

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, X/ENS 2026, filière PC.
Version provisoire du 20/04/2026

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Première partie

1. Soit $t > 0$. On a

$$x = \frac{t}{t+h}(x-h) + \frac{h}{t+h}(x+t).$$

Par convexité de g , on a

$$g(x) \leq \frac{t}{t+h}g(x-h) + \frac{h}{t+h}g(x+t).$$

Cette inégalité s'écrit encore

$$\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \leq \frac{g(x+t) - g(x)}{t}.$$

En passant à la limite quand t tend vers 0, il vient

$$\boxed{\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \leq g'(x)}.$$

L'autre inégalité se démontre de façon analogue en partant de

$$x = \frac{h}{t+h}(x-t) + \frac{t}{t+h}(x+h).$$

Il vient

$$g(x) \leq \frac{h}{t+h}g(x-t) + \frac{t}{t+h}g(x+h)$$

puis

$$\frac{g(x-t) - g(x)}{-t} \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

et enfin

$$\boxed{g'(x) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f_n(x) + (1-\alpha)f_n(y).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y),$$

ce qui montre que $\boxed{f \text{ est convexe}}$.

3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\boxed{x \mapsto f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/2^n}}$$

est un contre-exemple : chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}$ et (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto |x|$ qui est bien convexe mais non dérivable en 0.

4. D'après 1., on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h > 0$ et pour tout n :

$$\frac{f_n(x) - f_n(x-h)}{h} \leq f'_n(x) \leq \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}.$$

Et aussi

$$-\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq -f'(x) \leq -\frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

En sommant, il vient

$$\frac{f_n(x) - f_n(x-h) - f(x+h) + f(x)}{h} \leq f'_n(x) - f'(x) \leq \frac{f_n(x+h) - f_n(x) - f(x) + f(x-h)}{h}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h) - f(x+h) + f(x)}{h} = f'(x) - f'(x) = 0$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x) - f'(x) = 0,$$

il existe $h > 0$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x-h) - f(x+h) + f(x)}{h} \geq -\varepsilon \text{ et } \frac{f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)}{h} \leq \varepsilon.$$

Ce h étant fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x) - f_n(x-h) - f(x+h) + f(x)}{h} = \frac{f(x) - f(x-h) - f(x+h) + f(x)}{h}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x) - f(x) + f(x-h)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)}{h}.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{f_n(x) - f_n(x-h) - f(x+h) + f(x)}{h} \geq -2\varepsilon \text{ et } \frac{f_n(x+h) - f_n(x) - f(x) + f(x-h)}{h} \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a

$$-2\varepsilon \leq f'_n(x) - f'(x) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre en étant revenu à la définition ε -esque de la limite que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = f'(x)}$.

5. La fonction

$$\varphi : t \mapsto g(x+tu)$$

est convexe car g l'est. Elle est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car g l'est. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi''(t) \geq 0.$$

Or, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions de plusieurs variables donne

$$g(x+tu) \underset{t \rightarrow 0}{=} g(x) + t\langle \nabla g(x), u \rangle + \frac{t^2}{2} u^T H_g(x) u + o(t^2).$$

On en déduit en particulier que

$$\varphi''(0) = u^T H_g(x) u \geq 0.$$

Ceci étant valable pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^d, H_g(x) \in S_d^+(\mathbb{R})}.$$

6. Afin de montrer que g est convexe, il suffit de montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ fixés, la fonction

$$t \mapsto \psi(t) = g((1-t)x + ty)$$

est convexe sur $[0, 1]$. Or,

$$\forall t \in [0, 1], \psi''(t) = (y - x)^T H_g((1-t)x + ty)(y - x)^T \geq 0,$$

ce qui conclut.

7. Par théorème de transfert,

$$\phi(\lambda) = \ln \left[\sum_{x \in X(\Omega)} \exp \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right) \mathbb{P}(X = x) \right].$$

La fonction

$$\lambda \mapsto \sum_{x \in X(\Omega)} \exp \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \right) \mathbb{P}(X = x)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ comme somme finie de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, à valeurs > 0 . Par composition,

ϕ est bien de classe $\mathcal{C}^2$.

On a ensuite,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{\sum_{x \in X(\Omega)} x_i \exp \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k x_k \right) \mathbb{P}(X = x)}{\sum_{x \in X(\Omega)} \exp \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k x_k \right) \mathbb{P}(X = x)} \stackrel{\text{transfert}}{=} \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]}.$$

On a à nouveau par transfert

$$\frac{\partial(\lambda \mapsto \mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}])}{\partial \lambda_j}(\lambda) = \mathbb{E}[X_j X_i e^{\lambda \cdot X}] \text{ et } \frac{\partial(\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}])}{\partial \lambda_j}(\lambda) = \mathbb{E}[X_j e^{\lambda \cdot X}].$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) = \frac{\mathbb{E}[X_j X_i e^{\lambda \cdot X}] \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}] - \mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}] \mathbb{E}[X_j e^{\lambda \cdot X}]}{(\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}])^2} = \frac{\mathbb{E}[X_j X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} - \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \frac{\mathbb{E}[X_j e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]}.$$

8. D'après 6., il suffit de montrer que la hessienne de ϕ est symétrique positive, c'est-à-dire que pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} u_i u_j \left(\frac{\mathbb{E}[X_j X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} - \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \frac{\mathbb{E}[X_j e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \right) \geq 0.$$

Or,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} u_i u_j \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \frac{\mathbb{E}[X_j e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} = \left(\frac{\mathbb{E}[(u \cdot X) e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \right)^2$$

et

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} u_i u_j \frac{\mathbb{E}[X_j X_i e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} = \frac{\mathbb{E}[(u \cdot X)^2 e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]}.$$

Or, d'après Cauchy-Schwarz,

$$(\mathbb{E}[(u \cdot X) e^{\lambda \cdot X}])^2 = \left(\mathbb{E}[(u \cdot X) e^{\lambda \cdot X/2} \times e^{\lambda \cdot X/2}] \right)^2 \leq \mathbb{E}[(u \cdot X)^2 e^{\lambda \cdot X}] \times \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]$$

et donc

$$\left(\frac{\mathbb{E}[(u \cdot X) e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \right)^2 \leq \frac{\mathbb{E}[(u \cdot X)^2 e^{\lambda \cdot X}]}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]},$$

ce qui donne le résultat.

Deuxième partie

9. On a, en utilisant l'indépendance des σ_i ,

$$\begin{aligned}
 Z_{N+1}(0, h) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(H_{N+1}(0, h, X^{(N+1)}) \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(h \sum_{i=1}^{N+1} \sigma_i \right) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{N+1} e^{h\sigma_i} \right] \\
 &= \prod_{i=1}^{N+1} \mathbb{E}(e^{h\sigma_i}) \\
 &= \mathbb{E}(e^{h\sigma_{N+1}}) \prod_{i=1}^N \mathbb{E}(e^{h\sigma_i}) \\
 &= \frac{e^h + e^{-h}}{2} Z_N(0, h) \\
 &= \text{ch}(h) Z_N(0, h).
 \end{aligned}$$

De là,

$$\boxed{Z_N(0, h) = (\text{ch}(h))^N \text{ et } F_N(0, h) = \ln(\text{ch}(h))}.$$

10. Notons

$$X = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_N \sigma_1, \sum_{i=1}^N \sigma_i \right)$$

et

$$\lambda = (\beta, h).$$

Alors,

$$F_N(\lambda) = F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]$$

et la question 8. implique que $\boxed{F_N \text{ est bien convexe}}$.

11. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(T) = T^2 - (e^{\beta-h} + e^{\beta+h})T + e^{2\beta} - e^{-2\beta}.$$

Le discriminant de ce polynôme est égal à

$$\Delta = e^{2\beta-2h} + e^{2\beta+2h} + 2e^{2\beta} - 4(e^{2\beta} - e^{-2\beta}) = e^{2\beta}(e^{-h} + e^h)^2 - 8 \text{sh}(2\beta) = 4(e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta)).$$

Comme

$$e^{2\beta} \text{ch}^2(h) \geq e^{2\beta} > e^{2\beta} - e^{-2\beta} = 2 \text{sh}(2\beta),$$

on a $\Delta > 0$, ce qui montre que A possède deux valeurs propres réelles distinctes.

La plus grande, $\lambda(\beta, h)$ est donnée par

$$\boxed{\lambda(\beta, h) = \frac{e^{\beta-h} + e^{\beta+h} + 2\sqrt{e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta)}}{2} = e^{\beta} \text{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta)}}.$$

12. Immédiat.

13. On a

$$Z_N(\beta, h) = \mathbb{E} \left[\left(\prod_{i=1}^{N-1} B_{\sigma_i, \sigma_{i+1}} \right) B_{\sigma_N, \sigma_1} \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^N} \left(\prod_{i=1}^{N-1} B_{\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}} \right) B_{\varepsilon_N, \varepsilon_1}.$$

Remarquons alors qu'en notant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, on a

$$B_{1,1} = a_{1,1}, B_{1,-1} = a_{1,2}, B_{-1,1} = a_{2,1} \text{ et } B_{-1,-1} = a_{2,2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^{N-1}} B_{1, \varepsilon_2} \left(\prod_{i=2}^{N-1} B_{\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}} \right) B_{\varepsilon_N, 1} = [A^N]_{1,1}$$

et que

$$\sum_{(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^{N-1}} B_{-1, \varepsilon_2} \left(\prod_{i=2}^{N-1} B_{\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}} \right) B_{\varepsilon_N, -1} = [A^N]_{2,2}.$$

De là,

$$\boxed{Z_N(\beta, h) = \frac{1}{2^N} ([A^N]_{1,1} + [A^N]_{2,2}) = \frac{1}{2^N} \text{tr}(A^N)}.$$

14. Soit $\mu(\beta, h)$ la plus petite valeur propre de A . On a

$$\begin{aligned} F_N(\beta, h) &= \frac{1}{N} (-N \ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h)^N + \mu(\beta, h)^N)) \\ &= \frac{1}{N} (-N \ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h)^N (1 + (\mu(\beta, h)/\lambda(\beta, h))^N))) \\ &= -\ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h)) + \frac{1}{N} \ln(1 + (\mu(\beta, h)/\lambda(\beta, h))^N). \end{aligned}$$

Comme $|\mu(\beta, h)/\lambda(\beta, h)| < 1$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \ln(1 + (\mu(\beta, h)/\lambda(\beta, h))^N) = 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(\beta, h) = -\ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h))}.$$

15. Immédiat par composition car $e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta) > 0$ pour tout (β, h) .

16. Reprenons les notations de **10.** : on définit

$$X = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma_N \sigma_1, \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) = (X_1, X_2)$$

et

$$\lambda = (\beta, h) \mapsto \phi(\lambda) = \ln \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}].$$

On a alors, d'après **7.** :

$$F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \phi(\lambda) \text{ et } m_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \frac{\partial \phi}{\partial \beta}(\lambda) = \frac{\partial F_N}{\partial \beta}(\lambda).$$

Reste à compiler les résultats des questions précédentes : chaque F_N est de classe $\mathcal{C}^\infty$, chaque F_N est convexe (par rapport à $\lambda = (\beta, h)$ et donc par rapport à β). La suite (F_N) converge simplement vers $\beta \mapsto -\ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h))$ et cette fonction est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après **4.**, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial F_N}{\partial \beta}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial h} (-\ln(2) + \ln(\lambda(\beta, h))) = \frac{\partial}{\partial h} \ln(\lambda(\beta, h)).$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} m_N(\beta, h) = \frac{\partial}{\partial h} \ln(\lambda(\beta, h))}.$$

17. Pour $\beta \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \ln(\lambda(\beta, h)) - \beta &= \ln \left(e^\beta \text{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta} \text{ch}^2(h) - 2 \text{sh}(2\beta)} \right) - \beta \\ &= \ln \left(\text{ch}(h) + \sqrt{\text{ch}^2(h) - 2e^{-2\beta} \text{sh}(2\beta)} \right) \\ &\xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \ln \left(\text{ch}(h) + \sqrt{\text{ch}^2(h) - 1} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \ln \left(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(h) - 1} \right) &= \ln \left(\operatorname{ch}(h) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(h)} \right) \\
 &= \ln (\operatorname{ch}(h) + |\operatorname{sh}(h)|) \\
 &= \ln (\operatorname{ch}(|h|) + \operatorname{sh}(|h|)) \\
 &= \ln(e^{|h|}) \\
 &= |h|.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall h \in \mathbb{R}, \lim_{\beta \rightarrow +\infty} g_\beta(h) = |h|}.$$

18. On a

$$g'_\beta(h) = \frac{1}{\lambda(\beta, h)} \left[e^\beta \operatorname{sh}(h) + \frac{2e^{2\beta} \operatorname{ch}(h) \operatorname{sh}(h)}{2\sqrt{e^{2\beta} \operatorname{ch}^2(h) - 2 \operatorname{sh}(2\beta)}} \right].$$

On a de suite

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g'_\beta(0) = 0.$$

Puis, d'après 17.,

$$\lambda(\beta, h) \underset{\beta \rightarrow +\infty}{\sim} e^{|h|} e^\beta$$

et donc

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g'_\beta(h) = e^{-|h|} \left(\operatorname{sh}(h) + \frac{\operatorname{ch}(h) \operatorname{sh}(h)}{\operatorname{sh}(|h|)} \right).$$

Si $h > 0$, il vient

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g'_\beta(h) = 1$$

et si $h < 0$,

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g'_\beta(h) = -1.$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g'_\beta(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases} .}$$

La fonction limite n'étant pas continue, $\boxed{\text{la convergence n'est pas uniforme}}.$

Troisième partie

19. Par croissances comparées, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} I(x) = \lim_{x \rightarrow -1} I(x) = 0}$$

donc I se prolonge par continuité sur $[-1, 1]$ en posant $\boxed{I(1) = I(-1) = 0}.$

20. Les variables $\varepsilon_i = \frac{\sigma_i + 1}{2}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et sont indépendantes. Or

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2\varepsilon_i - 1) = -1 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i.$$

Comme $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, 1/2)$, il vient

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \mathbb{P}(S_N = -1 + 2k/N) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}}$$

et

$$\mathbb{P}(S_N = x) = 0 \text{ si } x \notin \mathcal{M}_N.$$

21. D'après ce qui précède,

$$\mathbb{P}(S_N = u_N) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{N(1+u_N)/2}.$$

Un calcul à l'aide de la formule de Stirling donne

$$\binom{N}{N(1+u_N)/2} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 2^N (1+u_N)^{-(1+u_N)N/2} (1-u_N)^{-(1-u_N)N/2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-x^2)N\pi}}$$

que l'on écrit

$$\binom{N}{N(1+u_N)/2} = 2^N (1+u_N)^{-(1+u_N)N/2} (1-u_N)^{-(1-u_N)N/2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-x^2)N\pi}} (1+o(1)).$$

De là,

$$-\frac{1}{N} \ln \mathbb{P}(S_N = u_N) = \frac{1+u_N}{2} \ln(1+u_N) + \frac{1-u_N}{2} \ln(1-u_N) + o(1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x).$$

ERREUR D'ENONCE : j'obtiens donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} -\frac{1}{N} \ln \mathbb{P}(S_N = u_N) = \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x) = I(x) + \ln 2.$$

22. L'inégalité

$$G_N(\beta, h) \geq \beta x^2 + hx + \frac{1}{N} \mathbb{P}(S_N = x)$$

est équivalente à

$$\mathbb{P}(S_N = x) \leq e^{-N\beta x^2 - Nh x} \mathbb{E}(e^{\beta N S_N^2 + h N S_N}).$$

Or,

$$(S_N = x) \subset (e^{N\beta S_N^2 + Nh S_N} = e^{N\beta x^2 + Nh x}) \subset (e^{N\beta S_N^2 + Nh S_N} \geq e^{N\beta x^2 + Nh x}).$$

En utilisant l'inégalité de Markov, il vient

$$\mathbb{P}(S_N = x) \leq \mathbb{P}(e^{N\beta S_N^2 + Nh S_N} \geq e^{N\beta x^2 + Nh x}) \leq e^{-N\beta x^2 - Nh x} \mathbb{E}(e^{\beta N S_N^2 + h N S_N}).$$

23. Tenant compte de l'erreur précédente, il doit sans doute falloir supposer que

$$g(\beta, h) = \sup_{x \in [-1, 1]} (\beta x^2 + hx - I(x) - \ln(2)).$$

On a pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$I'(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$$

et

$$I''(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

De là,

$$\psi''_{\beta, h}(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2\beta \leq \frac{1}{1-x^2}.$$

Si $\beta \in [0, 1/2]$, $\psi''_{\beta, h}(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Si $\beta > 1/2$, $\psi''_{\beta, h}(x) \leq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}.$

24. Si $\beta \in [0, 1/2]$ et $h > 0$, la fonction $\psi''_{\beta,h}$ est strictement concave sur $[-1, 1]$, continue sur $[-1, 1]$ et vérifie $\lim_{x \rightarrow 1} \psi'_{\beta,h}(x) = -\infty$: elle atteint donc son maximum en un unique point $x_*(\beta, h)$. Si $h > 0$, $\psi'_{\beta,h}(0) = h > 0$ donc $x_*(\beta, h) \in]0, 1[$.
Si $\beta > 1/2$ et $h > 0$, comme $h > 0$ et comme

$$x \mapsto \beta x^2 - I(x) - \ln(2)$$

est paire, on a pour tout $x \in]0, 1]$, $\psi_{\beta,h}(-x) < \psi_{\beta,h}(x)$ donc le maximum de $\psi_{\beta,h}$ est atteint sur $[0, 1]$. Or, sur $[0, 1[$, $\psi'_{\beta,h}$ est croissante sur $\left[0, \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}\right]$ à valeurs > 0 , puis strictement décroissante sur $\left[\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}, 1\right]$. Elle s'annule donc exactement une fois, ce qui signifie que le maximum de $\psi_{\beta,h}$ est atteint en unique point $x_*(\beta, h) \in \left]\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}, 1\right[$.

Dans le cas $h < 0$, la parité de

$$x \mapsto \beta x^2 - I(x) - \ln(2)$$

permet de raisonner de façon analogue en changeant x en $-x$ et on en déduit que $\psi_{\beta,h}$ atteint son maximum en un unique point $x_*(\beta, \alpha) \in]-1, 0[$.

25. *Etudier des fonctions idiotes à la fin d'un sujet X-ENS me laisse rêveur...*

Si $h = 0$, la fonction $\psi_{\beta,0}$ est paire et de dérivée nulle en 0.

Si $\beta \in [0, 1/2]$, $\psi_{\beta,0}$ est de plus strictement concave : 0 est donc l'unique point où $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum.

Si $\beta > 1/2$, $\psi_{\beta,0}$ est strictement convexe de dérivée strictement positive sur $\left]0, \sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}\right]$, puis strictement concave de dérivée tendant vers $-\infty$ en 1 : $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en un unique point $x_*(\beta, 0) \in \left]\sqrt{1 - \frac{1}{2\beta}}, 1\right[$. Par parité, $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum sur $[-1, 1]$ en $\pm x_*(\beta, 0)$.

26. Notons $x_{**} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_*(\beta, v_n)$.

On a pour tout n et pour tout x ,

$$\psi_{\beta, v_n}(x_*(\beta, v_n)) \geq \psi_{\beta, v_n}(x).$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, il vient

$$\forall x, \psi_{\beta, h}(x_{**}) \geq \psi_{\beta, h}(x).$$

Par unicité du point où $\psi_{\beta, h}$ atteint son maximum, il vient $x_{**} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_*(\beta, v_n) = x_*(\beta, h)$.

27. On a

$$(h' - h)x_*(\beta, h) = \psi_{\beta, h'}(x_*(\beta, h)) - \psi_{\beta, h}(x_*(\beta, h)) = \psi_{\beta, h'}(x_*(\beta, h)) - g(\beta, h) \leq g(\beta, h') - g(\beta, h).$$

En échangeant les rôles de h et h' , on obtient

$$(h - h')x_*(\beta, h') \leq g(\beta, h) - g(\beta, h'),$$

ce qui donne bien

$$\boxed{(h' - h)x_*(\beta, h) \leq g(\beta, h') - g(\beta, h) \leq (h' - h)x_*(\beta, h')}.$$

28. La fonction $h \mapsto x_*(\beta, h)$ est définie sans ambiguïté sur $\mathbb{R}^{+*}$, et y est continue d'après le résultat admis. Supposons par exemple $h' > h > 0$. Il vient

$$x_*(\beta, h) \leq \frac{g(\beta, h') - g(\beta, h)}{h' - h} \leq x_*(\beta, h').$$

En faisant tendre h' vers h et en utilisant la continuité de $h' \mapsto x_*(\beta, h')$, on en déduit que

$$\lim_{h' \rightarrow h^+} \frac{g(\beta, h') - g(\beta, h)}{h' - h} = x_*(\beta, h).$$

En procédant de façon analogue pour $0 < h' < h$, on a

$$\lim_{h' \rightarrow h^-} \frac{g(\beta, h') - g(\beta, h)}{h' - h} = x_*(\beta, h),$$

ce qui montre que $h' \mapsto g(\beta, h')$ est dérivable en h et que

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h) = x_*(\beta, h)}.$$

- 29. Question peu précise.** Ce qui précède montre que $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si $\boxed{\beta \in [0, 1/2]}$. Pour $\beta > 1/2$, ce qui précède montre la dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$ et la dérivabilité à droite (et à gauche) en $h = 0$ mais il n'est pas clair que ces deux demi-dérivées en 0 soient égales.

30. On a

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \exp \left(\frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \right] = \mathbb{E} [S_N \exp(\beta N S_N^2 + h N S_N)].$$

Notons

$$\lambda = (\beta, h), X = (N S_N^2, N S_N) = (X_1, X_2) \text{ et } \phi(\lambda) = \ln \mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}].$$

On a alors

$$Y_N(\beta, h) = e^{\phi(\lambda)}$$

et

$$\frac{1}{Y_N(\beta, h)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \exp \left(\frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \right] = \frac{1}{\mathbb{E}[e^{\lambda \cdot X}]} \frac{1}{N} \mathbb{E} [X_2 \exp(\lambda \cdot X)] = \frac{1}{N} \frac{\partial \phi}{\partial h}(\beta, h) = \frac{\partial G_N}{\partial h}(\beta, h).$$

Comme les G_N sont convexes et comme (G_N) converge simplement vers g dérivable par rapport à h , les résultats de la partie I impliquent que

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{Y_N(\beta, h)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \exp \left(\frac{\beta}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j + h \sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \right] = \frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h) = x_*(\beta, h)}.$$

- 31.** Comme $x_*(\beta, h)$ est un extremum intérieur de $\psi_{\beta, h}$, on a

$$\psi'_{\beta, h}(x_*(\beta, h)) = 0.$$

Ceci signifie que

$$2\beta x_*(\beta, h) + h = \ln \left(\sqrt{\frac{1 + x_*(\beta, h)}{1 - x_*(\beta, h)}} \right).$$

De là,

$$\boxed{\text{th}(h + 2\beta x_*(\beta, h)) = \frac{\sqrt{\frac{1 + x_*(\beta, h)}{1 - x_*(\beta, h)}} - \sqrt{\frac{1 - x_*(\beta, h)}{1 + x_*(\beta, h)}}}{\sqrt{\frac{1 + x_*(\beta, h)}{1 - x_*(\beta, h)}} + \sqrt{\frac{1 - x_*(\beta, h)}{1 + x_*(\beta, h)}}} = \frac{(1 + x_*(\beta, h)) - (1 - x_*(\beta, h))}{(1 + x_*(\beta, h)) + (1 - x_*(\beta, h))} = x_*(\beta, h)}.$$

- 32.** Pour $\beta = 1/2$, on obtient

$$\text{th}(h + x_*(1/2, h)) = x_*(1/2, h).$$

On en déduit que $h + x_*(1/2, h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} x_*(1/2, h)$ et en particulier que $h = o(x_*(1/2, h))$. Or,

$$\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

De là,

$$(h + x_*(1/2, h)) - \frac{1}{3}(h + x_*(1/2, h))^3 + o(x_*(1/2, h)^3) = x_*(1/2, h)$$

puis

$$3h - x_*(1/2, h)^3 = o(x_*(1/2, h)^3),$$

puis,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{x_*(1/2, h)^3} = 1$$

et enfin

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_*(1/2, h)}{(3h)^{1/3}} = 1}.$$

Commentaires personnels conclusifs qui n'engagent que moi.

Bonne nouvelle : l'erreur de Q21 n'impacte pas la suite.

Mauvaise nouvelle : je n'ai rien compris à ce sujet et n'ai aucune idée de ce que l'on a démontré.

Sujet horriblement technique qui risque de faire des ravages...