

CONCOURS NATIONAL COMMUN (CNC)
SESSION 2026 FILIÈRE MP¹
MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

L'usage de tout document et de tout matériel électronique ou informatique (y compris la calculatrice) est interdit.

EXERCICE

La loi binomiale négative

(Noté sur 4 points sur 20)

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Les X_i représentent la répétition d'une même expérience aléatoire : la $i^{\text{ème}}$ expérience est un succès si et seulement si X_i prend la valeur 1. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On pose également $q = 1 - p$.

1 ▷ Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ainsi que son domaine de convergence.

2 ▷ Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour le reste de l'exercice.

3 ▷ Montrer que la série $\sum_{k \geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ converge et que sa somme vaut 1.

On peut maintenant définir une variable aléatoire Y_n à valeurs dans $\{n, n+1, \dots\} = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ par sa loi :

$$\forall k \geq n, \quad \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

4 ▷ Reconnaître la loi de Y_1 .

5 ▷ Expliquer rapidement pourquoi S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

6 ▷ Pour $k \geq n$, calculer $\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n-1)$.

7 ▷ Comment interpréter la loi de la variable Y_n ?

8 ▷ On pose Z_n la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'expérience nécessaire à l'obtention d'exactly n succès lors de notre répétition d'expérience (Z_n vaut le rang d'obtention du n -ème succès).

8.a Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour Z_n ?

8.b Sans utiliser la question Q.7. précédente, et en effectuant un raisonnement par dénombrement, montrer que Z_n suit la même loi que Y_n .

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

9 ▷ On considère la série entière $\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(Y_n = k) t^k$ de variable réelle t , et on note f_n sa somme.

Calculer le rayon de convergence R de cette série entière, et montrer en particulier que $R > 1$.

10 ▷ Montrer que, pour $t \in]-R, R[$:

$$f_n(t) = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}$$

11 ▷ Montrer que Y_n est d'espérance finie et calculer $E(Y_n)$. On pourra penser à dériver f_n .

PROBLÈME

On note ch la fonctions cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique définies pour tout réel x , par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On pourra utiliser les développements en séries entières suivants,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} u^n.$$

On rappelle également les valeurs des intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{2n} = \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt = \frac{\pi (2n)!}{4^n (n!)^2}, \quad w_{2n+1} = \int_0^\pi \cos^{2n+1}(t) dt = 0.$$

Pour tout réel x pour lequel la série converge, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

PARTIE 1

Calcul d'une intégrale auxiliaire

Pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque l'intégrale existe, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} dt$.

1 ▷ Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

2 ▷ Étude de la fonction g

2.a Montrer que la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.b Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

2.c Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$g'(x) = -I \times \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

2.d Calculer $g(0)$.

2.e Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g'(t) dt$ et déterminer sa valeur.

3 ▷ En déduire que $I = \sqrt{\pi}$.

PARTIE 2

Étude de la fonction F

4 ▷ Définition de la fonction F

4.a Déterminer l'ensemble de définition de la fonction F .

4.b Étudier les variations de la fonction F et la convexité de son graphe.

5 ▷ Encadrement de la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$

5.a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{4^n}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}.$$

5.b En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x} \leq F(x) \leq \operatorname{ch}(2x)$$

5.c Quelle est la limite de F en $+\infty$?

6 ▷ Une expression intégrale de F

6.a Pour $t \in [0; \pi]$ fixé, donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \exp(2x \cos(t))$, en précisant son rayon de convergence.

6.b En déduire la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt.$$

7 ▷ Pour tout réel x , on pose $f_1(x) = \int_{\pi/2}^\pi e^{2x \cos(t)} dt$. Trouver la limite de $f_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$ en appliquant le théorème de la convergence dominée.

8 ▷ Équivalent de F

On définit, pour x réel, $f_2(x) = \int_0^{\pi/2} e^{2x \cos(t)} dt$.

8.a Soit $x > 0$ fixé. À l'aide du changement de variable $u = 2x(1 - \cos(t))$, établir :

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du$$

8.b Vérifier que, si $x > 0$ et $u \in [0; 2x]$, alors $u - \frac{u^2}{4x} \geq \frac{u}{2}$.

8.c Établir que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du = \sqrt{\pi}$$

et en déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

9 ▷ Conclure que

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}.$$

PARTIE 3

Transformée de Laplace de F

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur tout intervalle $]0, a]$ avec $a > 0$. On définit sa transformée de Laplace L_f , lorsque l'intégrale converge, par

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

10 ▷ On considère la fonction G définie sur $]0, +\infty[$ par $G(t) = \frac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$.

10.a Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $L_G(x)$ existe si et seulement si $x > 2$.

10.b À l'aide du changement de variable $u = (x-2)t$ et compte tenu de la valeur de I trouvée en 1ère Partie, déterminer, pour $x > 2$, la valeur de $L_G(x)$.

11 ▷ **Calcul de $L_F(x)$.** On rappelle que F est définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

11.a Déterminer le domaine de définition de L_F .

11.b Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$.

11.c Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

11.d Montrer que, pour tout réel $x > 2$, la série $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt$ converge.

11.e En déduire que, pour tout réel $x > 2$, on a :

$$L_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}.$$

11.f Établir que, pour $x > 2$, on a :

$$L_F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

12 ▷ Montrer l'équivalence $L_F(x) \underset{x \rightarrow 2^+}{\sim} L_G(x)$.

PARTIE 4

Cas général : Transformée de Laplace et abscisse de convergence

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, et intégrable sur tout intervalle $]0, a]$ ($a > 0$). On définit l'ensemble de convergence

$$I(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid t \mapsto f(t) e^{-xt} \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[\right\},$$

13 ▷ Montrer que si $x_0 \in I(f)$, alors $[x_0, +\infty[\subset I(f)$.

On note E l'ensemble des fonctions f ci-dessus telles que $I(f) \neq \emptyset$ et $I(f) \neq \mathbb{R}$.

14 $\triangleright$ Soit $f \in E$.

14.a Montrer que $I(f)$ admet une borne inférieure, notée $\alpha(f)$.

14.b En déduire que $I(f)$ est de la forme $]\alpha(f), +\infty[$ ou $[\alpha(f), +\infty[$.

15 $\triangleright$ Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $x \mapsto L_f(x)$ est continue sur $]\alpha(f), +\infty[$.

16 $\triangleright$ Montrer que si f est positive, alors L_f est décroissante. En déduire que, si $\alpha(f) \in I(f)$, alors L_f est bornée sur $[\alpha(f), +\infty[$.

17 $\triangleright$ Soit $g \in E$ une fonction positive telle que L_g soit bornée sur $[\alpha(g), +\infty[$. Établir les propriétés suivantes :

17.a Il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $x > \alpha(g)$ et tout $A \geq 0$,

$$\int_0^A g(t) e^{-xt} dt \leq M.$$

17.b En déduire que la transformée de Laplace de g est définie sur $[\alpha(g), +\infty[$ (c'est-à-dire que $\alpha(g) \in I(g)$).

PARTIE 5

Comparaison des transformées de Laplace de deux fonctions équivalentes

Soient g et h deux fonctions positives appartenant à E , telles que :

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} h(x)$$

18 $\triangleright$ Montrer que leurs abscisses de convergence coïncident : $\alpha(g) = \alpha(h)$.

On suppose dans la suite que $\alpha(h) \notin I(h)$.

19 $\triangleright$ Quelle conséquence en déduire sur le comportement de $L_h(x)$ lorsque $x \rightarrow \alpha(h)^+$?

20 $\triangleright$ Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$,

$$|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h(t)|.$$

21 $\triangleright$ En déduire que, pour tout $x \in]\alpha(h), +\infty[$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)| e^{-xt} dt.$$

22 $\triangleright$ Conclure que L_g et L_h sont équivalentes lorsque x tend vers $\alpha(h)^+$.

FIN DU SUJET