

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, X/ENS 2026, filière MP, Maths B.
Version provisoire du 17/04/2026

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Préliminaire

1. L'équation caractéristique $r^2 - \alpha r + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = \alpha^2 - 4$.
Si $|\alpha| > 2$, il existe λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right)^n.$$

Les données initiales donnent $\lambda = -\mu$ puis $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}}$. On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4}} \left(\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right)^n - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \right)^n \right)}.$$

Si $|\alpha| < 2$, on a de même

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{i\sqrt{4 - \alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \right)^n - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4 - \alpha^2}}{2} \right)^n \right)}.$$

Si $\alpha = 2$, il existe λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu n.$$

Les données initiales donnent $\lambda = 0$ et $\mu = 1$. Il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n}.$$

Si $\alpha = -2$, il existe λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)(-1)^n.$$

Les données initiales donnent $\lambda = 0$ et $\mu = -1$. Il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1}n}.$$

Première partie

2. On a

$$v_n = \frac{n+1}{n} R_{n+1}(f) - \frac{f(0)}{n}$$

où $R_n(f)$ désigne la n -ième somme de Riemann de f associée à la méthode des rectangles à gauche.
Comme f est continue, le théorème de convergence des sommes de Riemann assure que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f(t) dt}.$$

Par le même théorème de convergence de sommes de Riemann, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

De là,

$$w_n = \frac{2n+1}{2n} \times \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

3. (a) La fonction

$$x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

est continue sur $] -2, 2[$, il y a donc deux improprietés en 2 et en -2 . Or,

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

et comme f est continue en 2, il vient

$$\frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} \underset{x \rightarrow 2}{=} O\left(\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\right).$$

Par domination par une intégrale de Riemann convergente en 2 (d'exposant $1/2 < 1$),

$$x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

est intégrable en 2. La borne -2 se traite de façon identique et on a donc montré que l'intégrale impropre

$$I(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx \text{ est convergente.}$$

Puis, le changement de variables $x = 2 \cos(\theta)$ donne

$$I(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 \frac{f(2 \cos \theta)}{\sqrt{4 \sin^2 \theta}} (-2 \sin \theta) d\theta \underset{\sin \theta \geq 0}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(2 \cos \theta)}{2 \sin \theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(2 \cos \theta) d\theta.$$

Ce dernier calcul montre aussi que l'intégrale sous sa forme initiale est bien convergente.

(b) et (c) Si n est impair, on a de suite $I(f_n) = 0$ par imparité de

$$x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Si $n = 2m$ est pair, on a

$$I(f_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2^{2m} \cos^{2m} \theta d\theta = \frac{2^{2m+1}}{\pi} W_{2m}$$

où W_{2m} désigne l'intégrale de Wallis d'indice $2m$.

Un calcul classique et laissé au lecteur donne

$$W_{2m} = \frac{\pi}{2} \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2},$$

ce qui donne en reportant

$$I(f_n) = I(f_{2m}) = \frac{2^{2m+1}}{\pi} \frac{\pi}{2} \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} = \binom{2m}{m} = \binom{n}{n/2}.$$

4. (a) Par théorème de transfert et 1.,

$$\mathbb{E} \left(f \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(2 \cos(\pi x)) dx.$$

Or,

$$\int_0^1 f(2 \cos(\pi x)) dx \underset{t=\pi x}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(2 \cos t) dt \underset{3.}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left(f \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

(b) On a

$$\mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) = \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{]-\infty, y[} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{]-\infty, y[} \left(2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right).$$

Le théorème de convergence des sommes de Riemann étant encore valable pour des fonctions continues par morceaux, on peut à nouveau appliquer **1.** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) = \int_0^1 \mathbf{1}_{]-\infty, y[} (2 \cos(\pi x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbf{1}_{]-\infty, y[} (2 \cos \theta) d\theta.$$

En observant que **3.(a)** reste aussi valable pour les fonctions continues par morceaux, il vient

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbf{1}_{]-\infty, y[} (2 \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{\mathbf{1}_{]-\infty, y[}(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < y \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Deuxième partie

5. (a) On a

$$\chi_2 = X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \text{ et } \text{Sp}(T_2) = \{(-1, 1), (1, 1)\}.$$

Et

$$\chi_3 = X(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2}) \text{ et } \text{Sp}(T_3) = \{(0, 1), (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1)\}.$$

(b) En développant par rapport à la première colonne, on a

$$\chi_n = X\chi_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & X & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la première ligne

$$\chi_n = X\chi_{n-1} - \chi_{n-2}.$$

(c) On en déduit que

$$\forall n \geq 4, \chi_n(\alpha) = \alpha\chi_{n-1}(\alpha) - \chi_{n-2}(\alpha).$$

En posant $\chi_0 = 1$ et $\chi_1 = X$, on observe que la relation précédente est encore valable pour $n = 3$ et $n = 2$. Posons alors $s_n = \chi_n(\alpha)$. La suite (s_n) vérifie la même relation de récurrence linéaire que la suite (u_n) de la question **1.**, avec $s_0 = u_1$ et $s_1 = \alpha = u_2$. On a donc $s_n = u_{n+1}$ pour tout n et on en déduit que si $|\alpha| < 2$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \chi_n(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

(d) Pour $|\alpha| < 2$, on a à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$\chi_n(\alpha) = \frac{1}{i^{2n+1} \sqrt{4-\alpha^2}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha^{n+1-k} \left(i^k (4-\alpha^2)^{k/2} - (-1)^k i^k (4-\alpha^2)^{k/2} \right).$$

Si k est pair, on a

$$i^k (4-\alpha^2)^{k/2} - (-1)^k i^k (4-\alpha^2)^{k/2} = 0.$$

Si $k = 2l + 1$ est impair, on a

$$i^k (4-\alpha^2)^{k/2} - (-1)^k i^k (4-\alpha^2)^{k/2} = 2i(-1)^l (4-\alpha^2)^{l+1/2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \chi_n(\alpha) &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} \alpha^{n-2l} (-1)^l (4-\alpha^2)^l \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} \alpha^{n-2l} (-1)^l \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} 4^j (-1)^{l-j} \alpha^{2l-2j} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2l+1} \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} 4^j (-1)^j \alpha^{n-2j} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{l=j}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j 4^j \binom{n+1}{2l+1} \binom{l}{j} \right) \alpha^{n-2j}. \end{aligned}$$

Les deux polynômes

$$\chi_n \text{ et } \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{l=j}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j 4^j \binom{n+1}{2l+1} \binom{l}{j} \right) X^{n-2j}$$

coïncident sur $] -2, 2[$: leur différence a donc une infinité de racines donc est le polynôme nul. On en déduit que

$$\chi_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{l=j}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j 4^j \binom{n+1}{2l+1} \binom{l}{j} \right) X^{n-2j}.$$

6. D'après **5.c**, on a

$$\begin{aligned} \chi_n \left(2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right) &= \frac{1}{2i \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)} \left((e^{ik\pi/(n+1)})^{n+1} - (e^{-ik\pi/(n+1)})^{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2i \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)} (e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les $2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont donc n valeurs propres distinctes de T_n : ce sont donc les valeurs propres de T_n et elles sont toutes de multiplicité 1.

7. D'après **6.**, on a

$$S_f(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left(2 \cos \left(\frac{\pi k}{n+1} \right) \right)$$

et en utilisant **4.a.**, il vient de suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(T_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

8. (a) On a $T_n(a, b, c) = aI_n + T_n(0, b, c)$. On en déduit que

$$\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{(a + \lambda, m_\lambda), (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n(0, b, c))\}.$$

- (b) En effectuant le même calcul qu'en **5.b**, on remarque le polynôme caractéristique de $T_n(0, b, c)$ et le polynôme caractéristique de $T_n(0, bc, 1)$ vérifient la même relation de récurrence suivante

$$P_n = XP_{n-1} - bcP_{n-2}.$$

Comme ils sont égaux pour $n = 1$ et $n = 2$, on en déduit que le polynôme caractéristique de $T_n(0, b, c)$ est égal au polynôme caractéristique de $T_n(0, bc, 1)$ pour tout n . On en déduit que

$$\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))$$

et à l'aide de **a.**, il vient

$$\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{(a + \lambda, m_\lambda), (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))\}.$$

- (c) D'après ce qui précède,

$$\text{Sp}(T_n(0, b, c)) = \text{Sp}(T_n(0, bc, 1)) = \text{Sp}(T_n(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})) = \text{Sp}(\sqrt{bc}T_n).$$

les valeurs propres de $T_n(a, b, c)$ sont donc les

$$a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \text{ pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

et elles sont toutes distinctes donc de multiplicité 1.

9. (a) C'est immédiat avec ce qui précède :

$$S_f(T_n(a, b, c)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(a + \sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

- (b) On a

$$\frac{1}{n} q_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{]-\infty, y]} \left(a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{\mathbf{1}_{]-\infty, y]}(a + \sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{(y-a)/\sqrt{bc}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Finalement,

$$q_n(y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left[\arcsin\left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}}\right) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Troisième partie

10. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, sur $[0, k]$, on a pour tout $x \in [0, k]$,

$$|Q_n(x) - 1| = |Q_n(x) - Q_n(0)| \leq |x| \sup_{t \in [0, k]} |Q'_n(t)|.$$

Or,

$$|Q'_n(t)| = 2^n n t^{n-1} (1-t^n)^{2^n-1} \leq 2^n n k^{n-1}.$$

De là

$$|Q_n(x) - 1| \leq n(2k)^n$$

puis par croissances comparées,

$$\sup_{x \in [0, k]} |Q_n(x) - 1| \leq n(2k)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre que $(Q_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 1 sur $[1, k]$.

Pour $x \in [1-k, 1]$, on a

$$|Q_n(x)| \leq [1 - (1-k)^n]^{2^n} = \exp(2^n \ln(1 - (1-k)^n)).$$

Or,

$$2^n \ln(1 - (1 - k)^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -(2 - 2k)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\infty.$$

On en déduit que

$$\sup_{x \in [1-k, 1]} |Q_n(x)| \leq [1 - (1 - k)^n]^{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0,$$

ce qui montre que $(Q_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[1 - k, 1]$.

(b) Pour $x \in [\eta, 1]$, on a

$$\frac{1 - x}{2} \in \left[0, \frac{1 - \eta}{2}\right]$$

et donc

$$\sup_{x \in [\eta, 1]} |P_n(x) - 1| \leq \sup_{t \in [0, (1-\eta)/2]} |Q_n(t) - 1| \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

donc $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 1 sur $[\eta, 1]$.

De même, pour $x \in [-1, -\eta]$, on a

$$\frac{1 - x}{2} \in \left[\frac{1 + \eta}{2}, 1\right]$$

et donc

$$\sup_{x \in [-1, -\eta]} |P_n(x)| \leq \sup_{t \in [(1+\eta)/2, 1]} |Q_n(t)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

donc $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[-1, -\eta]$.

On a bien montré que $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers H sur $[-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]$.

11. La fonction

$$x \mapsto \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i)$$

est la fonction en escaliers qui vaut 0 sur $[-1, c_1[$ et $a_1 + \dots + a_i$ sur $[c_i, c_{i+1}[$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme f est continue sur $[-1, 1]$, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$(\star) \quad \forall x, y, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Construisons les c_i et les a_i par récurrence : on pose $a_0 = 0$ puis :

- si pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f(x)| < \varepsilon$, il n'y a rien à dire.
- sinon, soit

$$c_1 = \min\{t \in [-1, 1] \mid |f(t)| = \varepsilon\}.$$

On pose alors $a_1 = f(c_1)$. Remarquons que, grâce à $(\star)$, $c_1 \geq -1 + \eta$.

- si pour tout $x \in [c_1, 1]$, $|f(x) - f(c_1)| < \varepsilon$, la construction s'arrête.
- sinon, soit

$$c_2 = \min\{t \in [-1, 1] \mid |f(t) - f(c_1)| = \varepsilon\}.$$

On pose alors $a_2 = f(c_2) - f(c_1)$ et on remarque grâce à $(\star)$ à nouveau que

$$c_2 \geq c_1 + \eta \geq -1 + 2\eta.$$

- On itère cette construction qui s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes puisque $c_i \geq -1 + i\eta$.

La fonction ainsi construite est bien en escaliers avec des marches de hauteur $\pm \varepsilon$ et vaut $f(c_i)$ sur $[c_i, c_{i+1}[$. Grâce à $(\star)$, on a bien

$$\forall x \in [-1, 1], \left| f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon.$$

12. Quitte à changer f en $f - f(-1)$ et P en $P - P(-1)$, on peut supposer que $f(-1) = 0$. Soient $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon : x \mapsto \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i)$$

la fonction précédemment construite et $\eta > 0$ tel que les $[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ soient deux à deux disjoints. Soit (P_n) la suite définie en 10.. La suite de polynômes $(F_{\varepsilon,n})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f_ε sur

$$J_{\varepsilon,\eta} = [-1, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^N [c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$$

et donc pour n assez grand, on a

$$\forall x \in J_{\varepsilon,\eta}, |F_{\varepsilon,n}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

Quitte à prendre n encore plus grand, on peut aussi supposer que pour tout i ,

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus [c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon], \left| \sum_{j=1, j \neq i}^N a_j P_n(x - c_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_j H(x - c_j) \right| \leq \varepsilon.$$

Soient enfin x et i tels que $x \in [c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$: on a

$$|F_{\varepsilon,n}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq \left| \sum_{j=1, j \neq i}^N a_j P_n(x - c_j) - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_j H(x - c_j) \right| + |a_i| (|P_n(x - c_i)| + |H(x - c_i)|).$$

Or, sur $[-1, 1]$, on a $0 \leq P_n \leq 1$ et $|H| \leq 1$. On en déduit que

$$|F_{\varepsilon,n}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout i , on a à l'aide de ce qui précède

$$\forall x \in [-1, 1], |F_{\varepsilon,n}(x) - f_\varepsilon(x)| \leq 3\varepsilon$$

et enfin

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], |f(x) - F_{\varepsilon,n}(x)| \leq 4\varepsilon}.$$

Ceci donne le résultat en changeant ε en $\varepsilon/4$.

Quatrième partie

13. (a) La matrice X_n est symétrique réelle donc diagonalisable. On en déduit que

$$\text{Sp}(X_n^k) = \{(\lambda^k, m_\lambda), (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)\}.$$

Ainsi,

$$\boxed{S_n(f_k) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} \lambda^k m_\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr}(X_n^k)}.$$

(b) On a

$$\Sigma(f_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4 - x^2} dx = \underset{x=2 \cos \theta}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 2^k \cos^k \theta (-4 \sin^2 \theta) d\theta = \frac{2^{k+1}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^k \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta.$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair, } \Sigma(f_k) = 0}.$$

Si $\boxed{k = 2m \text{ est pair}}$, on a

$$\boxed{\Sigma(f_k) = \frac{2^{k+2}}{\pi} (W_k - W_{k+2}) = 2 \binom{2m}{m} - \frac{1}{2} \binom{2m+2}{m+1}}.$$

(c) Pour $k = 0$, on a

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(I_n)) = 1 \text{ et } \Sigma(f_0) = 2 - \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

et

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E}((\text{Tr}(I_n))^2) = 1 \text{ et } \Sigma(f_0) = 1$$

donc (H_0) est vérifiée.

Pour $k = 1$, comme $\mathbb{E}(W_{i,i}) = 0$, on a

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{W_{i,i}}{\sqrt{n}}\right) = 0 \text{ et } \Sigma(f_1) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}((\text{Tr}(X_n))^2) &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}((\text{Tr}(X_n))^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n W_{i,i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(W_{i,i}^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(W_{i,i} W_{j,j}) \right] \\ &\stackrel{\text{ind.}}{=} \frac{1}{n^3} [n + 2 \times 0] \\ &= \frac{1}{n^2} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

donc (H_1) est vérifiée.

Pour $k = 2$, on a

$$\Sigma(f_2) = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 6 = 1.$$

Comme X_n est symétrique, $\text{Tr}(X_n^2)$ est égale à la somme des carrés des coefficients de X_n . On a donc

$$\text{Tr}(X_n^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n W_{i,i}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} W_{i,j}^2 \right).$$

De là,

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^2)) = \frac{1}{n^2} \left(n + 2 \frac{n(n-1)}{2} \right) = 1.$$

Puis,

$$(\text{Tr}(X_n^2))^2 = \frac{1}{n^2} \times (\mathcal{S}_1 + 2\mathcal{S}_2)$$

où $\mathcal{S}_1$ est une somme de n^2 termes de la forme $W_{i,j}^4$ et $\mathcal{S}_2$ est une somme de $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$ termes de la forme $W_{i,j}^2 W_{i',j'}^2$ avec $(i',j') \neq (i,j)$. Par indépendance et le fait que les $W_{i,j}$ sont identiquement distribuées, on en déduit que

$$\frac{1}{n^2} \mathbb{E}((\text{Tr}(X_n^2))^2) = \frac{1}{n^4} (n^2 \mathbb{E}(W_{1,1}^4) + n^2(n^2-1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc (H_2) est vérifiée.

14. On a d'une part

$$S_n(g_{k,B}) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda g_{k,B}(\lambda)$$

$$S_n(f_{2k}) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda \lambda^{2k}.$$

Or, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^{2k} \geq B^k g_{k,B}(x)$. De là,

$$S_n(f_{2k}) \geq B^k S_n(g_{k,B}) \geq B^k \varepsilon \mathbf{1}_{(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon)}.$$

Par croissance de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(S_n(f_{2k})) \geq B^k \varepsilon \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon)$$

et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}}.$$

15. Comme $g_{k,B} \leq g_{k',B}$ pour tout $k' \geq k$, on a pour tout $k' \geq k$,

$$(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \subset (S_n(g_{k',B}) \geq \varepsilon).$$

Et donc

$$\forall k' \geq k, \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k'}))}{\varepsilon B^{k'}}.$$

D'après **13.** et la formule de Stirling,

$$0 \leq \Sigma(f_{2k'}) \leq 2 \binom{2k'}{k'} \underset{k' \rightarrow +\infty}{\sim} 4^{k'} \frac{2}{\sqrt{k' \pi}}$$

et donc pour $B > 4$,

$$\lim_{k' \rightarrow +\infty} \frac{\Sigma(f_{2k'})}{B^{k'}} = 0.$$

Soit $\eta > 0$ fixé. Fixons k' tel que

$$\frac{\Sigma(f_{2k'})}{B^{k'}} \leq \eta.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n(f_{2k'})) = \Sigma(f_{2k'})$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \mathbb{E}(S_n(f_{2k'})) \leq \Sigma(f_{2k'}) + \eta.$$

On a alors

$$\forall n \geq N, 0 \leq \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\Sigma(f_{2k'}) + \eta}{\varepsilon B^{k'}} \leq \frac{\Sigma(f_{2k'})}{\varepsilon B^{k'}} + \frac{\eta}{\varepsilon} \leq \frac{2\eta}{\varepsilon}.$$

On a bien montré, en revenant à la définition η -esque de la limite, que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) = 0}.$$

16. On a

$$\mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) \underset{\text{B.T.}}{\leq} \frac{\mathbb{V}(S_n(f_k))}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}((S_n(f_k))^2) - (\mathbb{E}(S_n(f_k)))^2}{\varepsilon^2}.$$

Or, d'après (H_k) , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbb{E}((S_n(f_k))^2) - (\mathbb{E}(S_n(f_k)))^2) = (\Sigma(f_k))^2 - (\Sigma(f_k))^2 = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) = 0}.$$

17. (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Grâce au théorème de Weierstrass, il existe un polynôme P tel que

$$\forall x \in [-B, B], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon/50 \text{ et } |\Sigma(f) - \Sigma(P)| \leq \varepsilon/50.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} |S_n(f) - \Sigma(f)| &\leq |S_n(f) - S_n(P)| + |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + |\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(P)| + |\Sigma(P) - \Sigma(f)| \\ &\leq |S_n(f) - S_n(P)| + |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + |\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(P)| + \varepsilon/50. \end{aligned}$$

Comme P est combinaison linéaire de fonctions f_k , l'hypothèse (H_k) implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n(P)) = \Sigma(P).$$

Il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$,

$$|S_n(f) - \Sigma(f)| \leq |S_n(f) - S_n(P)| + |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + 2\varepsilon/50.$$

Puis,

$$\begin{aligned} S_n(f) - S_n(P) &= \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda (f(\lambda) - P(\lambda)) \mathbf{1}_{|x| > B}(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda (f(\lambda) - P(\lambda)) \mathbf{1}_{|x| \leq B}(\lambda) \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda P(\lambda) \mathbf{1}_{|x| > B}(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda (f(\lambda) - P(\lambda)) \mathbf{1}_{|x| \leq B}(\lambda) \\ &= -S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B}) + \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda (f(\lambda) - P(\lambda)) \mathbf{1}_{|x| \leq B}(\lambda). \end{aligned}$$

De là,

$$|S_n(f) - S_n(P)| \leq |S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| + \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda \varepsilon/50 = |S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| + \varepsilon/50.$$

On a donc

$$\forall n \geq N, |S_n(f) - \Sigma(f)| \leq |S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| + |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + 3\varepsilon/50.$$

De là,

$$\forall n \geq N, |S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon \Rightarrow (|S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \varepsilon/4 \text{ ou } |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \varepsilon/4).$$

On a donc

$$\forall n \geq N, (|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \subset (|S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \varepsilon/4) \cup (|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \varepsilon/4).$$

Et donc

$$\boxed{\forall n \geq N, \mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \varepsilon/4) + \mathbb{P}(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \varepsilon/4)}.$$

(b) A l'aide de **16.**, on montre aisément (laissé au lecteur qui est arrivé au bout de ce corrigé !) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \varepsilon/4) = 0.$$

Et à l'aide de **15.**, on montre tout aussi aisément (à nouveau laissé au lecteur...) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n(P \mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \varepsilon/4) = 0.$$

Par domination,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) = 0}.$$