.$$

En reprenant tout le raisonnement ci-dessus, on a alors bien $(*)$. On conclut par croissance de P et par sous-additivité :

$$P(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \leq P\left(|S_n(P\mathbb{1}_{|x|>B})| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) + P\left(|S_n(P) - E(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

- (b) Soit n au voisinage de l'infini. Il s'agit de démontrer que le majorant de la question précédente converge vers zéro. Écrivons : $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. On a :

$$|S_n(P) - E(S_n(P))| \leq \sum_{k=0}^d |a_k| |S_n(f_k) - E(S_n(f_k))|.$$

En raisonnant comme dans la question précédente, on en déduit :

$$\left(|S_n(P) - E(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \subseteq \bigcup_{k=0}^d \left(|S_n(f_k) - E(S_n(f_k))| \geq \frac{\varepsilon}{4(d+1)|a_k|}\right).$$

La croissance d'une probabilité et la sous-additivité permettent alors de majorer $P(|S_n(P) - E(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4})$ par une somme de suites convergeant vers 0 (question 16) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|S_n(P) - E(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0.$$

Un raisonnement similaire, mais utilisant la question 15, nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| S_n \left(P \mathbb{1}_{|x| > B} \right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right) = 0.$$

On conclut alors avec la question précédente et le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} (|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) = 0.$$