

Préliminaire

1. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est : $r^2 - \alpha r + 1 = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = \alpha^2 - 4$.

Si $|\alpha| > 2$, alors $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles $r_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ et il existe A et B $\in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

Comme $u_0 = 0$, on a $A + B = 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(r_1^n - r_2^n)$ et $A = u_1/(r_1 - r_2) = 1/\sqrt{\Delta}$.

$$\text{donc si } |\alpha| > 2, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}\right)^n - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}\right)^n}{2^n \sqrt{\alpha^2 - 4}}$$

Si $\alpha = 2$, alors 1 est racine double donc il existe A et B $\in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (An + B)1^n = An + B$.

$$\text{donc si } \alpha = 2, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$$

Si $\alpha = -2$, alors -1 est racine double donc il existe A et B $\in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (An + B)(-1)^n$.

$$\text{donc si } \alpha = -2, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -(-1)^n n$$

Si $|\alpha| < 2$, alors il y a deux racines complexes non réelles conjuguées : r et $\bar{r}$ en choisissant $\text{Im}(r) > 0$.

Par relation coefficients racines, on a $|r|^2 = r\bar{r} = 1$.

On peut donc écrire $r = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$ et on a $\alpha = r + \bar{r} = 2 \cos(\theta)$.

On a alors $\theta = \arccos(\alpha/2)$ et l'existence de A et B $\in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$

$$\text{donc si } |\alpha| < 2, \text{ alors en notant } \theta = \arccos(\alpha/2), \text{ on a } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

Toutefois vu la question 5c), la réponse attendue (calcul analogue au cas $|\alpha| > 2$) est sans doute

$$\text{si } |\alpha| < 2, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\left(\alpha + i\sqrt{4 - \alpha^2}\right)^n - \left(\alpha - i\sqrt{4 - \alpha^2}\right)^n}{2^n i \sqrt{4 - \alpha^2}}$$

Première Partie

2. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, alors avec les sommes de Riemann,

$$\text{on a } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f \text{ puis } v_n = S_{n+1} - \frac{f(1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ donc y est uniformément continue selon Heine.

Cela nous fournit $\alpha > 0$, tel que $\forall x, y \in [0, 1]$, $|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$|S_n - w_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) \right|$$

$$\text{or } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \frac{2k}{2n} - \frac{2k}{2n+1} = \frac{2k}{2n(2n+1)} \leq \frac{1}{2n+1} \text{ et } \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{On dispose alors de } N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N, \frac{1}{2n+1} \leq \alpha \text{ d'où } \forall n \geq N, |S_n - w_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon.$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |S_n - w_n| \leq \varepsilon$.

On a donc montré $|S_n - w_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et comme (S_n) converge alors (w_n) aussi et vers la même limite.

$$\text{Ainsi les suites } (v_n)_{n \geq 1} \text{ et } (w_n)_{n \geq 1} \text{ convergent vers la même limite } \int_0^1 f$$

3a. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$ est continue sur $] -2, 2[$.

Quand $x \rightarrow 2^-$, on a $f(x) \rightarrow f(2)$ par continuité de f donc $f(x) = \mathcal{O}(1)$.

De plus $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2+x} \cdot \sqrt{2-x} \sim 2(2-x)^{1/2}$, ainsi

$$\frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{(2-x)^{1/2}}\right)$$

or $x \mapsto \frac{1}{(2-x)^{1/2}}$ est intégrable en 2 car $1/2 < 1$.

Ainsi $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$ est intégrable en 2^- et de manière analogue intégrable en -2^+ .

D'où la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}}$ est intégrable sur $] -2, 2[$.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I(f) \text{ est absolument convergente donc convergente}}$

On effectue alors le changement de variable $x = 2 \cos(\theta)$; $dx = -2 \sin(\theta) d\theta$.

Or pour $\theta \in]0, \pi[$, on a $\sin(\theta) > 0$ donc $(-1)d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} = \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ainsi $\boxed{I(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(2 \cos(\theta))(-1)d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(2 \cos(\theta))d\theta}$

3b. On a $\boxed{I(f_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 d\theta = 1 \text{ et } I(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos(\theta) d\theta = [2 \sin(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0}$

et $\boxed{I(f_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \cos^2(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = 2}$

3c. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties on a

$$\pi I(f_{n+2}) = 2^{n+2} \int_0^{\pi} \cos(\theta) \cos^{n+1}(\theta) d\theta = 2^{n+2} [\sin(\theta) \cos^{n+1}(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + 2^{n+2}(n+1) \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \cos^n(\theta) d\theta$$

et comme $\sin^2 = 1 - \cos^2$, alors $\pi I(f_{n+2}) = (n+1)\pi (2^2 I(f_n) - I(f_{n+2}))$.

On a alors la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, I(f_{n+2}) = 4 \frac{n+1}{n+2} I(f_n)$$

Par récurrence immédiate, on a alors $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I(f_{2p+1}) = 0}$ car $I(f_1) = 0$ selon 3b.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient $I(f_{2p}) = 4 \frac{2p-1}{2p} I(f_{2p-2})$. Ainsi avec 3b

$$I(f_{2p}) = 4^p \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i-1}{2i} \right) I(f_0) = 4^p \frac{(2p)!}{\left(\prod_{i=1}^p 2i \right)^2}$$

Ainsi $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I(f_{2p}) = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \binom{2p}{p}}$

4a. Remarque : que 3a est valable pour une fonction continue par morceaux en mettant sous le tapis le changement de variable hors programme qui reste valable car $\mathcal{C}^1$ strictement monotone.

On considère la fonction $g : \theta \mapsto f(2 \cos(\theta))$ définie et continue sur $[0, \pi]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la variable aléatoire $f\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right) = g\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)$ prend un nombre fini de valeurs, elle est d'espérance finie et selon la formule de transfert

$$\mathbb{E}\left(f\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(U_n = k) g\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$$

Or la fonction $t \mapsto g(\pi t)$ est continue sur $[0, 1]$.

Ainsi selon 3a (avec (v_n)), on a $\mathbb{E}\left(f\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(\pi t) dt$.

Par changement de variable $\theta = \pi t$; $d\theta = \pi dt$, on a

$$\int_0^1 g(\pi t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(2 \cos(\theta)) d\theta = I(f)$$

Selon 3a, on a alors $\mathbb{E}\left(f\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx$

4b. Soit $y \in [-2, 2]$. On considère $f : \begin{cases} [-2, 2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq y \\ 1 & \text{si } x < y \end{cases} \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $f\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)$ est la fonction caractéristique de l'événement $\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right)$.

D'où $\mathbb{P}\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) = \mathbb{E}\left(f\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right)\right)\right)$

On considère $g : \theta \mapsto f(2 \cos(\theta))$ et en posant $\beta = \arccos(y/2)$, on a $g : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leq \beta \\ 1 & \text{si } \theta > \beta \end{cases} \end{cases}$

Ainsi g est continue par morceaux sur $[0, \pi]$, le résultat sur les rectangles de Riemann restent valables pour les fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$. Comme en 4a, en appliquant 3a qui reste valable, on a

$$\mathbb{P}\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(\pi t) dt = \int_0^{\beta/\pi} 0 dt + \int_{\beta/\pi}^1 1 dt = \frac{1}{\pi} (\pi - \beta)$$

comme l'intégrale est convergente et $\arccos$ est continue sur $[-1, 1]$, on a

$$\int_{-2}^y \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left[-\arccos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{x \rightarrow -2}^{x=y} = -\arccos\left(\frac{y}{2}\right) + \arccos(-1) = \pi - \beta$$

ce qui permet de conclure que $\mathbb{P}\left(2 \cos\left(\frac{\pi U_n}{n+1}\right) < y\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^y \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Deuxième partie

5a. On a $\chi_2(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1$ donc $\text{Sp}(T_2) = \{(-1, 1), (1, 1)\}$

et en développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\chi_3(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X\chi_2(X) - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - 2X$$

donc $\chi_3(X) = X^3 - 2X$ puis $\text{Sp}(T_3) = \{(-\sqrt{2}, 1), (0, 1), (\sqrt{2}, 1)\}$

5b. Soit $n \geq 4$. En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\chi_n(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & X & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X\chi_{n-1}(X) + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant selon la première ligne, on obtient $\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X)$

5c. On attribue alors la valeur $\chi_1(X) = X$ de façon à avoir $\forall n \geq 3$, $\chi_n(X) = X\chi_{n-1}(X) - \chi_{n-2}(X)$.

En reprenant la suite (u_n) de la question 1, il s'agit d'établir $\forall n \geq 1$, $\chi_n(\alpha) = u_{n+1}$.

Les deux suites vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$\forall n \geq 3, \begin{cases} u_{n+1} &= \alpha u_n - u_{n-1} \\ \chi_n(\alpha) &= \alpha \chi_{n-1}(\alpha) - \chi_{n-2}(\alpha) \end{cases}$$

et mêmes conditions initiales : $u_2 = \alpha u_1 - u_0 = \alpha = \chi_1(\alpha)$ et $u_3 = \alpha u_2 - u_1 = \alpha^2 - 1 = \chi_2(\alpha)$.

Les suites $(u_{n+1})_{n \geq 1}$ et $(\chi_n(\alpha))_{n \geq 1}$ sont donc égales.

En particulier $\forall n \geq 2$, $\chi_n(\alpha) = u_{n+1} = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right)$

5d. Pour a et $b \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a selon la formule du binôme :

$$(a+b)^p - (a-b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b^k a^{p-k} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{p}{k} (-b)^k a^{p-k} = 2 \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ k \text{ impair}}} \binom{p}{k} b^k a^{p-k} = 2 \sum_{j=0}^{\lfloor (p-1)/2 \rfloor} \binom{p}{2j+1} b^{2j+1} a^{p-2j-1}$$

Si $b \neq 0$ alors $\frac{(a+b)^p - (a-b)^p}{2^p b} = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor (p-1)/2 \rfloor} \binom{p}{2j+1} b^{2j} a^{p-2j-1}$.

Soit $\alpha \in]-2, 2[$. En l'appliquant à $a = \alpha$ et $b = i\sqrt{4-\alpha^2}$ et $p = n+1$, on a

$$\chi_n(\alpha) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} (4-\alpha^2)^j \alpha^{n-2j}$$

Comme deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini sont égaux, alors on a

$$\chi_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} (4-X^2)^j X^{n-2j}$$

or $\forall j \in [0, \lfloor n/2 \rfloor]$, $(4-X^2)^j X^{n-2j} = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} 4^k (-1)^{j-k} X^{n-2j+2(j-k)}$. Ainsi

Ainsi $\chi_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} 2^{2k} (-1)^{j-k} X^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{j=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \right) \left(\frac{X}{2} \right)^{n-2k}$

Remarque : $\chi_n(X)$ est de degré n et de même parité que n .

6. Soit $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\theta = \frac{k\pi}{n+1}$ et $\alpha = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 2 \cos(\theta)$.

Comme $0 < \theta < \pi$, on a $\sin(\theta) > 0$ et $|\alpha| < 2$, on peut donc appliquer 5c.

On a alors $\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} = \sqrt{\sin^2(\theta)} = \sin(\theta)$. Ainsi

$$\chi_n(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{4-\alpha^2}} \left(\left(\frac{\alpha + i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - i\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right)^{n+1} \right) = \frac{(e^{i\theta})^{n+1} - (e^{-i\theta})^{n+1}}{2i \sin(\theta)}$$

donc selon Euler :

$$\chi_n(\alpha) = \frac{2i \sin((n+1)\theta)}{2i \sin(\theta)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin(\theta)} = 0$$

Comme $\cos$ est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, on a trouvé n racines distinctes du polynôme χ_n qui est de degré n .

On peut conclure que $\boxed{\text{Sp}(T_n) = \left\{ \left(2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}}$

7. Par définition et selon 5d, on a

$$S_f(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n)} m_\lambda f(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)$$

En utilisant 2 avec la fonction continue sur $[0, 1] : t \mapsto f(2 \cos(t\pi))$ puis 3a, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(T_n) = \int_0^1 f(2 \cos(\pi t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(2 \cos(\theta)) d\theta = I(f)$$

on peut conclure que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(T_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx}$

8a. On a $T_n(a, b, c) = aI_n + T_n(0, b, c)$ donc $\chi_{T_n(a, b, c)}(X) = \det((X - a)I_n - T_n(0, b, c)) = \chi_{T_n(0, b, c)}(X - a)$. Ainsi

$$\boxed{\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{(\lambda + a, m_\lambda) \mid (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n(0, b, c))\}}$$

8b. Si $c = 0$ alors

$$\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \text{Sp}(T_n(a, b, 0)) = \{(a, n)\} = \text{Sp}(T_n(a, 0, 1)) = \text{Sp}(T_n(a, bc, 1))$$

Dans le cas où $c \neq 0$.

Je note t l'endomorphisme canoniquement associé à $T_n(0, b, c)$ et $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Je pose également $e_0 = e_{n+1} = 0$ et pour $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, je note $\varepsilon_i = c^i e_i$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$; de sorte que ε soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a alors $t(e_i) = be_{i-1} + ce_{i+1}$ donc

$$t(\varepsilon_i) = c^i t(e_i) = c^i be_{i-1} + c^{i+1} e_{i+1} = cb\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i+1}$$

Ainsi $\text{Mat}_\varepsilon(t) = T_n(0, bc, 1)$ or $\text{Mat}_e(t) = T_n(0, b, c)$

donc les matrices $T_n(0, bc, 1)$ et $T_n(0, b, c)$ sont semblables donc ont même spectre. Avec 8a, on a

$$\boxed{\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \{(\lambda + a, m_\lambda) \mid (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n(0, bc, 1))\}}$$

8c. On suppose $bc > 0$. On remarque que $T_n = T_n(0, 1, 1)$ et ainsi $T_n(0, b, b) = bT_n$.

Par conséquent comme $b \neq 0$, alors avec 6, on a

$$\text{Sp}(T_n(0, b, b)) = \{(b\lambda, m_\lambda) \mid (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n)\} = \left\{ \left(2b \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

De plus à l'aide de 8b, $(bc = \sqrt{bc} \times \sqrt{bc})$ on remarque que

$$\text{Sp}(T_n(0, bc, 1)) = \text{Sp}(T_n(0, \sqrt{bc}, \sqrt{bc})) = \left\{ \left(2\sqrt{bc} \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

On peut conclure avec 8a et 8b : $\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \left\{ \left(a + 2\sqrt{bc} \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), 1 \right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$

9a. Soit $n \geq 2$. On a $\text{Sp}(T_n(a, b, c)) = \left\{ (a + \sqrt{bc}\lambda, m_\lambda) \mid (\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(T_n) \right\}$

On note la fonction $g : x \mapsto f(a + \sqrt{bc}x)$ de sorte que g est continue sur $\mathbb{R}$ et $S_f(T_n(a, b, c)) = S_g(T_n)$

Alors avec 7, on a
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(T_n(a, b, c)) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{g(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{f(a + \sqrt{bc}x)}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

9b. Soit $n \geq 2$. Avec 8c, on a

$$q_n(y) = \left| \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a + 2\sqrt{bc} \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \leq y \right\} \right| = \left| \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \leq \frac{y-a}{\sqrt{bc}} \right\} \right|$$

Si $\frac{y-a}{\sqrt{bc}} \leq -2$ c'est à dire $y \leq a - 2\sqrt{bc}$ alors $q_n(y) = 0$.

Si $\frac{y-a}{\sqrt{bc}} \geq 2$ c'est à dire $y \geq a + 2\sqrt{bc}$ alors $q_n(y) = n$.

On suppose que $y \in]a - 2\sqrt{bc}, a + 2\sqrt{bc}[$ de sorte que $-2 < \frac{y-a}{\sqrt{bc}} < 2$.

On note $q'_n(y) = \left| \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) < \frac{y-a}{\sqrt{bc}} \right\} \right|$. Ainsi $q'_n(y) \leq q_n(y) \leq q'_n(y) + 1$.

De plus comme U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal n , on a

$$q'_n(y) = n\mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < \frac{y-a}{\sqrt{bc}} \right)$$

Ainsi en utilisant 4b, on a

$$\mathbb{P} \left(2 \cos \left(\frac{\pi U_n}{n+1} \right) < \frac{y-a}{\sqrt{bc}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{(y-a)/\sqrt{bc}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Or $\int_{-2}^{(y-a)/\sqrt{bc}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left[-\arccos \left(\frac{x}{2} \right) \right]_{x=-2}^{x=(y-a)/\sqrt{bc}} = \pi - \arccos \left(\frac{y-a}{2\sqrt{bc}} \right) > 0$.

Or $\forall \theta \in [0, \pi]$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. Ainsi quand $n \rightarrow +\infty$, on a

$$q'_n(y) \sim \frac{n}{\pi} \arccos \left(-\frac{y-a}{2\sqrt{bc}} \right) \sim 1 + q'_n(y)$$

On peut alors conclure que
$$q_n(y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq a - 2\sqrt{bc} \\ n & \text{si } y \geq a + 2\sqrt{bc} \\ \frac{n}{\pi} \arccos \left(\frac{a-y}{2\sqrt{bc}} \right) & \text{si } |y-a| < 2\sqrt{bc} \end{cases}$$

Troisième partie

10a. Soit $\kappa \in [0, \frac{1}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall x \in [0, \kappa]$, $0 < 1 - \kappa^n \leq 1 - x^n \leq 1$ donc par croissance de $t \mapsto t^{2^n}$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, \kappa], 0 \leq 1 - Q_n(x) \leq 1 - (1 - \kappa^n)^{2^n}$$

Or quand $n \rightarrow +\infty$, $2^n \ln(1 - \kappa^n) \sim -(2\kappa)^n \rightarrow 0$ donc par continuité de $\exp$

$$1 - (1 - \kappa^n)^{2^n} = 1 - \exp(2^n \ln(1 - \kappa^n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers $x \mapsto 1$ sur $[0, \kappa]$

De même quand $n \rightarrow +\infty$, on a $2^n \ln(1 - (1 - \kappa)^n) \sim -(2(1 - \kappa))^n \rightarrow -\infty$ ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [1 - \kappa, 1], 0 \leq Q_n(x) \leq (1 - (1 - \kappa)^n)^{2^n} \text{ et } (1 - (1 - \kappa)^n)^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers $x \mapsto 0$ sur $[1 - \kappa, 1]$

10b. Soit $\eta \in]0, 1]$. On pose $\kappa = \frac{1-\eta}{2}$ de sorte que $0 \leq \kappa < \frac{1}{2}$ et

$$\forall x \in [-1, 1], x < -\eta \Rightarrow 1 \geq \frac{1-x}{2} > \frac{1-\eta}{2} = 1 - \kappa \text{ et } x > \eta \Rightarrow 0 \leq \frac{1-x}{2} \leq \frac{1+\eta}{2} = \kappa$$

Soit $\varepsilon > 0$. La question 10a nous fournit N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall n \geq N_1, \forall t \in [0, \kappa], |Q_n(t) - 1| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \geq N_2, \forall t \in [1 - \kappa, 1], |Q_n(t)| \leq \varepsilon$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = Q_n((1 - X)/2)$, alors en prenant $N = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\forall n \geq N, \forall x \in]\eta, 1], |P_n(x) - 1| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \geq N, \forall x \in [-1, -\eta[, |P_n(x)| \leq \varepsilon$$

On a ainsi montré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1] \setminus [-\eta, \eta], \forall n \geq N, |H(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

c'est à dire $\boxed{\text{la suite } (P_n)_{n \geq 0} \text{ converge uniformément vers } H \text{ sur } [-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]}$

11. f est continue sur le segment $[-1, 1]$ donc y est uniformément continue. On dispose alors de $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [-1, 1], |x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

De plus comme $2/(p+1) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, on dispose d'un entier $N \geq 1$ tel que $\frac{2}{N+1} \leq \alpha$.

On pose alors pour $i \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, $c_i = -1 + \frac{2i}{N+1}$ de sorte que

$$-1 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_N < c_{N+1} = 1 \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket, 0 < c_{i+1} - c_i \leq \alpha$$

On a alors construit une subdivision régulière de $[-1, 1]$ de pas $\leq \alpha$.

On pose alors pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $a_i = f(c_i) - f(c_{i-1})$ ainsi $a_i \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ car $0 < c_i - c_{i-1} \leq \alpha$ et

$$\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket, \sum_{i=1}^N a_i H(c_j - c_i) = \sum_{i=1}^j (f(c_i) - f(c_{i-1})) \cdot 1 + \sum_{i=j+1}^N (f(c_i) - f(c_{i-1})) \cdot 0 = f(c_j) - f(-1) = f(c_j)$$

Soit $x \in [-1, 1[$. On dispose d'un unique $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tel que $x \in [c_j, c_{j+1}[$ et ainsi $0 \leq x - c_j \leq \alpha$.

Or la fonction $t \mapsto \sum_{i=1}^N a_i H(t - c_i)$ est constante sur $[c_j, c_{j+1}[$. Ainsi

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| = |f(x) - f(c_j)| \leq \varepsilon$$

De plus

$$\left| f(1) - \sum_{i=1}^N a_i H(1 - c_i) \right| = \left| f(1) - \sum_{i=1}^N a_i \right| = |f(c_{N+1}) - f(c_N)| \leq \varepsilon$$

Ainsi il existe un entier $N \geq 1$, des réels $-1 < c_1 < c_2 < \dots < c_N < 1$ et $(a_1, \dots, a_N) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$ tels que

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad \left| f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon}$$

12. On considère dans un premier temps que $f(-1) = 0$.

On reprend $\alpha \geq 0$ de la question précédente, $N \in \mathbb{N}^*$ et la subdivision régulière $(c_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ de $[-1, 1]$ de

$$\text{pas} \leq \alpha \text{ et les } a_i \in [-\varepsilon, \varepsilon] \text{ tels que } \forall x \in [-1, 1], \quad \left| f(x) - \sum_{i=1}^N a_i H(x - c_i) \right| \leq \varepsilon.$$

On pose $\eta = (c_1 - c_0)/3$ de sorte que $0 < \eta \leq 1$ et les intervalles $[c_i - \eta, c_i + \eta]$ soient deux à deux disjoints. Selon 10, (P_n) converge uniformément vers H sur $[-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]$, on dispose alors de $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall t \in [-1, 1] \setminus [-\eta, \eta], \quad |H(t) - P_n(t)| \leq \frac{1}{N}$$

Comme préconisé, on pose alors le polynôme $F(X) = \sum_{i=1}^N a_i P_n(X - c_i)$ et par inégalité triangulaire

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |f(x) - F(x)| \leq \sum_{i=1}^N |a_i| \cdot |H(x - c_i) - P_n(x - c_i)| + \varepsilon \leq \varepsilon \left(1 + \sum_{i=1}^N |H(x - c_i) - P_n(x - c_i)| \right)$$

Soit $x \in [-1, 1]$.

Si il existe (unique) $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x \in [c_j - \eta, c_j + \eta]$, alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$, $x - c_i \in [-1, 1] \setminus [-\eta, \eta]$.

Alors dans ce cas

$$|f(x) - F(x)| \leq \varepsilon \left(1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{N} + |H(x - c_j) - P_n(x - c_j)| \right) \leq \varepsilon (2 + |H(x - c_j)| + |P_n(x - c_j)|)$$

Soit $t \in [-1, 1]$. on a $0 \leq (1 - t)/2 \leq 1$ ainsi $P_n(t) = Q_n((1 - t)/2) \in [0, 1]$.

donc $|P_n(x - c_j)| \leq 1$ et $|H(x - c_j)| \leq 1$ par construction de H .

Ainsi dans ce cas $|f(x) - F(x)| \leq 4\varepsilon$.

Si $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x \notin [c_j - \eta, c_j + \eta]$, alors de même $|f(x) - F(x)| \leq 2\varepsilon$.

En travaillant avec $\varepsilon' = \varepsilon/4$, on a $\varepsilon' > 0$ et on peut à l'aide d'une construction analogue, obtenir un polynôme G tel que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |f(x) - G(x)| \leq \varepsilon$$

On s'intéresse au cas général ($f(-1)$ éventuellement non nul). On pose $g : x \mapsto f(x) - f(-1)$.

Comme g est continue sur $[-1, 1]$ et $g(-1) = 0$, alors on obtient un polynôme G tel que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |g(x) - G(x)| \leq \varepsilon$$

On pose alors le polynôme $P = G(X) + f(-1)$

de sorte que $\boxed{P \in \mathbb{R}[X] \text{ vérifiant } \forall x \in [-1, 1], \quad |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon}$

Quatrième partie

13a. Soit $\omega \in \Omega$. On note $M = X_n(\omega)$ de sorte que $\text{Tr}(X_n^k)(\omega) = \text{Tr}(M^k)$ et $S_n(f_k) = \frac{1}{n} \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(M)} m_\lambda \lambda^k$.

On remarque que M est symétrique réelle. Ainsi le théorème spectral nous fournit $P \in \Omega(n)$ et : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres de M tel que $M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$.

Alors $M^k = P \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$ et la trace étant un invariant de similitude, on a

$$\text{Tr}(X_n^k)(\omega) = \text{Tr}(M^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(M)} m_\lambda \lambda^k = n S_n(f_k)(\omega)$$

Ainsi on a bien égalité des variables aléatoires $S_n(f_k) = \frac{1}{n} \text{Tr}(X_n^k)$

13b. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$4I(f_k) - I(f_{k+2}) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 \frac{4x^k - x^{k+2}}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 x^k \sqrt{4-x^2} dx = 2\Sigma(f_k)$$

Si k est impair, alors $k+2$ aussi et on a $\Sigma(f_k) = 0$ selon 3c.

Si k est pair, on peut écrire $k = 2p$ et $k+2 = 2(p+1)$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors avec 3c, on a

$$\Sigma(f_{2p}) = 4I(f_{2p}) - I(f_{2(p+1)}) = \frac{1}{2} \left(4 \binom{2p}{p} - \binom{2p+2}{p+1} \right) = \frac{(2p)! \times (4(p+1)^2 - (2p+2)(2p+1))}{2((p+1)!)^2}$$

donc

$$\Sigma(f_{2p}) = \frac{(2p)! \times ((2p+2) - (2p+1))}{p!((p+1)!)^2} = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}$$

$$\text{Ainsi } \Sigma(f_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{\binom{k}{k/2}}{1+k/2} = \frac{k!}{(1+k/2)! \times (k/2)!} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

13c. Pour $k = 0$, on a $\text{Tr}((X_n)^0) = \text{Tr}(I_n) = n$ et $\Sigma(f_0) = \frac{0!}{(1+0/2)! \times (0/2)!} = 1$ Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^0)) = 1 = \Sigma(f_0) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^0)^2) = 1 = \Sigma(f_0)^2 \quad (H_0)$$

Pour $k = 1$, on a $\Sigma(f_1) = 0$ et $\text{Tr}((X_n)^1) = \sum_{i=1}^n (X_n)_{i,i} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n W_{i,i}$ donc

$$\mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^1)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(W_{i,i}) = 0$$

On remarque si $Y \in L^2$ est centrée alors $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(Y^2)$.

Ainsi par indépendance des $W_{i,i}$ et car $\forall k \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq i \leq j \leq n, W_{i,j}^k \in L^1$, on a :

$$\mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^1)^2) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n W_{i,i}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(W_{i,i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(W_{i,i}^2) = 1$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^1)) = 0 = \Sigma(f_1) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^1)^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 = \Sigma(f_1)^2 \quad (H_1)$$

Pour $k = 2$, on a $\Sigma(f_2) = \frac{2!}{(1+2/2)! \times (2/2)!} = 1$.

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En reconnaissant le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(M^\top M) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2$$

Ainsi en notant $W_{j,i} = W_{i,j}$ pour $1 \leq j < i$, on a

$$\mathbb{E}\left(\text{Tr}\left((X_n)^2\right)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} X_{i,j}^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbb{E}(W_{i,j}^2) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 = n$$

$$\begin{aligned} \text{et } n^2 \text{Tr}\left((X_n)^2\right)^2 &= n^2 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} X_{i,j}^2\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n W_{i,i}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} W_{i,j}^2\right)^2 \text{ donc} \\ n^2 \text{Tr}\left((X_n)^2\right)^2 &= \sum_{i=1}^n W_{i,i}^4 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} W_{i,i}^2 W_{j,j}^2 + 4 \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k < \ell \leq n}} W_{i,j}^2 W_{k,\ell}^2 + 4 \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq i < j \leq n} W_{m,m}^2 W_{i,j}^2 \end{aligned}$$

$$\text{On a } \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n W_{i,i}^4\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(W_{i,i}^4) = n \mathbb{E}(W_{1,1}^4).$$

Par linéarité et indépendance des $W_{i,j}^2$ et $W_{k,\ell}^2$ pour $(i,j) \neq (k,\ell)$, selon le lemme des koalas :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} W_{i,i}^2 W_{j,j}^2\right) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbb{E}(W_{i,i}^2) \mathbb{E}(W_{j,j}^2) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} 1 = n^2 - n$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq i < j \leq n} W_{m,m}^2 W_{i,j}^2\right) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(W_{m,m}^2) \mathbb{E}(W_{i,j}^2) = \sum_{m=1}^n \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \frac{n^2(n-1)}{2}$$

enfin

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k < \ell \leq n \\ (i,j) \neq (k,\ell)}} W_{i,j}^2 W_{k,\ell}^2\right) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k < \ell \leq n \\ (i,j) \neq (k,\ell)}} \mathbb{E}(W_{i,j}^2) \mathbb{E}(W_{k,\ell}^2) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(W_{i,j}^4) = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 + \mathbb{E}(W_{1,1}^4)\right)$$

d'où

$$n^2 \mathbb{E}\left(\text{Tr}\left((X_n)^2\right)^2\right) = n \mathbb{E}(W_{1,1}^4) + n^2 - n + \frac{n^2(n-1)}{2} + 4 \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 + \mathbb{E}(W_{1,1}^4)\right)$$

et ainsi

$$n^2 \mathbb{E}\left(\text{Tr}\left((X_n)^2\right)^2\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^4$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\text{Tr}\left((X_n)^2\right)\right) = 1 = \Sigma(f_2) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left(\text{Tr}\left((X_n)^2\right)^2\right) = 1 = \Sigma(f_2)^2 \quad (\text{H}_2)$$

On a vérifié que $\boxed{(\text{H}_k) \text{ est vraie, pour tout } 0 \leq k \leq 2}$

14. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $g_{k,B}$ est à valeurs positives, $S_n(g_{k,B}) = S(g_{k,B})(X_n)$ aussi alors selon Markov, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(g_{k,B}))}{\varepsilon}$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, g_{k,B}(x) \leq \frac{f_{2k}(x)}{B^k} \text{ car } g_{k,B}(x) = \begin{cases} 0 \leq x^{2k}/B^k & \text{si } |x| \leq B \\ |x|^k \leq x^{2k}/B^k & \text{si } |x| > B \end{cases} \text{ donc}$$

$$0 \leq S_n(g_{k,B}) = \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda g_{k,B}(\lambda) \leq \sum_{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n)} m_\lambda \frac{f_{2k}(\lambda)}{B^k} = \frac{S_n(f_{2k})}{B^k}$$

or selon 13, $S_n(f_{2k}) = \frac{1}{n} \text{Tr}(X_n^k) \in L^1$ car les $W_{i,j}^p \in L^1$ et sont indépendantes.

Par linéarité et croissance de l'espérance, on a $\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2k}))}{\varepsilon B^k}$

15. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq k$.

Comme $B \geq 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| > B$ alors

$$g_{k,B}(x) = |x|^k \leq |x|^m = g_{m,B}(x) \text{ et sinon } g_{k,B}(x) = 0 = g_{m,B}(x)$$

Ainsi $g_{k,B} \leq g_{m,B}$ et comme en 14, on a $S_n(g_{k,B}) \leq S_n(g_{m,B})$.

Par conséquent :

$$(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \subset (S_n(g_{m,B}) \geq \varepsilon)$$

Avec 14, on a alors

$$\mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(S_n(g_{m,B}) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2m}))}{\varepsilon B^m}$$

Or à l'aide de 13a et de l'hypothèse (H_{2m}) , on a

$$(\heartsuit) : \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2m}))}{\varepsilon B^m} = \frac{\mathbb{E}(\text{Tr}((X_n)^{2m}))}{n \varepsilon B^m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\Sigma(f_{2m})}{\varepsilon B^m}$$

Selon Stirling et comme $B > 4$, on a quand $m \rightarrow +\infty$, avec 13(b)

$$\frac{\Sigma(f_{2m})}{\varepsilon B^m} = \frac{(2m)!}{m! \cdot (m+1)! \varepsilon B^m} \sim \frac{\sqrt{4\pi m}}{2\pi m(m+1)B^m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m} \left(\frac{e}{m}\right)^{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} m^{3/2}} \left(\frac{4}{B}\right)^m \rightarrow 0$$

Soit $\eta > 0$. On dispose alors de $m \geq k$ tel que

$$\frac{\Sigma(f_{2m})}{\varepsilon B^m} \leq \eta/2 < \eta$$

Alors selon $(\heartsuit)$, par relèvement des inégalités, on peut conclure que l'on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \frac{\mathbb{E}(S_n(f_{2m}))}{\varepsilon B^m} \leq \eta$$

On a alors établi :

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) \leq \eta$$

Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n(g_{k,B}) \geq \varepsilon) = 0$

16. Comme en 13c, on a $S_n(f_k) \in L^2$, alors selon Pafnouti et Jules-Irénée, on a

$$\mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n(f_k))}{\varepsilon^2}$$

Avec Huygens et selon 13a, on a :

$$\mathbb{V}(S_n(f_k)) = \mathbb{E}((S_n(f_k))^2) - \mathbb{E}(S_n(f_k))^2 = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^k)^2) - \left(\frac{1}{n} \mathbb{E}(\text{Tr}(X_n^k))\right)^2$$

Alors selon l'hypothèse (H_k) , on a $\mathbb{V}(S_n(f_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Sigma(f_k)^2 - \Sigma(f_k)^2 = 0$

Par théorème d'encadrement, on peut conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n(f_k) - \mathbb{E}(S_n(f_k))| \geq \varepsilon) = 0$.

17a. On sait (théorème de Weierstrass) qu'il existe un polynôme P tel que $\|f - P\|_{\infty, [-B, B]} \leq \frac{\varepsilon}{8}$. Pour ce polynôme P , on a

$$|\Sigma(f) - \Sigma(P)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 |f(x) - P(x)| \sqrt{4 - x^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{8} \Sigma(f_0) = \frac{\varepsilon}{8}$$

mais aussi (f prenant des valeurs nulles hors de $[-B, B]$)

$$|S_n(f) - S_n(P\mathbf{1}_{|x| \leq B})| \leq \frac{1}{n} \sum_{\substack{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n) \\ |\lambda| \leq B}} m_\lambda |f(\lambda) - P(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{8n} \sum_{\substack{(\lambda, m_\lambda) \in \text{Sp}(X_n) \\ |\lambda| \leq B}} m_\lambda \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

Par ailleurs, en combinant linéairement les relations de 13(a) et avec les hypothèses (H_k) , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n(P)) = \Sigma(P)$$

et ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |\mathbb{E}(S_n(P)) - \Sigma(P)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On a ainsi (puisque $S_n(P\mathbf{1}_{|x| \leq B}) + S_n(P\mathbf{1}_{|x| > B}) = S_n(P)$ et par inégalité triangulaire)

$$\begin{aligned} (|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) &\subset (|S_n(f) - S_n(P\mathbf{1}_{|x| \leq B})| + |S_n(P) - \Sigma(P)| \\ &\quad + |S_n(P\mathbf{1}_{|x| > B})| + |\Sigma(P) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \\ &\subset \left(|S_n(P) - \Sigma(P)| + |S_n(P\mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \frac{3\varepsilon}{4} \right) \end{aligned}$$

et pour $n \geq N$, comme $|S_n(P) - \Sigma(P)| \leq |S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + \frac{\varepsilon}{4}$, alors

$$\begin{aligned} (|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) &\subset \left(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| + |S_n(P\mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\subset \left(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right) \cup \left(|S_n(P\mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right) \end{aligned}$$

Il suffit de passer aux probabilités pour conclure que (pour $n \geq N$)

$$\mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|S_n(P) - \mathbb{E}(S_n(P))| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) + \mathbb{P}\left(|S_n(P\mathbf{1}_{|x| > B})| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

17b. Il nous suffit de montrer que les deux termes du membre de droite sont de limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$ (pour un P désormais fixé).

Les questions 15 et 16 montrent le résultat quand P est un monôme. Il n'est alors pas difficile de conclure (en combinant linéairement) dans le cas général.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n(f) - \Sigma(f)| \geq \varepsilon) = 0$$