

Résumé

Le sujet propose de retrouver certains résultats liés au modèle d'Ising-Curie-Weiss étudiant la configuration collective de particules à deux états (spins). La première partie fournit les résultats mathématiques utiles pour les deux suivantes (cf. ci-dessous). Les parties II et III sont indépendantes et correspondent à deux modèles différents : hamiltonien d'Ising sur un réseau en partie II, hamiltonien de Curie-Weiss en partie III. La partie III montre l'existence d'un ou deux états stables selon la valeur des paramètres en jeu.

Premier résultat démontré en partie I : si $(g_n)_n$ est une suite de fonctions convexes dérivables convergeant simplement vers une fonction g :

- alors g est convexe
- si g est dérivable, alors $(g'_n)_n$ converge simplement vers g' .

Deuxième résultat démontré en partie I : si U est un convexe de $\mathbb{R}^d$ et pour $g \in C^2(U, \mathbb{R})$, g est convexe sur U si et seulement si la hessienne de g est symétrique positive sur U .

Troisième résultat démontré en partie I : si X est une VA à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la fonction $\lambda \in \mathbb{R}^d \mapsto E(e^{\lambda \cdot X})$ est log-convexe sur $\mathbb{R}^d$.

I Première partie

Question 1. Soit $h, t > 0$. On utilise l'inégalité des pentes :

$$\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \leq \frac{g(x+t) - g(x)}{t}$$

et on fait tendre t vers 0.

De même, pour la majoration, on fixe $t, h > 0$ et on utilise cette inégalité des pentes :

$$\frac{g(x) - g(x-t)}{t} \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

et on fait tendre t vers 0.

Question 2. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0; 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(tx + (1-t)y) \leq tf_n(x) + (1-t)f_n(y)$$

et on fait tendre $n \rightarrow +\infty$.

Question 3. On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et convexe, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \text{ et } f''_n(x) = \frac{1}{n(x^2 + \frac{1}{n})^{3/2}} > 0$$

Or $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$ et $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

XXX Dessin XXX.

Question 4. On fixe $\varepsilon > 0$. On fixe $h > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - f'(x) \right| \leq \varepsilon \text{ et } \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \varepsilon$$

Par ailleurs, par convergence simple, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left| \frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right| \leq \varepsilon$$

et

$$\left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, d'après l'encadrement de la question 1, on a

$$\forall n \geq N, f'(x) - 2\varepsilon \leq f'_n(x) \leq f'(x) + 2\varepsilon$$

Ceci donne que $f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f'(x)$.

Question 5. Soit $u, x \in \mathbb{R}^d$. On considère $g_{x,u} : t \mapsto g(x+tu)$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction $g_{x,u}$ est C^2 , et elle est convexe d'après la définition donnée en introduction du sujet.

De plus,

$$g''_{x,u}(t) = u^\top H_g(x+tu)u$$

où $H_g(v)$ désigne la matrice hessienne de g en le point $v \in \mathbb{R}^d$, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$.

Ainsi, en évaluant en $t = 0$, on obtient

$$\forall x, u \in \mathbb{R}^d, u^\top H_g(x)u \geq 0$$

La matrice H_g est symétrique d'après le théorème de Schwarz, à coefficients réels, et elle est à spectre positif d'après l'inégalité ci-dessus. C'est la conclusion recherchée.

Question 6. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in]0; 1[$. On considère la fonction $g_{x,y} : t \mapsto g(y + t(x-y))$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $g_{x,y}$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ et convexe, puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, g''_{x,y}(t) = (x-y)^\top H_g(y + t(x-y))(x-y) \geq 0$$

Ainsi, on a

$$g_{x,y}(\alpha) \leq \alpha g_{x,y}(1) + (1-\alpha)g_{x,y}(0)$$

c'est-à-dire

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y).$$

Question 7. On note pour cette question $\mathcal{E}$ le sous-ensemble des valeurs de $\mathbb{R}^d$ constitué des valeurs prises par la variable aléatoire vectorielle X , et $p_a = P(X = a)$ pour tout $a \in \mathcal{E}$. On notera naturellement $a_1, \dots, a_d$ les composantes de tout élément $a \in \mathcal{E}$.

Soit $\psi : \lambda \mapsto E \left[\exp \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k X_k \right) \right]$.

Alors, par théorème de transfert, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \sum_{a \in \mathcal{E}} p_a \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k a_k \right)$$

Ainsi, on voit que ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$ par composition et donc ϕ aussi.
De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et tous $i, j \in \llbracket 1; d \rrbracket$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} = \sum_{a \in \mathcal{E}} a_i p_a \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k a_k \right) = E(X_i e^{\lambda \cdot X})$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = \sum_{a \in \mathcal{E}} a_i a_j p_a \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k a_k \right) = E(X_i X_j e^{\lambda \cdot X}).$$

On en déduit les dérivées partielles voulues, par dérivation logarithmique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i} = \frac{E(X_i e^{\lambda \cdot X})}{E(e^{\lambda \cdot X})}$$

et

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = \frac{E(X_i X_j e^{\lambda \cdot X}) E(e^{\lambda \cdot X}) - E(X_i e^{\lambda \cdot X}) E(X_j e^{\lambda \cdot X})}{E(e^{\lambda \cdot X})^2}$$

Question 8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$. On étudie le signe de $h(u) = E(e^{\lambda \cdot X})^2 \cdot u^\top H_\phi(\lambda) u$:

$$\begin{aligned} u^\top H_\phi u &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} u_i u_j [E(X_i X_j e^{\lambda \cdot X}) E(e^{\lambda \cdot X}) - E(X_i e^{\lambda \cdot X}) E(X_j e^{\lambda \cdot X})] \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq d} [E(u_i X_i u_j X_j e^{\lambda \cdot X}) E(e^{\lambda \cdot X}) - E(u_i X_i e^{\lambda \cdot X}) E(u_j X_j e^{\lambda \cdot X})] \\ &= E((u \cdot X)^2 e^{\lambda \cdot X}) E(e^{\lambda \cdot X}) - (E(u \cdot X e^{\lambda \cdot X}))^2 \end{aligned}$$

La positivité de cette quantité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$E((u \cdot X) e^{\frac{1}{2} \lambda \cdot X} e^{\frac{1}{2} \lambda \cdot X})^2 \leq E((u \cdot X)^2 e^{\lambda \cdot X}) E(e^{\lambda \cdot X})$$

Ainsi, ϕ est convexe sur $\mathbb{R}^d$ d'après l'équivalence démontrée aux questions 5 et 6.

II Deuxième partie

Question 9. Pour $h \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, on utilise l'indépendance mutuelle des σ_i :

$$Z_{N+1}(0, h) = E[e^{h(\sigma_1 + \dots + \sigma_{N+1})}] = E[e^{h(\sigma_1 + \dots + \sigma_N)}] E(e^{h\sigma_{N+1}})$$

En utilisant le théorème de transfert,

$$E(e^{h\sigma_{N+1}}) = \frac{1}{2}(e^h + e^{-h}) = \text{ch}(h).$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$F_N(0, h) = \frac{1}{N} \ln(\text{ch}^N(h)) = \ln(\text{ch}(h))$$

Question 10. Pour tous $h, \beta \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln \left(E \left[e^{(\beta, h) \cdot (A, B)} \right] \right)$$

où $A = \sigma_1 \sigma_2 + \dots + \sigma_N \sigma_1$ et $B = \sigma_1 + \dots + \sigma_N$ sont deux variables aléatoires à support fini. On est donc dans le cadre du résultat de la question 8, avec $d = 2$. D'où la fonction F_N est convexe.

Question 11. Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$X^2 - 2e^\beta \operatorname{ch}(h)X + 2\operatorname{sh}(2\beta)$$

Son discriminant est $4(e^{2\beta} \operatorname{ch}^2(h) - 2\operatorname{sh}(2\beta))$. Notons qu'il est strictement positif car $\operatorname{ch}(h) \geq 1$ et $e^u > 2\operatorname{sh}(u)$ pour tout $u \geq 0$.

Ceci montre que la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes. La plus grande des deux est

$$e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}^2(h) - 2\operatorname{sh}(2\beta)}$$

soit l'expression recherchée.

Question 12. Il suffit de mettre en forme l'expression donnée de $H_N(\beta, h, a)$:

$$\begin{aligned} H_N(\beta, h, a) &= \sum_{i=1}^{N-1} (\beta a_i a_{i+1} + h a_i) + (\beta a_N a_1 + h a_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \ln(B_{a_i, a_{i+1}}) + \ln(B_{a_N, a_1}). \end{aligned}$$

Question 13. On peut montrer par récurrence sur $p \geq 2$ la formule suivante :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; 2 \rrbracket, A^p[i, j] = \sum_{i_1, \dots, i_{p-1} \in \{1, 2\}} a_{i, i_1} a_{i_1, i_2} \dots a_{i_{p-1}, j}$$

On en déduit, pour tout $N \geq 2$:

$$\operatorname{Tr}(A^N) = \sum_{i_1, \dots, i_N \in \{1, 2\}} a_{i_1, i_2} \dots a_{i_{N-1}, i_N} a_{i_N, i_1}.$$

Or on a :

$$A^\top = \begin{pmatrix} B_{-1, -1} & B_{-1, 1} \\ B_{1, -1} & B_{1, 1} \end{pmatrix}$$

(avec la transposée, l'ordre $-1 < 1$ rend l'écriture des coefficients plus naturelle). D'où

$$\operatorname{Tr}(A^N) = \operatorname{Tr}((A^\top)^N) = \sum_{i_1, \dots, i_N \in \{-1, 1\}} B_{i_1, i_2} \dots B_{i_{N-1}, i_N} B_{i_N, i_1}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2^N} \operatorname{Tr}(A^N) = E[B_{\sigma_1, \sigma_2} \dots B_{\sigma_{N-1}, \sigma_N} B_{\sigma_N, \sigma_1}]$$

c'est-à-dire $Z_N(\beta, h) = 2^{-N} \operatorname{Tr}(A^N)$.

Question 14. On note

$$\mu(\beta, h) = e^\beta \operatorname{ch}(h) - \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}^2(h) - 2 \operatorname{sh}(2\beta)}$$

il s'agit de l'autre valeur propre de A .

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} F_N(\beta, h) &= \frac{1}{N} \ln(\lambda(\beta, h)^N + \mu(\beta, h)^N) - \ln(2) \\ &= \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln(2) + \frac{1}{N} \ln \left(1 + \left(\frac{\mu(\beta, h)}{\lambda(\beta, h)} \right)^N \right) \end{aligned}$$

On note que $0 \leq \mu(\beta, h) < \lambda(\beta, h)$ d'où

$$F_N(\beta, h) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln(2).$$

Question 15. Il suffit de vérifier que la racine carrée ne s'annule jamais, ce qui est bien le cas puisque le discriminant du polynôme caractéristique de A est non nul (vu en question 11).

Question 16. D'après la question 7, on a $m_N(\beta, h) = \frac{\partial F_N(\beta, h)}{\partial h}$.

Les fonctions F_N sont toutes convexes d'après la question 10 et la fonction $f : h \mapsto \ln(\lambda(\beta, h))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la question 15.

La question 14 établit la convergence simple des fonctions $h \mapsto F_N(h)$ vers la fonction $h \mapsto \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln(2)$.

Ainsi, d'après la question 4, on en déduit

$$m_N(\beta, h) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial h} \ln(\lambda(\beta, h)).$$

Question 17. Soit $\beta > 1$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g_\beta(h) &= \ln \left(e^\beta \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}^2(h) - 2 \operatorname{sh}(2\beta)} \right) - \beta \\ &= \ln \left(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - \frac{2 \operatorname{sh}(2\beta)}{e^{2\beta}}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g_\beta(h) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \ln(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - 1}) = \ln(\operatorname{ch}(h) + |\operatorname{sh}(h)|)$$

En distinguant les cas $h \geq 0$ et $h < 0$, on obtient bien que

$$\operatorname{ch}(h) + |\operatorname{sh}(h)| = e^{|h|}$$

et, avec cela, la conclusion voulue.

Question 18. D'après les calculs précédents, on a

$$g_\beta(h) = \ln(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - 1 + e^{-4\beta}})$$

d'où

$$g'_\beta(h) = \operatorname{sh}(h) \cdot \frac{1 + \frac{\operatorname{ch}(h)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - 1 + e^{-4\beta}}}}{\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - 1 + e^{-4\beta}}}$$

On distingue alors plusieurs cas :

$$— \text{ si } h = 0 : g'_\beta(0) = 0 \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0.$$

$$— \text{ si } h \neq 0 : g'_\beta(h) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \text{sh}(h) \frac{1 + \frac{\text{ch}(h)}{|\text{sh}(h)|}}{\text{ch}(h) + |\text{sh}(h)|} = \frac{\text{sh}(h)}{|\text{sh}(h)|}$$

D'où

$$g'_\beta(h) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 \text{ si } h > 0 \\ 0 \text{ si } h = 0 \\ -1 \text{ si } h < 0 \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme, car les g'_β sont continues sur $\mathbb{R}$ et la limite simple ne l'est pas. On peut aussi dire que, si la convergence était uniforme, alors la limite simple de la suite $(g_\beta)_\beta$ serait dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas.

III Troisième partie

Question 19. Ceci provient du fait que $u \ln(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$.

Question 20. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note que $\frac{NS_N + N}{2}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, \frac{1}{2})$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} — & \text{ pour } x \notin \mathcal{M}_N, P(S_N = x) = 0 \\ — & \text{ pour } x \in \mathcal{M}_N, P(S_N = x) = P\left(\frac{NS_N + N}{2} = \frac{N(x+1)}{2}\right) = \binom{N}{\frac{N(x+1)}{2}} \frac{1}{2^N}. \end{aligned}$$

Question 21. On utilise l'équivalent de Stirling :

$$\begin{aligned} P(S_N = u_N) &= \frac{N!}{\frac{N(1+u_N)}{2}! \frac{N(1-u_N)}{2}!} \frac{1}{2^N} \\ &\stackrel{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\left(\frac{1+u_N}{2}\right)^{\frac{N(1+u_N)}{2}} \left(\frac{1-u_N}{2}\right)^{\frac{N(1-u_N)}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi \frac{N(1+u_N)}{2}} \sqrt{2\pi \frac{N(1-u_N)}{2}}} \frac{1}{2^N} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

Alors :

$$-\frac{1}{N} \ln(P(S_N = u_N)) \stackrel{N \rightarrow +\infty}{=} \frac{1+u_N}{2} \ln\left(\frac{1+u_N}{2}\right) + \frac{1-u_N}{2} \ln\left(\frac{1-u_N}{2}\right) + \ln(2) + o(1).$$

D'où

$$-\frac{1}{N} \ln(P(S_N = u_N)) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} I(x) + \ln(2).$$

Question 22. Ceci provient du théorème de transfert :

$$G_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln \left(\sum_{x \in \mathcal{M}_N} P(S_N = x) \cdot e^{\beta N x^2 + h N x} \right)$$

Tous les termes de la somme étant positifs, on a, pour n'importe quel $x \in \mathcal{M}_N$:

$$G_N(\beta, h) \geq \frac{1}{N} \ln(P(S_N = x)) + \beta x^2 + h x.$$

Question 23. Soit $\beta \in \mathbb{R}_+$ et $h \in \mathbb{R}$.

La fonction $\psi_{\beta, h}$ est C^∞ sur $] -1; 1[$, et, pour $x \in] -1; 1[$:

$$\psi'_{\beta, h}(x) = 2\beta x + h - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

puis

$$\psi''_{\beta,h}(x) = 2\beta - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(1-x)} = \frac{2\beta - 1 - 2\beta x^2}{1-x^2}.$$

On distingue deux cas :

- si $\beta \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$: $\psi''_{\beta,h}(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-1; 1[$
- si $\beta > \frac{1}{2}$: $\psi''_{\beta,h}(x) \leq 0$ si et seulement $x \in \left]-1; -\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}\right] \cup \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}; 1\right[$.

Question 24. Soit $\beta \geq 0$ et $h > 0$. D'après le prolongement acquis en question 19, la fonction $\psi_{\beta,h}$ est continue sur le segment $[-1; 1]$ donc atteint son maximum sur $[-1; 1]$.

De plus, on note que $x \mapsto \psi_{\beta,h}(x) - hx$ est paire, de sorte que

$$\forall x > 0, \psi_{\beta,h}(x) > \psi_{\beta,h}(-x) \quad (\star)$$

Ainsi, le maximum de $\psi_{\beta,h}$ est nécessairement atteint sur $[0; 1]$.

Par ailleurs, on a

$$\psi'_{\beta,h}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\infty \text{ et } \psi'_{\beta,h}(0) = h > 0$$

donc $\psi_{\beta,h}$ ne peut atteindre son maximum en 0 ou en 1.

Finalement, la fonction $\psi_{\beta,h}$ atteint son maximum sur $[-1; 1]$ en un point d'abscisse $x^*(\beta, h) \in]0; 1[$.

Unicité de ce point. Si $\beta \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, la question 23 montre que $\psi_{\beta,h}$ est strictement concave, donc le point de maximum est unique.

Si $\beta > \frac{1}{2}$, alors $\psi_{\beta,h}$ est strictement convexe sur $\left[0; \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}\right]$ et strictement concave sur $\left[\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}; 1\right]$ avec $\psi'_{\beta,h}(0) > 0$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \psi'_{\beta,h} = -\infty$.

Ainsi, $\psi'_{\beta,h}$ s'annule au plus une fois sur $]0; 1[$, donc l'abscisse du maximum est là encore unique.

Question 25. Dans ce cas, d'après l'étude de signe faite à la question 23 la fonction $\psi'_{\beta,0}$ s'annule et une seule fois, en changeant de signe.

De plus, $\psi'_{\beta,0}(0) = 0$, donc la première partie de la question est traitée.

Pour $\beta > \frac{1}{2}$, on note que $\psi_{\beta,0}$ est paire, et que ψ'_{β} est impaire. Comme $\psi'_{\beta,0} = 0$ et $\psi'_{\beta,0}$ est strictement croissante sur $\left[-\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}; \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}\right]$, alors ψ' s'annule une et une seule fois sur $]0; 1[$.

De plus, si on note $x^*(\beta, 0)$ ce point d'annulation, alors $\psi'_{\beta,0}$ est > 0 sur $]0; x^*(\beta, 0)[$ et < 0 sur $]x^*(\beta, 0); 1[$.

Donc $x^*(\beta, 0)$ est un point de maximum global de $\psi_{\beta,0}$ sur $]0; 1[$. Par parité de cette fonction, elle atteint son maximum sur $]-1; 1[$ exactement en $x^*(\beta, 0)$ et $-x^*(\beta, 0)$.

Question 26. On note $\tilde{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^*(\beta, v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité est vérifiée :

$$v_n = I'(x^*(\beta, v_n)) - 2\beta x^*(\beta, v_n)$$

Comme $I'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1^-} -\infty$, on en déduit que $\tilde{x} \neq 1$.

Ainsi, I' est C^0 en $\tilde{x}$.

On peut donc passer à la limite dans l'équation écrite plus haut :

$$h = I'(\tilde{x}) - 2\beta \tilde{x}$$

Or $\psi'_{\beta,h}$ s'annule uniquement en $x^*(\beta, h)$ sur $[0; 1[$.
Par unicité, on a donc $x^*(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^*(\beta, v_n)$.

Question 27. On fixe $h' > h \geq 0$ (le cas $h > h' \geq 0$ se traitant de manière similaire, et le cas $h = h'$ étant évident).

Ainsi, on utilise le fait que $\psi_{\beta,h}$ est maximale en $x^*(\beta, h)$:

$$\begin{aligned} g(\beta, h') - g(\beta, h) &= \psi_{\beta,h'}(x^*(\beta, h')) - \psi_{\beta,h}(x^*(\beta, h)) \\ &\leq \psi_{\beta,h'}(x^*(\beta, h')) - \psi_{\beta,h}(x^*(\beta, h')) \\ &\leq (h' - h)x^*(\beta, h') \end{aligned}$$

On procède de même pour la minoration.

Question 28. Ceci provient de l'encadrement précédent, en utilisant la continuité de $h \mapsto x^*(\beta, h)$ pour tout $\beta \geq 0$.

Du fait que $h > 0$, la limite des deux côtés a un sens.

Question 29. Le résultat de la question 27 est encore valable pour $h, h' < 0$ et la fonction $h \mapsto x^*(\beta, h)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\forall h < 0, x^*(\beta, h) = -x^*(\beta, -h)$.

Ainsi, la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ pour tout $\beta \geq 0$. Reste donc le problème en 0.

D'après la question 25, si $\beta > \frac{1}{2}$, on a $x(\beta, 0) > 0$ alors que $x(\beta, h) < 0$ pour tout $h < 0$. Donc la fonction $h \mapsto x^*(\beta, h)$ n'est pas continue en 0 (et donc certainement pas dérivable).

Supposons que $\beta \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Dans ce cas, $h \mapsto x^*(\beta, h)$ est continue en 0 puisque $x^*(\beta, 0) = 0$ (toujours d'après la question 25).

L'encadrement de la question 27 reste aussi valable, et le théorème des gendarmes fonctionne : la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est alors dérivable en 0, de dérivée nulle en 0.

Finalement, $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\beta \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Question 30. Soit $\beta \geq 0$. D'après la question 7, la fonction $h \mapsto G_N(\beta, h)$ est dérivable et convexe, et on a

$$\frac{\partial}{\partial h} G_N(\beta, h) = \frac{1}{Y_N(\beta, h)} E \left[S_N \cdot e^{\beta N S_N^2 + h N S_N} \right].$$

De plus, la suite de fonctions $(h \mapsto G_N(\beta, h))_N$ converge simplement vers la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La limite simple est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après la question 4, on a donc, pour tout $h > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial h} G_N(\beta, h) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial h} g(\beta, h) = x^*(\beta, h).$$

Question 31. Soit $\beta \in \mathbb{R}_+$ et $h > 0$. On a vu que $x^*(\beta, h)$ annule $\psi'_{\beta,h}$, donc

$$h = -2\beta x^*(\beta, h) + I'(x^*(\beta, h))$$

Or, $I'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

Ainsi,

$$\frac{1 + x^*(\beta, h)}{1 - x^*(\beta, h)} = e^{4\beta x^*(\beta, h) + 2h}$$

ce qui donne

$$x^*(\beta, h) = \frac{e^{4\beta x^*(\beta, h) + 2h} - 1}{e^{4\beta x^*(\beta, h) + 2h} + 1} = \text{th}(2\beta x^*(\beta, h) + h).$$

Question 32. Pour simplifier les notations, on note $x^*(h) = x^*\left(\frac{1}{2}, h\right)$ dans cette réponse, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$.

On effectue le développement limité de th à l'ordre 3 en 0 :

$$\text{th}(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

De plus, on a $x^*(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ par continuité de $h \mapsto x^*(h)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc l'égalité $x^*(h) = \text{th}(h + x^*(h))$ donne $x^*(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} x^*(h) + h$, c'est-à-dire $h = o(x^*(h))$ en 0.

Ainsi, du développement limité de th en 0 on déduit :

$$x^*(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h + x^*(h) - \frac{1}{3}(x^*(h) + h)^3 + o(x^*(h)^3)$$

Ceci donne

$$3h \underset{h \rightarrow 0}{=} x^*(h)^3 + o(x^*(h)^3)$$

d'où $x^*(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} (3h)^{1/3}$, ce qui est le résultat recherché.