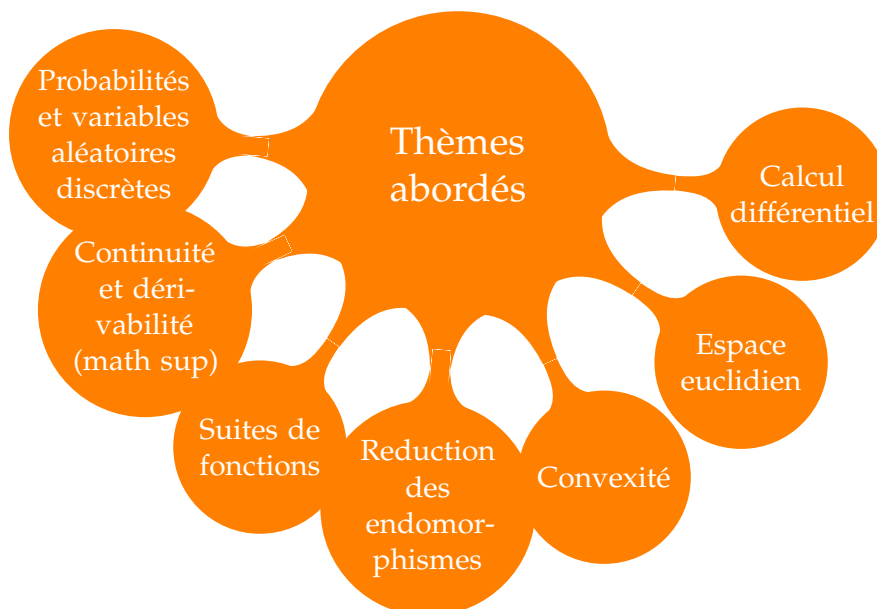


Corrigé de l'épreuve X-ENS PC 2026

makremessalhi@gmail.com



Première partie

1. Soient $h > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par convexité de g , on a

$$g(x - \lambda h) = g(\lambda(x - h) + (1 - \lambda)x) \leq \lambda g(x - h) + (1 - \lambda)g(x).$$

Par suite, pour $\lambda \in]0, 1]$,

$$\frac{g(x - \lambda h) - g(x)}{\lambda h} \leq \frac{g(x - h) - g(x)}{h}.$$

Enfin, en faisant tendre λ vers 0^+ dans la dernière inégalité ci-dessus tout en tenant compte du développement limité suivant

$$g(x - \lambda h) = g(x) - \lambda h g'(x) + o(\lambda)(\lambda \rightarrow 0),$$

on obtient

$$-g'(x) \leq \frac{g(x - h) - g(x)}{h},$$

ou encore

$$\frac{g(x) - g(x - h)}{h} \leq g'(x).$$

De surcroît, on a, par convexité de g ,

$$g(x + \lambda h) = g(\lambda(x + h) + (1 - \lambda)x) \leq \lambda g(x + h) + (1 - \lambda)g(x).$$

Le même raisonnement déployé ci-haut fournit

$$g'(x) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

d'où l'inégalité escomptée.

2. Soient $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par convexité des fonction f_n , on a

$$f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y),$$

en faisant tendre n vers $+\infty$ tout en gardant en mémoire la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f , on obtient

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

d'où la convexité de la fonction f .

3. Posons

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Chaque f_n est indéfiniment dérivable et on a $f_n''(x) = \frac{1}{n(x^2 + \frac{1}{n})^{3/2}} \geq 0$ donc f_n est convexe. En outre, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto |x|$ mais f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle ne l'est pas 0.

On peut aussi donner le contre exemple suivant

$$g_n(x) = \int_0^x \arctan(nt) dt, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

On vérifie aisément que g_n est deux fois dérivable et $g_n'' \geq 0$ donc g_n est convexe, de plus, par le TCD, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \frac{\pi}{2}|x|$ qui est manifestement non dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ et x un point de dérivabilité de x .

La question 1 fournit l'inégalité suivante

$$\frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} \leq f'_n(x) \leq \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}.$$

Par ailleurs,

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, par la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} \geq \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \varepsilon.$$

Par suite, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \varepsilon \leq f_n(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon.$$

De surcroît,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f'(x),$$

d'où, par définition de la limite, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < h < \eta$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f'(x) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \geq f'(x) - \varepsilon.$$

Il en résulte que, si $n \geq N$,

$$f'(x) - 2\varepsilon \leq f'_n(x) \leq f'(x) + 2\varepsilon,$$

d'où

$$\forall n \geq N, \quad |f'_n(x) - f'(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x).$$

5. Rappelons que la matrice Hessienne de g en un point quelconque $x \in \mathbb{R}^d$ est

$$H_g(x) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Comme la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$, le théorème de Schwarz affirme que,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, d \rrbracket^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i},$$

d'où la matrice $H_g(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Soient $x, u \in \mathbb{R}^d$ avec $u = (u_1, \dots, u_d)$ et posons $\Theta(t) = g(x + tu)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction Θ est, par composition, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En outre, par convexité de g , si $\lambda \in [0, 1]$ et $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Theta(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) = g(\lambda(x + t_1 u) + (1 - \lambda)(x + t_2 u)) \leq \lambda \Theta(t_1) + (1 - \lambda) \Theta(t_2).$$

On en déduit que Θ est convexe.

Les règles de dérivation le long d'un arc donnent

$$\Theta'(t) = Dg(x + tu) \circ u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_i}(x + tu) u_i.$$

Par conséquent,

$$\Theta''(t) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x + tu) u_j u_i \quad (\star).$$

Il s'ensuit que

$$\Theta''(0) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x) u_j u_i = u^T H_g(x) u.$$

Comme Θ est convexe, sa dérivée seconde est positive et donc

$$u^T H_g(x) u \geq 0$$

ce qui montre que la matrice hessienne de g en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ est symétrique positive.

6. Conservons les notations de la question précédente, ainsi, pour tous $x, u \in \mathbb{R}^d$,

$$\Theta(t) = g(x + tu), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction Θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, par l'identité (★) de la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Theta''(t) = u^T H_g(x + tu) u.$$

Comme la matrice hessienne de g en tout point de $\mathbb{R}^d$ est symétrique positive, on a Θ'' est positive et donc Θ est convexe sur $\mathbb{R}$. Il en découle que

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \Theta(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda \Theta(t_1) + (1 - \lambda)\Theta(t_2).$$

En écrivant $x = \lambda x + (1 - \lambda)x$, on déduit

$$g(\lambda(x + t_1 u) + (1 - \lambda)(x + t_2 u)) \leq \lambda g(x + t_1 u) + (1 - \lambda)g(x + t_2 u).$$

En choisissant $t_1 = 0, t_2 = 1$ et en considérant le vecteur $u - x$ à la place de u , on obtient

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)u) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(u),$$

la convexité de la fonction g est alors manifeste.

7. Notons d'abord que la variable aléatoire $e^{\lambda \cdot X}$ est finie donc elle admet une espérance finie et, par le théorème de Transfert

$$\mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X}) = \sum_{(x_1, \dots, x_d) \in X(\Omega)} e^{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d).$$

Par ailleurs, pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in X(\Omega)$, l'application $\lambda \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d$ est linéaire donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, en particulier $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$ et comme l'application $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors par composition et sommation finie, ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$.

Soient $i, j \in \{1, \dots, d\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$.

Les règles de dérivation usuelles donnent

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{\sum_{(x_1, \dots, x_d) \in X(\Omega)} \lambda_i e^{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d)}{\mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X})},$$

cette expression peut être réécrite, grâce au théorème de Transfert, sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{\mathbb{E}(X_i e^{\lambda \cdot X})}{\mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X})}.$$

En dérivant cette dernière expressions par rapport à λ_j et en évoquant encore une fois le théorème de Transfert, on obtient immédiatement

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) = \frac{E(X_i X_j e^{\lambda \cdot X})}{E(e^{\lambda \cdot X})} - \frac{E(X_i e^{\lambda \cdot X}) E(X_j e^{\lambda \cdot X})}{(E(e^{\lambda \cdot X}))^2}.$$

8. Rappelons que la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$ en vertu de la question précédente. Montrons que sa matrice hessienne en tout point $\lambda \in \mathbb{R}^d$ est symétrique positive, à cet effet, prenons $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$. La matrice hessienne $H_\phi(\lambda)$ est symétrique d'après la question 5 et on a

$$u^T H_\phi(\lambda) u = \sum_{i,j=1}^d \lambda_i \lambda_j \frac{E(X_i X_j e^{\lambda \cdot X})}{E(e^{\lambda \cdot X})} - \sum_{i=1}^d \lambda_i \lambda_j \frac{E(X_i e^{\lambda \cdot X}) E(X_j e^{\lambda \cdot X})}{(E(e^{\lambda \cdot X}))^2}.$$

Posons $S = \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$, par linéarité de l'espérance on a

$$u^T H_\phi(\lambda) u = \frac{E(S^2 e^{\lambda \cdot X})}{E(e^{\lambda \cdot X})} - \frac{(E(S e^{\lambda \cdot X}))^2}{(E(e^{\lambda \cdot X}))^2}.$$

Comme la variable aléatoire X est finie, les variables aléatoires S et $e^{\lambda \cdot X}$ sont également finies et l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\left(E(S e^{\lambda \cdot X}) \right)^2 = \left(E(S e^{\frac{\lambda \cdot X}{2}} \cdot e^{\frac{\lambda \cdot X}{2}}) \right)^2 \leq E(S^2 e^{\lambda \cdot X}) E(e^{\lambda \cdot X}).$$

On en déduit

$$\frac{(E(S e^{\lambda \cdot X}))^2}{(E(e^{\lambda \cdot X}))^2} \leq \frac{E(S^2 e^{\lambda \cdot X})}{E(e^{\lambda \cdot X})}.$$

Il en découle que : $u^T H_\phi(\lambda) u \geq 0$ et la matrice Hessienne de ϕ en tout point de $\mathbb{R}^d$ est symétrique positive. On conclut par la question 6 que ϕ est convexe.

Deuxième partie

9. Soient $h \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} Z_{N+1}(0, h) &= E \left[\exp \left(H_{N+1}(0, h, X^{(N+1)}) \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(h \sum_{i=1}^{N+1} \sigma_i \right) \right] \\ &= E \left[e^{h\sigma_1} \dots e^{h\sigma_{N+1}} \right] \\ &= Z_N(0, h) E \left(e^{h\sigma_{N+1}} \right), \end{aligned}$$

la dernière égalité est justifiée par le lemme de coalition : en effet, les variables aléatoires σ_i sont mutuellement indépendantes, $e^{h\sigma_1+\dots+h\sigma_N}$ est une fonction de $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ et $e^{h\sigma_{N+1}}$ est une fonction de σ_{N+1} , alors $e^{h\sigma_1+\dots+h\sigma_N}$ et $e^{h\sigma_{N+1}}$ sont indépendants.

Par ailleurs, le théorème de Transfert fournit

$$E(e^{h\sigma_{N+1}}) = e^h \frac{1}{2} + e^{-h} \frac{1}{2} = \text{ch}(h).$$

On en déduit que : $Z_{N+1}(0, h) = \text{ch}(h)Z_N(0, h)$.

On vient de montrer que $(Z_N(0, h))_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\text{ch}(h)$ donc $Z_N(0, h) = \text{ch}(h)^{N-1}Z_1(0, h)$. Comme $Z_1(0, h) = E(e^{h\sigma_1})$ et que les σ_i suivent la même loi, on trouve : $Z_1(0, h) = \text{ch}(h)$ et par suite

$$Z_N(0, h) = \text{ch}^N(h).$$

Il en résulte que

$$F_N(0, h) = \ln(\text{ch}(h)).$$

10. Pour tous $\beta, h \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$H_N(\beta, h, X^{(N)}) = (\beta, h).X$$

avec

$$X = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_N \sigma_1, \sum_{i=1}^N \sigma_i \right)$$

et la variable aléatoire X est manifestement à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^2$ car les σ_i sont finies.

Il en découle que

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln E \left[\exp \left((\beta, h).X \right) \right].$$

La fonction F_N satisfait alors les mêmes conditions que la fonction ϕ de la première partie (avec $d = 2$), elle est alors convexe en vertu de la question 8.

11. Le calcul routinier du polynôme caractéristique d'une matrice fournit immédiatement

$$\chi_A(X) = X^2 - (e^{\beta-h} + e^{\beta+h})X + e^{2\beta} - e^{-2\beta} = X^2 - 2e^{\beta} \text{ch}(h)X + 2\text{sh}(2\beta).$$

Le discriminant Δ' est

$$\Delta' = e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2\text{sh}(2\beta).$$

Comme $\text{ch}(h) \geq 1$, on a

$$\Delta' \geq e^{2\beta} - (e^{2\beta} - e^{-2\beta}) = e^{2\beta} > 0.$$

Il s'ensuit que la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^{\beta} \text{ch}(h) - \sqrt{e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2\text{sh}(2\beta)} , \\ \lambda_2 = e^{\beta} \text{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2\text{sh}(2\beta)} . \end{cases}$$

Il est clair que $\lambda_2 > \lambda_1$ car $\Delta' > 0$ et donc $\lambda(\beta, \alpha) = \lambda_2$ est la plus grande valeur propre de A .

12. Là c'est un cadeau! c'est plutôt une vérification immédiate.

13. On sait que, pour $i, j \in \{1, 2\}$,

$[A^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^2 [A]_{i,k}$, donc $[A^2]_{i,j} = \sum_{k,s=1}^2 [A]_{i,s} [A]_{s,k} [A]_{k,j}$ et par suite, par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [A^n]_{i,j} = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^2 [A]_{i,k_1} [A]_{k_1,k_2} \dots [A]_{k_{n-1},j}.$$

Il en résulte que

$$\text{tr}(A^N) = \sum_{k_1, \dots, k_{N-1}=1}^2 [A]_{1,k_1} [A]_{k_1,k_2} \dots [A]_{k_{N-1},1} + \sum_{k_1, \dots, k_{N-1}=1}^2 [A]_{2,k_1} [A]_{k_1,k_2} \dots [A]_{k_{N-1},2}.$$

Par ailleurs, par le théorème de transfert et la question précédente, on a

$$\begin{aligned} Z_N(\beta, h) &= \mathbb{E} \left(B_{\sigma_N \sigma_1} \prod_{i=1}^{N-1} B_{\sigma_i \sigma_{i+1}} \right) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_N) \in X^{(N)}(\Omega)} B_{x_N x_1} \prod_{i=1}^{N-1} B_{x_i x_{i+1}} \mathbb{P}(\sigma_1 = x_1, \dots, \sigma_N = x_N). \end{aligned}$$

Par indépendance mutuelle des σ_i ,

$$\mathbb{P}(\sigma_1 = x_1, \dots, \sigma_N = x_N) = \mathbb{P}(\sigma_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(\sigma_N = x_N) = \frac{1}{2^N}.$$

Finalement, en remarquant que les $[A]_{ik}$ sont de la forme $B_{x_i x_{i+1}}$ on obtient la formule demandée.

14. Notons d'abord que les deux valeurs propres de la matrice A dans la question 11 sont positives, ceci est clair pour $\lambda_2 = \lambda(\beta, h)$ et pour λ_1 on a

$$\lambda_1 \geq e^\beta \text{ch}(h) - e^\beta \text{ch}(h) \geq 0.$$

En utilisant la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} F_N(\beta, h) &= \frac{1}{N} \ln \left(2^{-N} \text{tr}(A^N) \right) \\ &= -\ln(2) + \frac{1}{N} \ln \left(\text{tr}(A^N) \right) \\ &= -\ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h)) + \frac{1}{N} \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda(\beta, h)} \right)^N \right). \end{aligned}$$

Comme $0 < \frac{\lambda_1}{\lambda(\beta, h)} < 1$, $\frac{\lambda_1}{\lambda(\beta, h)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ et par conséquent,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(\beta, h) = \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln(2).$$

15. On a $(\beta, h) \mapsto e^\beta \text{ch}(h)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ come produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, il en est de même pour la fonction $(\beta, h) \mapsto e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2\text{sh}(2\beta)$ qui est strictement positive. Par sommation et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que $(\beta, h) \mapsto \lambda(\beta, h)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
16. On a vu dans la question 10 que F_N est convexe pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ car elle vérifie les mêmes conditions que la fonction ϕ de la première partie, en particulier F_N est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Posons, pour $\beta \geq 0$ fixé $f_N(h) = F_N(\beta, h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$. On voit alors que f_N est dérivable sur $\mathbb{R}$. En outre, f_N est convexe car, pour tous $(\alpha, h, h') \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$, on a

$$f_N(\alpha h + (1 - \alpha)h') = F_N(\alpha(\beta, h) + (1 - \alpha)(\beta, h')) \leq \alpha F_N(\beta, h) + (1 - \alpha)F_N(\beta, h'),$$

d'où

$$f_N(\alpha h + (1 - \alpha)h') \leq \alpha f_N(h) + (1 - \alpha)f_N(h').$$

De surcroît, la suite de fonctions $(f_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : h \mapsto \ln(\lambda(\beta, h)) - \ln(2)$, ceci étant déjà démontré dans la question 14. Enfin, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en raison de la question 15. Toutes ces conditions réunies permettent d'appliquer le résultat de la question 4 ce qui donne

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad f'_N(h) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f'(h).$$

Par ailleurs,

$$f'_N(h) = \frac{\partial F_N}{\partial h}(\beta, h) = \frac{1}{N} \frac{\partial Z_N}{\partial h}(\beta, h) = \frac{1}{Z_N(\beta, h)} \mathbb{E} \left(\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \exp(H_N(\beta, h, X^{(N)})) \right)$$

et

$$f'(h) = \frac{\partial}{\partial h} \ln(\lambda(\beta, h)).$$

D'où le résultat annoncé.

17. Remarquons 'abord que

$$g_\beta(h) = \ln \left(\text{ch}(h) + \sqrt{\text{ch}^2(h) - 2e^{-2\beta} \text{sh}(2\beta)} \right).$$

Comme

$$2e^{-2\beta} \text{sh}(2\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 1, \quad \sqrt{\text{ch}^2(h) - 1} = |\text{sh}(h)|$$

et

$$\text{ch}(h) + |\text{sh}(h)| = \begin{cases} e^h, & \text{si } h \geq 0 \\ e^{-h}, & \text{si } h \leq 0 \end{cases}$$

on déduit que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad g_\beta(h) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} |h|,$$

d'où le résultat escompté.

18. Par un calcul routinier invoquant les règles habituelles de dérivation, on obtient

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad g'_\beta(h) = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial h}(\beta, h)}{\lambda(\beta, h)} = \frac{e^\beta \operatorname{sh}(h)}{\sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}^2(h) - 2\operatorname{sh}(2\beta)}},$$

ou encore

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad g'_\beta(h) = \frac{\operatorname{sh}(h)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - 2e^{-2\beta} \operatorname{sh}(2\beta)}}.$$

En profitant des calculs faits dans la question précédente, on obtient

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} g'_\beta(h) = \begin{cases} h & \text{si } h > 0, \\ 0 & \text{si } h = 0, \\ -h & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que $(g'_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g : h \mapsto \operatorname{sgn}(h)$. Cependant, il découle de la question 15 que les g'_β sont continues sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions continues. Comme la limite simple de $(g'_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^*}$, à savoir $h \mapsto \operatorname{sgn}(h)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ à cause de sa discontinuité manifeste en 0, la convergence de $(g'_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas être uniforme.

Troisième partie

19. Comme $t \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, on a : $(1+x) \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} 0$ et $(1-x) \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$.

D'où

$$I(x) \xrightarrow{x \rightarrow (-1)^+} 0 \quad \text{et} \quad I(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0.$$

D'autre part, la fonction I est continue sur $] -1, 1[$ comme somme et produit de fonctions continues, donc I est prolongeable par continuité en 0, ce prolongement est obtenu en posant $I(1) = I(-1) = 0$.

20. Soulignons d'abord qu'on a

$$S_N(\Omega) = \left\{ 1, \frac{N-2}{N}, \frac{N-4}{N}, \dots, \frac{-N+2}{N}, -1 \right\} = \left\{ \frac{N-2k}{N} : 0 \leq k \leq N \right\} = \mathcal{M}_N.$$

Par suite, si $x \in \mathbb{R} \setminus S_N(\Omega)$, $P(S_N = x) = 0$, et si $x \in S_N(\Omega)$ alors il existe $k \in \{0, \dots, N\}$ tel que $x = \frac{N-2k}{N}$. L'événement $(S_N = x)$ est donc réalisé si et seulement si k variables aléatoires choisies parmi les σ_i prennent toutes la valeur -1 , il y en a $\binom{N}{k}$ choix possibles de tels variables et les $N-k$ variables restantes prennent toutes la valeur 1. Finalement, comme les σ_i sont mutuellement indépendantes, on déduit que

$$P(S_N = x) = P(S_N = \frac{N-2k}{N}) = \frac{\binom{N}{k}}{2^N},$$

comme $k = \frac{N(1-x)}{2}$, on a, pour $x \in S_N(\Omega)$,

$$P(S_N = x) = \frac{\binom{N}{\frac{N(1-x)}{2}}}{2^N}.$$

21. Par la question précédente, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$P(S_N = u_N) = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{\left(\frac{N(1-x)}{2}\right)! \left(\frac{N(1+x)}{2}\right)!}.$$

Par application de la formule de Strirling, on obtient l'équivalent suivant de la quantité $P(S_N = u_N)$ pour N assez grand

$$P(S_N = u_N) \sim \frac{\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}}{2^N \sqrt{\pi N(1-u_N)} \left(\frac{N(1-u_N)}{2}\right)^{\frac{N(1-u_N)}{2}} \sqrt{\pi N(1+u_N)} \left(\frac{N(1+u_N)}{2}\right)^{\frac{N(1+u_N)}{2}}},$$

ceci fournit, après simplification

$$P(S_N = u_N) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N(1-u_N^2)}} \cdot \frac{1}{(1-u_N)^{\frac{N(1-u_N)}{2}} (1+u_N)^{\frac{N(1+u_N)}{2}}}.$$

En notant Γ_N l'équivalent de $P(S_N = u_N)$ ci-haut, on remarque que $P(S_N = u_N)$ et Γ_N sont strictement positifs et par suite il existe une suite $(\varepsilon_N)_{N \geq 1}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall N \geq 1, \quad P(S_N = u_N) = \Gamma_N e^{\varepsilon_N}.$$

Il en résulte que

$$\frac{-1}{N} \ln P(S_N = u_N) = \frac{-1}{N} \ln(\Gamma_N) - \frac{1}{N} \varepsilon_N.$$

En gardant en mémoire la limite : $u_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{-1}{N} \ln P(S_N = u_N) = \frac{1-x}{2} \ln(1-x) + \frac{1+x}{2} \ln(1+x) = I(x) + \ln(2)!!$$

Sauf erreur de ma part, Il y a le terme $\ln(2)$ qui manque!!

Remarque : il est naturel de se poser la question d'existence, pour chaque $x \in]-1, 1[$, d'une suite de terme général $u_N \in \mathcal{M}_N$ telle que (u_N) converge vers x . En effet, soient $x \in]-1, 1[$ et $k_N = \left\lfloor \frac{N(1-x)}{2} \right\rfloor \in \{0, \dots, N\}$, alors

$$\frac{1}{N} \left(\frac{N(1-x)}{2} - 1 \right) < \frac{k_N}{N} \leq \frac{1}{N} \left(\frac{N(1-x)}{2} \right),$$

d'où

$$\frac{k_N}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{2}$$

et par suite

$$u_N = 1 - \frac{2k_N}{N} \in \mathcal{M}_N \quad \text{et} \quad u_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x.$$

22. Soient $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$. On a

$$G_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln E \left(e^{\beta N S_N^2 + h N S_N} \right).$$

D'autre part, en posant $f(t) = e^{\beta N t^2 + h N t}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et en appliquant le théorème de Transfert, on obtient

$$\begin{aligned} G_N(\beta, h) &= \frac{1}{N} \ln E(f(S_N)) \\ &= \frac{1}{N} \ln \left(\sum_{x \in \mathcal{M}_N} e^{\beta N x^2 + h N x} P(S_N = x) \right). \end{aligned}$$

Comme les termes de la somme définissant $E(f(S_N))$ sont tous positifs, on déduit pour tout $x \in \mathcal{M}_N$,

$$G_N(\beta, h) \geq \frac{1}{N} \ln \left(e^{\beta N x^2 + h N x} P(S_N = x) \right),$$

ou encore

$$G_N(\beta, h) \geq \beta x^2 + h x + \frac{1}{N} \ln P(S_N = x).$$

Remarque : en gardant l'expression de I de l'énoncé, le résultat admis ne semble pas correcte ! En effet,

$$G_N(0, 0) = 0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

cependant

$$g(0, 0) = \sup_{x \in [-1, 1]} -I(x) > 0 \quad \text{car} \quad -I(1/2) > 0.$$

Mieux encore, on a pour tout $x \in]-1, 1[$

$$I'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{2} \right) \quad \text{et} \quad I''(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0.$$

Il en découle que I' est strictement croissante avec $I'(0) = 0$ donc I' est une bijection croissante de $] -1, 1[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

On en déduit aussitôt que I est strictement décroissante sur $[-1, 0]$ avec $I([-1, 0]) = [-\ln(2), 0]$ et est strictement croissante sur $[0, 1]$ avec $I([0, 1]) = [-\ln(2), 0]$.

Il vient donc que

$$g(0, 0) = \ln(2) \neq 0!!$$

23. Soient $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$, en utilisant l'expression de I'' trouvée dans la question précédente, on obtient

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \psi''_{\beta, h}(x) = 2\beta - \frac{1}{1-x^2}.$$

Ainsi,

- si $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $2\beta \in [0, 1]$ alors que $\frac{1}{1-x^2} \geq 1$ pour tout $x \in] -1, 1[$ d'où

$$\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \implies \forall x \in] -1, 1[, \quad \psi''_{\beta, h}(x) \leq 0,$$

- si $\beta > \frac{1}{2}$ alors $\psi''_{\beta, h}(x) \leq 0$ si et seulement si $x^2 \geq 1 - \frac{1}{2\beta}$. En

posant $x_\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}$, on obtient

$$\beta > \frac{1}{2} \implies \left(\psi''_{\beta, h}(x) \leq 0 \iff x \in [x_\beta, 1[\cup] -1, -x_\beta] \right).$$

24. ► Supposons que $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ alors, d'après la question précédente $\psi''_{\beta, h} \leq 0$ sur $] -1, 1[$ et par suite $\psi'_{\beta, h}$ est strictement décroissante sur $] -1, 1[$, sa limite en -1 vaut $+\infty$ et en 1 elle est égale à $-\infty$ d'après la question précédente. Ainsi, $\psi'_{\beta, h}$ s'annule en un unique point $x_*(\beta, h) \in] -1, 1[$, ceci nous fournit le tableau de variations suivant (pour simplifier, on note $x_*(\beta, h) = x_*$) :

x	-1	x_*	1
$\psi'_{\beta,h}(x)$	$+$	0	$-$
$\psi_{\beta,h}(x)$	$\beta - h$	$\psi_{\beta,h}(x_*)$	$\beta + h$

Il est clair que la fonction $\psi_{\beta,h}$ atteint son maximum en un unique point $x_*(\beta, h) \in]-1, 1[$.

Par ailleurs,

$$\psi'_{\beta,h}(0) = h > 0,$$

donc, par continuité la fonction $\psi'_{\beta,h}$ reste strictement positive sur un intervalle assez petit de la forme $] -\alpha, \alpha[$ avec $\alpha \in]0, 1[$ et par suite $\psi_{\beta,h}$ est strictement croissante sur cet intervalle donc le maximum de $\psi_{\beta,h}$ est atteint pour une valeur strictement positive, ceci fournit

$$x_*(\beta, h) \in]0, 1[.$$

► Maintenant, on va traiter le cas où $\beta > \frac{1}{2}$. On a vu dans la question précédente que

$$\psi''_{\beta,h}(x) \leq 0 \iff x \in [x_\beta, 1[\cup]-1, -x_\beta], \quad \text{avec } x_\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}.$$

Ainsi, on a

x	-1	$-x_\beta$	x_β	1	
$\psi''_{\beta,h}(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\psi'_{\beta,h}(x)$	$+\infty$	$\psi'_{\beta,h}(-x_\beta)$	$\psi'_{\beta,h}(x_\beta)$	$-\infty$	

On distingue alors deux cas selon le signe de $\psi'_{\beta,h}(-x_\beta)$:

- si $\psi'_{\beta,h}(-x_\beta) \geq 0$, comme $0 \in]-x_\beta, x_\beta[$ et $\psi'_{\beta,h}$ est strictement croissante sur $[-x_\beta, x_\beta]$, on obtient : $\psi'_{\beta,h}(x_\beta) \geq \psi'_{\beta,h}(0) = h > 0$. Il en déduit que ψ' s'annule et change de signe en un unique point $x_*(\beta, h) \in]x_\beta, 1[\subset]0, 1[$, en outre, la fonction $\psi'_{\beta,h}$ est positive sur $] -1, x_*(\beta, h)[$ et négative sur $[x_*(\beta, h), 1[$ donc $x_*(\beta, h)$ est l'unique maximum de $\psi_{\beta,h}$ sur $[-1, 1]$.

- si $\psi'_{\beta,h}(-x_\beta) < 0$ alors la fonction dérivée $\psi'_{\beta,h}$ s'annule en trois points : $x^{(1)} \in]-1, -x_\beta[$, $x^{(2)} \in]-x_\beta, x_\beta[$ et $x^{(3)} \in]x_\beta, 1[$ d'où le tableau de variation suivant

x	-1	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	1
$\psi'_{\beta,h}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\psi_{\beta,h}(x)$	$ \begin{array}{ccccccc} & & \psi_{\beta,h}(x^{(1)}) & & \psi_{\beta,h}(x^{(3)}) & & \\ \beta-h & \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \searrow \\ & & \psi_{\beta,h}(x^{(2)}) & & & & \beta+h \end{array} $				

Par ailleurs, l'application de la monotonie de $\psi_{\beta,h}$ fournit les inégalités suivantes

$$\psi_{\beta,h}(x^{(1)}) < \psi_{\beta,h}(-x_\beta) \quad \text{et} \quad \psi_{\beta,h}(x_\beta) < \psi_{\beta,h}(x^{(3)}).$$

De surcroît, comme la fonction I est paire, on obtient

$$\psi_{\beta,h}(x) - \psi_{\beta,h}(-x) = 2hx,$$

ce qui fournit

$$\psi_{\beta,h}(x^{(1)}) < \psi_{\beta,h}(-x_\beta) < \psi_{\beta,h}(x_\beta) < \psi_{\beta,h}(x^{(3)}).$$

On en déduit que $x_*(\beta, h) = x^{(3)} \in]0, 1[$ est l'unique maximum (global) de $\psi_{\beta,h}$.

Pour finir, lorsque $h < 0$ on remarque que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \psi_{\beta,h}(x) = \psi_{\beta,-h}(-x).$$

En tenant compte de la discussion précédente, on déduit que pour tout $h < 0$, $\psi_{\beta,h}$ possède un unique maximum $x_*(\beta, h) \in]-1, 0[$.

25. ► Soit $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\psi'_{\beta,0}(0) = 0$ et l'étude faite dans la question précédente montre bien que $\psi_{\beta,0}$ admet un unique maximum au point $x_*(\beta, 0) = 0$.

► On suppose maintenant que $\beta > \frac{1}{2}$. On remarque que $\psi_{\beta,0}$ est paire et par suite $\psi'_{\beta,0}$ est impaire. Ainsi, $\psi'_{\beta,0}(0) = 0$ et donc par croissance de $\psi'_{\beta,0}$ sur $] -x_\beta, x_\beta[$, on a

$$\psi'_{\beta,0}(x_\beta) > 0 \quad \text{et} \quad \psi'_{\beta,0}(-x_\beta) = -\psi'_{\beta,0}(x_\beta) < 0.$$

Avec les notations de la question précédente, la fonction $\psi'_{\beta,0}$ s'annule en trois points : $x^{(1)} \in]-1, 0[$, $x^{(2)} = 0$ et $x^{(3)} \in]0, 1[$ et $\psi_{\beta,0}$ **atteint son maximum uniquement en deux points** $x^{(1)}$ et $x^{(3)}$. Comme $\psi_{\beta,0}$ est paire, $\psi_{\beta,0}(x^{(3)}) = \psi_{\beta,0}(-x^{(3)})$ et donc $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum aussi au point négatif $-x^{(3)}$ alors, par unicité, $-x^{(3)} = x^{(1)}$. On conclut que $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum exactement en les points :

$$x_*(\beta, 0) = x^{(3)} \in]0, 1[\quad \text{et} \quad -x_*(\beta, 0).$$

26. Soient $\beta \geq 0$ et $h > 0$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers h , on note $l(\beta, h)$ la limite de la suite $(x_*(\beta, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $\psi'_{\beta, v_n}(x_*(\beta, v_n)) = 0$, c'est à dire

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\beta x_*(\beta, v_n) + v_n - I'(x_*(\beta, v_n)) = 0.$$

D'autre part, Comme $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} h > 0$, v_n est strictement positif pour n assez grand, d'où on a par la question 24, $x_*(\beta, v_n) \in]0, 1[$ pour tout n assez grand et donc $l(\beta, h) \in [0, 1]$.

Cependant, le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'identité (*) ci-haut combiné avec la limite : $\lim_{x \rightarrow 1^-} I'(x) = +\infty$ établie dans la question 22 conduit manifestement à une contradiction dans le cas où $l(\beta, h) = 1$, ceci exige que $l(\beta, h) \in [0, 1[$ et donc, par continuité de I' sur $[0, 1[$,

$$2\beta l(\beta, h) + h - I'(l(\beta, h)) = 0,$$

ou encore

$$\psi'_{\beta, h}(l(\beta, h)) = 0.$$

On en déduit que $l(\beta, h)$ est un point critique de $\psi_{\beta, h}$.

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], \quad \psi_{\beta, v_n}(x_*(\beta, v_n)) \geq \psi_{\beta, v_n}(x),$$

ceci fournit, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \psi_{\beta, h}(l(\beta, h)) \geq \psi_{\beta, h}(x).$$

Le résultat d'unicité établi dans la question 24 permet de conclure que

$$l(\beta, h) = x_*(\beta, h),$$

ce qui achève la démonstration.

27. Soient $\beta \geq 0$ et $h, h' \geq 0$.

Notons que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\psi_{\beta, h'}(x) = \psi_{\beta, h}(x) + (h' - h)x.$$

Par suite,

$$\psi_{\beta, h'}(x_*(\beta, h')) = \psi_{\beta, h}(x_*(\beta, h')) + (h' - h)x_*(\beta, h').$$

Il en découle

$$(1) \quad g(\beta, h') \leq g(\beta, h) + (h' - h)x_*(\beta, h').$$

De même, on a

$$\psi_{\beta, h'}(x_*(\beta, h)) = \psi_{\beta, h}(x_*(\beta, h)) + (h' - h)x_*(\beta, h),$$

ce qui conduit à l'inégalité

$$(2) \quad g(\beta, h') \geq g(\beta, h) + (h' - h)x_*(\beta, h).$$

Les inégalités (1) et (2) ci-haut donnent

$$(h' - h)x_*(\beta, h) \leq g(\beta, h') - g(\beta, h) \leq (h' - h)x_*(\beta, h'),$$

d'où le résultat annoncé.

28. Soit $\beta \geq 0$ fixé, $h > 0$ et $s \in \mathbb{R}^*$ assez petit tel que $h + s \geq 0$.

La question précédente fournit

$$(**) \quad sx_*(\beta, h) \leq g(\beta, h + s) - g(\beta, h) \leq sx_*(\beta, h + s).$$

Par ailleurs, la continuité de la fonction $h \mapsto x_*(\beta, h)$ sur $\mathbb{R}_+$ implique

$$x_*(\beta, h + s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} x_*(\beta, h).$$

En divisant l'identité (**) par s tout en séparant le cas $s > 0$ du cas $s < 0$, ensuite, en faisant tendre dans chaque cas s vers 0, on voit immédiatement que la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a

$$\frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h) = x_*(\beta, h).$$

29. Comme $\psi_{\beta,h}(x) = \psi_{\beta,-h}(-x)$ alors on a

$$g(\beta, h) = g(\beta, -h).$$

En combinant ce dernier résultat avec la question précédente, on voit que la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On va étudier alors la dérivabilité de $h \mapsto g(\beta, h)$ en 0.

► Supposons que $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

D'après la question 27, on a pour tout $h' \geq 0$,

$$h'x_*(\beta, 0) \leq g(\beta, h') - g(\beta, 0) \leq h'x_*(\beta, h'),$$

comme $x_*(\beta, 0) = 0$ en vertu de la question 25, on a pour tout $h' \geq 0$,

$$0 \leq g(\beta, h') - g(\beta, 0) \leq h'x_*(\beta, h').$$

En divisant par $h' > 0$ puis par $h' < 0$ et en utilisant la continuité de $h \mapsto x_*(\beta, h)$, on déduit que $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable à droite en 0 et cette dérivée en 0 est nulle, donc

$$\frac{g(\beta, h) - g(\beta, 0)}{h} = -\frac{g(\beta, -h) - g(\beta, 0)}{-h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 0.$$

En conclusion, la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable en 0 et donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

► Supposons que $\beta > \frac{1}{2}$.

D'après la question 27 (pour $h = 0$ et $h' \geq 0$) et par continuité de $h \mapsto x_*(\beta, h)$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\frac{g(\beta, h) - g(\beta, 0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} x_*(\beta, 0) > 0.$$

Comme $g(\beta, h) = g(\beta, -h)$, on a

$$\frac{g(\beta, h) - g(\beta, 0)}{h} = -\frac{g(\beta, -h) - g(\beta, 0)}{-h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} -x_*(\beta, 0) < 0,$$

ceci prouve que $h \mapsto g(\beta, h)$ n'est pas dérivable en 0 donc elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ aussi.

En guise de conclusion, on déduit de ce qui précède que

$$h \mapsto g(\beta, h) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

30. Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$G_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln E((\beta, h).X),$$

où

$$X = (NS_N^2, NS_N).$$

Il est clair que X est une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^2$ car S_N est finie. D'après la question 8, G_N est convexe sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et elle est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ en raison de la question 7.

Par conséquent, pour $\beta \geq 0$ fixé, on montre comme dans la question 16 que la fonction $h \mapsto G_N(\beta, h)$ est convexe pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

De surcroît, il est admis que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $G_N(\beta, h) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} g(\beta, h)$.

Finalement, lorsque $h > 0$, il découle de la question 28 que la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable en h et que sa dérivée en h vaut $x_*(\beta, h)$.

Il est alors légitime d'appliquer la question 4 qui affirme que si $h > 0$, on a

$$\frac{\partial G_N}{\partial h}(\beta, h) = \frac{1}{N} \frac{\frac{\partial Y_N}{\partial h}(\beta, h)}{Y_N(\beta, h)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} x_*(\beta, h).$$

Le résultat prononcé devient plus claire en observant que l'on a

$$\frac{\partial Y_N}{\partial h} = E \left(NS_N e^{\beta NS_N^2 + h NS_N} \right)$$

avec

$$S_N^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j.$$

31. Soient $\beta \geq 0$ et $h \in \mathbb{R}$.

On a $\psi'_{\beta, h}(x_*(\beta, h)) = 0$, d'où

$$2\beta x_*(\beta, h) + h = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x_*(\beta, h)}{1 - x_*(\beta, h)} \right).$$

D'autre part, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad th'(t) = 1 - th^2(t) = \frac{1}{ch^2(t)} > 0.$$

Par suite, th réalise une bijection strictement croissante et dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\text{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.

En outre, on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\text{th}^{-1})'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{th}^{-1}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Comme

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

et

$$\text{th}^{-1}(0) = 0,$$

on déduit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{th}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = I'(x).$$

Par conséquent,

$$2\beta x_*(\beta, h) + h = \text{th}^{-1}(x_*(\beta, h)).$$

En conclusion,

$$\text{th}(2\beta x_*(\beta, h) + h) = x_*(\beta, h).$$

32. D'abord, on réécrit le résultat de la question précédente sous la forme

$$x_* \left(\frac{1}{2}, h \right) + h = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x_* \left(\frac{1}{2}, h \right)}{1 - x_* \left(\frac{1}{2}, h \right)} \right)$$

pour $\beta \geq 0$ et $h > 0$.

Par continuité de $h \mapsto x_*(\beta, h)$ en 0, la question 25 fournit

$$x_* \left(\frac{1}{2}, h \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} x_* \left(\frac{1}{2}, 0 \right) = 0.$$

En écrivant :

$$\ln \left(\frac{1 + x_* \left(\frac{1}{2}, h \right)}{1 - x_* \left(\frac{1}{2}, h \right)} \right) = \ln \left(1 + x_* \left(\frac{1}{2}, h \right) \right) - \ln \left(1 - x_* \left(\frac{1}{2}, h \right) \right)$$

puis en utilisant les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

on obtient immédiatement, lorsque $h \rightarrow 0^+$,

$$h = \frac{x_*\left(\frac{1}{2}, h\right)}{3} + o\left(x_*\left(\frac{1}{2}, h\right)\right).$$

Par suite,

$$3h \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} x_*^3\left(\frac{1}{2}, h\right) \quad \text{ou encore} \quad x_*\left(\frac{1}{2}, h\right) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} (3h)^{\frac{1}{3}}.$$

On conclut que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x_*\left(\frac{1}{2}, h\right)}{(3h)^{\frac{1}{3}}} = 1.$$