

Calcul Probabiliste & Analyse Asymptotique

Séries entières, intégrales à paramètres et transformées de Laplace

Concours National Commun – Session 2026 – MP Épreuve de Mathématiques I

Correction¹

* * * * *

Exercice - La loi binomiale négative

1.1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, la série géométrique $\sum_{n \in \mathbf{N}} x^n$ converge et on a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Le domaine de convergence de cette série entière est l'intervalle ouvert $] -1, 1[$, le rayon de convergence est donc $R = 1$.

1.2. Montrons par récurrence que pour $m \in \mathbf{N}$:

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}$$

- Pour $m = 0$, le membre de gauche s'écrit $\frac{0!}{(1-x)^1} = \frac{1}{1-x}$ et le membre de droite s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k =$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$. L'égalité est vérifiée sur $] -1, 1[$ d'après la question **1.1**.

- Soit $m \in \mathbf{N}$. Supposons la propriété vraie au rang m . La série entière $x \mapsto \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}$ ayant un rayon de convergence $R = 1$, elle est dérivable terme à terme sur $] -1, 1[$. En dérivant les deux membres de l'égalité par rapport à x , on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} \right) = \frac{(m+1)!}{(1-x)^{m+2}}$$

Et pour le terme général de la série (le premier terme pour $k = m$ étant constant, sa dérivée s'annule) :

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m} \right) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{k! \cdot (k-m)}{(k-m)!} x^{k-m-1} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-(m+1))!} x^{k-(m+1)}$$

Par égalité des dérivées, la propriété est établie au rang $m+1$.

L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour tout $m \in \mathbf{N}$ sur $] -1, 1[$.

1.3. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Posons $m = n-1 \in \mathbf{N}$. Comme $p \in]0, 1[$, on a $q = 1-p \in]0, 1[\subset]-1, 1[$. On a :

$$\binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{m!(k-n)!}$$

¹tarqimed@gmail.com

La somme de la série s'écrit alors :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = \frac{p^n}{m!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k-n)!} q^{k-n}$$

Effectuons le changement d'indice $j = k - 1$. Lorsque k va de n à ∞ , j va de $n - 1 = m$ à ∞ . On obtient alors :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = \frac{p^n}{m!} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{j!}{(j-m)!} q^{j-m}$$

D'après la question 1.2., la série entière converge en $x = q \in]-1, 1[$, ce qui assure la convergence de notre série. De plus :

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{j!}{(j-m)!} q^{j-m} = \frac{m!}{(1-q)^{m+1}}$$

Comme $1 - q = p$ et $m + 1 = n$, on en déduit par substitution :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = \frac{p^n}{m!} \cdot \frac{m!}{p^n} = 1$$

La série converge et sa somme vaut exactement 1.

1.4. Pour $n = 1$, la variable aléatoire Y_1 prend ses valeurs dans l'ensemble :

$$\mathbf{N} \cap [1, +\infty[= \mathbf{N}^*$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, en remplaçant n par 1 dans la formule de l'énoncé, on obtient :

$$\mathbb{P}(Y_1 = k) = \binom{k-1}{1-1} p^1 q^{k-1} = \binom{k-1}{0} p q^{k-1} = p q^{k-1}$$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre p . On a donc :

$$Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

1.5. Par définition de l'énoncé, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre p . Or, la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p représente le nombre de succès obtenus au cours de n répétitions indépendantes d'une même expérience. Par définition du cours, cette somme suit une loi binomiale de paramètres n et p . On en déduit immédiatement :

$$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

1.6. On remarque que $S_k = S_{k-1} + X_k$. Donc l'événement $(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n - 1)$ est donc équivalent à l'événement $(S_{k-1} = n - 1 \text{ et } X_k = 1)$. On a ainsi :

$$\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n - 1) = \mathbb{P}(S_{k-1} = n - 1 \text{ et } X_k = 1)$$

Par hypothèse, la variable X_k est indépendante des variables précédentes $(X_1, \dots, X_{k-1})$, et est donc indépendante de leur somme S_{k-1} . On peut ainsi écrire sous forme de produit :

$$\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n - 1) = \mathbb{P}(S_{k-1} = n - 1) \times \mathbb{P}(X_k = 1)$$

D'une part, d'après la question 1.5., S_{k-1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k-1, p)$, ce qui donne :

$$\mathbb{P}(S_{k-1} = n - 1) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{(k-1)-(n-1)} = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n}$$

D'autre part, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p , donc $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$. On obtient finalement pour tout $k \geq n$:

$$\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n - 1) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n} \times p = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

1.7. D'après la formule donnant la loi de Y_n dans l'énoncé et le résultat de la question 1.6, on constate que pour tout $k \geq n$:

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n-1)$$

L'événement $(S_{k-1} = n-1 \text{ et } S_k = n)$ signifie que :

- Au cours des $k-1$ premières expériences, on a obtenu exactement $n-1$ succès.
- La k -ième expérience donne un succès ($X_k = 1$), ce qui amène le total à exactement n succès.

Par conséquent, cet événement décrit la réalisation du n -ième succès précisément au k -ième essai.

On en conclut que la variable aléatoire Y_n représente le **rang d'obtention du n -ème succès** lors de la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli de paramètre p .

1.8. Comparaison de Z_n et Y_n .

1.8.1. La variable aléatoire Z_n est définie comme le nombre d'expériences nécessaires à l'obtention de exactement n succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli.

- Pour obtenir n succès, il faut effectuer au minimum n expériences (ce qui correspond au cas où les n premières expériences sont toutes des succès).
- Le nombre d'expériences nécessaires est illimité, car on peut théoriquement obtenir une suite infinie d'échecs avant d'atteindre le n -ème succès.

Par conséquent, l'ensemble $Z_n(\Omega)$ des valeurs possibles de Z_n est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à n :

$$Z_n(\Omega) = \{k \in \mathbf{N} \mid k \geq n\} = \mathbf{N} \cap [n, +\infty[$$

1.8.2. Soit $k \geq n$. L'événement $(Z_n = k)$ signifie que le n -ème succès se produit exactement à la k -ième expérience.

Cet événement se décompose de manière unique et équivalente en l'intersection de deux événements indépendants :

- Obtenir exactement $n-1$ succès au cours des $k-1$ premières expériences.
- Obtenir un succès à la k -ième expérience (c'est-à-dire $X_k = 1$).

Par indépendance des épreuves de Bernoulli :

- Le nombre de choix possibles pour l'emplacement des $n-1$ succès parmi les $k-1$ premiers essais est donné par $\binom{k-1}{n-1}$. Chaque configuration fixe possède $n-1$ succès et $(k-1)-(n-1) = k-n$ échecs, ce qui correspond à une probabilité de $p^{n-1}q^{k-n}$. La probabilité de cette première phase est donc :

$$\binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n}$$

- La probabilité d'obtenir un succès au k -ième essai est égale à $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$.

En combinant par produit ces deux étapes indépendantes, on obtient pour tout $k \geq n$:

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n} \times p = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

Cette formule étant identique à celle définissant la loi de Y_n pour tout $k \geq n$, et les deux variables ayant le même ensemble de valeurs possibles d'après la question **1.8.1.**, on en conclut que Z_n suit la même loi que Y_n .

1.9. Le terme général de la série entière s'écrit pour tout $k \geq n$:

$$p_k(t) = \mathbb{P}(Y_n = k)t^k = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k$$

Appliquons la règle de d'Alembert à la suite $|u_k(t)|$ pour $t \neq 0$:

$$\left| \frac{p_{k+1}(t)}{p_k(t)} \right| = \frac{\binom{k}{n-1} p^n q^{k+1-n} |t|^{k+1}}{\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} |t|^k} = \frac{\frac{k!}{(n-1)!(k-n+1)!}}{\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}} \cdot q \cdot |t| = \frac{k}{k-n+1} q |t|$$

D'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{p_{k+1}(t)}{p_k(t)} \right| = q |t|$. D'après la règle de d'Alembert :

- La série converge absolument si $q|t| < 1$, soit $|t| < \frac{1}{q}$.
- La série diverge si $q|t| > 1$, soit $|t| > \frac{1}{q}$.

Le rayon de convergence de la série entière est par conséquent :

$$R = \frac{1}{q} > 1$$

Car $q \in]0, 1[$.

1.10. Soit $t \in]-R, R[$. D'après la question **1.9.**, on a $R = \frac{1}{q}$, ce qui garantit que $|qt| < 1$, soit $qt \in]-1, 1[$.

Par définition de $f_n(t)$, on a :

$$f_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k = (pt)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} (qt)^{k-n}$$

Posons $m = n - 1 \in \mathbb{N}$. On a $\binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{m!(k-n)!}$, ce qui donne :

$$f_n(t) = \frac{(pt)^n}{m!} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k-n)!} (qt)^{k-n}$$

Avec le changement d'indice $j = k - 1$, on obtient :

$$f_n(t) = \frac{(pt)^n}{m!} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{j!}{(j-m)!} (qt)^{j-m}$$

Comme $qt \in]-1, 1[$, on applique le résultat de la question **1.2.** à la variable $x = qt$, on conclut pour tout $t \in]-R, R[$:

$$f_n(t) = \frac{(pt)^n}{m!} \cdot \frac{m!}{(1-qt)^n} = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}.$$

1.11. La fonction $f_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) t^k$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 1$.

Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad f'_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}(Y_n = k) t^{k-1}$$

Comme $1 \in]-R, R[$, la série numérique $\sum_{k \geq n} k \mathbb{P}(Y_n = k)$ converge absolument. Cela garantit que la variable aléatoire Y_n admet une espérance finie, et que l'on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = f'_n(1)$$

D'après la question **1.10.**, pour tout $t \in]-R, R[$, $f_n(t) = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}$. En dérivant cette fonction, on obtient :

$$f'_n(t) = \frac{np(pt)^{n-1} \cdot (1-qt)^n - (pt)^n \cdot n(-q)(1-qt)^{n-1}}{(1-qt)^{2n}} = \frac{np^n t^{n-1}}{(1-qt)^{n+1}}$$

D'où :

$$f'_n(1) = \frac{np^n}{p^{n+1}} = \frac{n}{p}$$

L'espérance de Y_n est bien finie et vaut :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{p}$$

Problème : Transformée de Laplace

1^{ère} Partie - Calcul d'une intégrale auxiliaire

2.1. Justification de l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue par morceaux et positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

- **Au voisinage de 0** : On a l'équivalent suivant :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}$ est convergente puisque $\frac{1}{2} < 1$. Par théorème d'équivalence pour les fonctions positives, f est intégrable sur $]0, 1]$.

- **Au voisinage de $+\infty$** : Par croissances comparées, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t} = 0$$

Par conséquent, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, le théorème de comparaison des fonctions positives assure que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

L'intégrabilité de la fonction sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ montre que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. L'intégrale I est donc bien définie.

2.2. Étude de la fonction g

2.2.1 Considérons la fonction ϕ définie pour tout $(x, t) \in \mathbf{R}_+ \times]0, +\infty[$ par :

$$\phi(x, t) = \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$$

- **Domaine de définition** : Soit $x \in \mathbf{R}_+$ fixé. La fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Comme $x \geq 0$ et $1+t \geq 1$, on a $e^{-x(1+t)} \leq 1$. On en déduit la majoration :

$$0 \leq \phi(x, t) \leq \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

L'intégrabilité en 0 découle directement de l'équivalent $\phi(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ ($\frac{1}{2} < 1$). Au voisinage de $+\infty$, si $x = 0$, $\phi(0, t) = \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ qui est intégrable ($\frac{3}{2} > 1$). Si $x > 0$, la décroissance exponentielle assure la convergence. Ainsi, g est bien définie sur $\mathbf{R}_+$.

- **Continuité sur $\mathbf{R}_+$** : Pour établir la continuité de g sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, on montre sa continuité sur tout intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$ où $x_0 > 0$. Appliquons le théorème de continuité sous le signe somme :

- ◊ Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \phi(x, t)$ est continue sur $[x_0, +\infty[$.
- ◊ Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- ◊ **Hypothèse de domination** : Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, par décroissance de la fonction exponentielle et sachant que $1+t \geq 1$, on obtient :

$$|\phi(x, t)| \leq \frac{e^{-x_0(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-x_0 t}}{\sqrt{t}} = \psi(t)$$

- ◊ **Intégrabilité de la fonction ψ** : La fonction $\psi : t \mapsto \frac{e^{-x_0 t}}{\sqrt{t}}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable linéaire $u = x_0 t$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0 t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{I}{\sqrt{x_0}}$$

Cette intégrale converge d'après la question **2.1.**

La fonction g est donc continue sur $]0, +\infty[$. La continuité en 0 se traite de même avec la domination globale indépendante de x par $\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ sur un segment $[0, a]$ ($a > 0$). On conclut que g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2.2.2. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on utilise les deux majorations élémentaires suivantes :

$$1+t \geq 1 \implies \frac{1}{1+t} \leq 1 \quad \text{et} \quad e^{-x(1+t)} = e^{-x}e^{-xt} \leq e^{-xt}$$

La fonction sous-signe intégrale étant positive, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

Effectuons le changement de variable linéaire $u = xt$ (avec $x > 0$ fixé), d'où $dt = \frac{du}{x}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{x}} x} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{I}{\sqrt{x}}$$

On aboutit à l'encadrement valable pour tout $x > 0$:

$$0 \leq g(x) \leq \frac{I}{\sqrt{x}}$$

L'intégrale I étant convergente d'après la question **2.1.**, elle représente une constante réelle indépendante de x . Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes assure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

2.2.3. Posons $\phi(x, t) = \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$ définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégral :

- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \phi(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée partielle par rapport à x vaut :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = -\frac{(1+t)e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} = -\frac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}$$

- Pour tout $x > 0$, les fonctions $t \mapsto \phi(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- **Hypothèse de domination locale :** Soit $x_0 > 0$. Pour tout $x \in [x_0, +\infty[$ et tout $t \in]0, +\infty[$, par décroissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-x_0(1+t)}}{\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-x_0 t}}{\sqrt{t}} = \psi(t)$$

- **Intégrabilité :** La fonction dominatrice ψ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable $u = x_0 t$ donne $\int_0^{+\infty} \psi(t) dt = \frac{I}{\sqrt{x_0}}$, intégrale convergente d'après la question **2.1.**

Le théorème s'applique sur tout intervalle $[x_0, +\infty[$. Par conséquent, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}} dt = -e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

En effectuant le changement de variable linéaire $u = xt$ ($dt = \frac{du}{x}$ et $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}$) pour $x > 0$ fixé, il vient :

$$g'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}} x} du = -e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = -\frac{I e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

2.2.4 Calcul de la valeur exacte de $g(0)$: En évaluant l'expression de la fonction g au point $x = 0$, on obtient l'intégrale suivante :

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} dt$$

Avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient :

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2) \cdot u} \cdot (2u du) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.$$

2.2.5 Dédution de la valeur exacte de I : D'après la question **2.2.3**, nous avons déterminé la dérivée de g sur $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = -\frac{Ie^{-x}}{\sqrt{x}}$$

La fonction g étant continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on peut intégrer cette relation entre 0 et un réel $X > 0$:

$$\int_0^X g'(x) dx = g(X) - g(0)$$

En tendant X vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g'(x) dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) - g(0) = -\pi$$

2.3 d'après la question précédente, on a :

$$-\int_0^{+\infty} \frac{Ie^{-x}}{\sqrt{x}} dx = -\pi \implies I \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \pi$$

On obtient ainsi l'équation :

$$I^2 = \pi$$

La fonction sous-signe intégrale étant strictement positive sur $]0, +\infty[$, la constante I est nécessairement positive ($I > 0$). On en conclut la valeur exacte de I :

$$I = \sqrt{\pi}$$

2^{ème} Partie - Étude de la fonction F

3.1 Définition de la fonction F

3.1.1 La fonction F est définie pour tout réel x pour lequel la série converge par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

Il s'agit d'une série entière de la forme $\sum a_n x^{2n}$ avec $a_n = \frac{1}{(n!)^2}$. Déterminons son rayon de convergence en appliquant la règle de d'Alembert pour un réel $x \neq 0$ fixé :

$$\left| \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2}}{\frac{x^{2n}}{(n!)^2}} \right| = \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} \times \frac{(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{|x|^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc la série converge absolument sur $\mathbf{R}^*$. La convergence étant immédiate en $x = 0$, le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.

Par conséquent, l'ensemble de définition de la fonction F est l'ensemble des nombres réels :

$$\mathcal{D}_F = \mathbf{R}$$

3.1.2 La fonction F est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. De plus, $F(x)$ est somme des puissances paires (x^{2n}), la fonction F est paire. On peut restreindre son étude à l'intervalle $[0, +\infty[$.

On obtient la dérivée première de F par dérivation terme à terme de sa série entière sur $\mathbf{R}$:

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n \cdot x^{2n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^{2n-1}}{(n-1)! n!}$$

- Pour $x = 0$, on a $F'(0) = 0$.
- Pour tout $x > 0$, chaque terme de la somme est strictement positif car $x^{2n-1} > 0$. On a donc $F'(x) > 0$.

Par conséquent, la fonction F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Par parité, elle est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$. Elle admet un minimum global en $x = 0$ qui vaut $F(0) = 1$.

De même, on calcule la dérivée seconde de F par dérivation terme à terme :

$$F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2n-1)x^{2n-2}}{(n-1)! n!}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F''(x) > 0$$

La dérivée seconde étant strictement positive sur $\mathbf{R}$, le graphe de la fonction F est strictement convexe sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F''(x)$	$+$	0	$+$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

3.2 Encadrement de la fonction F sur $\mathbf{R}_+^*$

3.2.1 • Soit $n \in \mathbf{N}$. Introduisons le coefficient binomial $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. L'inégalité $\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$ s'écrit de manière équivalente :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 4^n \iff \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

D'après la formule du binôme de Newton, on sait que :

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

Tous les termes de cette somme étant strictement positifs, le terme central $\binom{2n}{n}$ est majoré par la somme totale, d'où $\binom{2n}{n} \leq 4^n$. L'inégalité de droite est vérifiée.

• L'inégalité $\frac{4^n}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2}$ s'écrit de manière équivalente :

$$4^n \leq \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \iff 4^n \leq (2n+1) \binom{2n}{n}$$

Puisque $\binom{2n}{n}$ est le plus grand coefficient de la $2n$ -ième ligne du triangle de Pascal, on a pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$:

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

En sommant cette inégalité pour k variant de 0 à $2n$ (qui comporte $2n + 1$ termes), il vient :

$$4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n + 1) \binom{2n}{n}$$

En divisant les deux membres par $(2n + 1)!$, on retrouve précisément :

$$\frac{4^n}{(2n + 1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2}$$

On en conclut que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{4^n}{(2n + 1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$$

3.2.2 Soit $x > 0$. D'après la question **3.2.1**, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{4^n}{(2n + 1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}$$

Comme $x > 0$, on obtient les inégalités :

$$\frac{(2x)^{2n}}{(2n + 1)!} \leq \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \leq \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Toutes ces séries entières ayant un rayon de convergence infini, on peut sommer ces inégalités terme à terme pour n allant de 0 à ∞ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n + 1)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

- Au centre, on retrouve la définition de la fonction : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = F(x)$.
- À droite, on reconnaît le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique appliqué en $2x$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(2x)$.
- À gauche, en factorisant par $\frac{1}{2x}$ ($x > 0$), on fait apparaître le développement en série entière de la fonction sinus hyperbolique appliqué en $2x$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n + 1)!} = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n + 1)!} = \frac{\text{sh}(2x)}{2x}$$

On en déduit bien, pour tout réel $x > 0$, l'encadrement :

$$\frac{\text{sh}(2x)}{2x} \leq F(x) \leq \text{ch}(2x)$$

3.2.3 D'après la question 3.2.2, on dispose de la minoration suivante pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{\text{sh}(2x)}{2x} \leq F(x)$$

De plus, le membre de gauche s'écrit :

$$\frac{\text{sh}(2x)}{2x} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4x} = \frac{e^{2x}}{4x} - \frac{e^{-2x}}{4x}$$

On en déduit par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(2x)}{2x} = +\infty$$

Par théorème de comparaison (minoration), la fonction F diverge également en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

3.3 Une expression intégrale de F

3.3.1 Soit $t \in [0, \pi]$ fixé. La fonction exponentielle possède le développement en série entière de référence suivant, de rayon de convergence infini :

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$$

En effectuant la substitution $u = 2x \cos(t)$, on obtient pour tout réel x :

$$\exp(2x \cos(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x \cos(t))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cos^n(t)}{n!} x^n$$

Déterminons le rayon de convergence R de cette série entière de la variable x :

- Si $\cos(t) \neq 0$, la règle de D'Alembert montre que le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
- Si $\cos(t) = 0$ (soit $t = \frac{\pi}{2}$), la fonction est identiquement égale à 1 et la série se réduit à son premier terme pour tout x . Elle converge sur $\mathbf{R}$ et son rayon de convergence est également $R = +\infty$.

Ainsi, pour tout $t \in [0, \pi]$, le développement est valable sur $\mathbf{R}$ et son rayon de convergence est :

$$R = +\infty$$

3.3.2 Pour x fixé, la série de fonctions continues $t \mapsto \frac{2^n x^n}{n!} \cos^n(t)$ converge normalement (et donc uniformément) sur le segment $[0, \pi]$ car elle est majorée par le terme général convergent d'une série numérique $\frac{2^n |x|^n}{n!}$. On peut donc intégrer terme à terme sur $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \int_0^\pi \cos^n(t) dt$$

Utilisons les valeurs des intégrales de Wallis fournies en rappel dans l'énoncé :

- Pour les termes d'indices impairs, l'intégrale est nulle : $\int_0^\pi \cos^{2n+1}(t) dt = 0$.
- Pour les termes d'indices pairs, l'intégrale vaut : $\int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt = \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

D'où :

$$\int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2} \right) = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} = \pi F(x)$$

Ce qui donne immédiatement :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt$$

3.4 Soit la fonction ϕ définie pour $x \in \mathbf{R}$ et $t \in [\pi/2, \pi]$ par $\phi(x, t) = e^{2x \cos(t)}$. Étudions sa limite lorsque $x \rightarrow +\infty$:

• **Convergence simple :**

- Si $t \in]\pi/2, \pi]$, on a $\cos(t) < 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \cos(t) = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \cos(t)} = 0$.
- Si $t = \frac{\pi}{2}$, on a $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc pour tout x , $e^{2x \cos(\pi/2)} = e^0 = 1$.

La fonction sous-signe intégrale converge donc simplement presque partout sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ vers la fonction définie par :

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } t \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

- **Hypothèse de domination :** Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $t \in [\pi/2, \pi]$, la quantité $\cos(t)$ est négative ou nulle. On a donc $2x \cos(t) \leq 0$, ce qui implique par croissance de l'exponentielle :

$$|\phi(x, t)| = e^{2x \cos(t)} \leq e^0 = 1 = \psi(t)$$

- **Intégrabilité :** La fonction constante $\psi : t \mapsto 1$ est continue sur le segment $[\pi/2, \pi]$, son intégrabilité est donc immédiate.

Les conditions du théorème de convergence dominée étant satisfaites, nous pouvons permuter la limite et l'intégration :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \, dt = 0$$

3.5 Équivalent de F

3.5.1 On part de la définition de la fonction f_2 sur l'intervalle $[0, \pi/2]$:

$$f_2(x) = \int_0^{\pi/2} e^{2x \cos(t)} \, dt$$

Effectuons le changement de variable défini par $u = 2x(1 - \cos(t))$, pour un réel $x > 0$ fixé. L'application $t \mapsto 2x(1 - \cos(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, \pi/2]$.

- **Bornes d'intégration :** Lorsque $t = 0$, $u = 0$. Lorsque $t = \pi/2$, $u = 2x$.
- **Expression de l'intégrande :** La relation donne $\cos(t) = 1 - \frac{u}{2x}$. On a donc :

$$e^{2x \cos(t)} = e^{2x(1 - \frac{u}{2x})} = e^{2x - u} = e^{2x} e^{-u}$$

- **Expression de la différentielle dt :** En différenciant u , il vient $du = 2x \sin(t) dt$. Comme $t \in [0, \pi/2]$, $\sin(t) \geq 0$. Exprimons $\sin(t)$ en fonction de u :

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{u}{x} - \frac{u^2}{4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}$$

On en déduit l'expression de la différentielle :

$$dt = \frac{du}{2x \sin(t)} = \frac{du}{2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} = \frac{du}{2\sqrt{x} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}}$$

En injectant ces expressions dans l'intégrale de départ, et par linéarité (en sortant les constantes vis-à-vis de u), on aboutit directement à la relation attendue :

$$f_2(x) = \int_0^{2x} e^{2x} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{x} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du$$

3.5.2 Soient $x > 0$ et $u \in [0, 2x]$. Calculons la différence entre les deux membres afin d'en étudier le signe :

$$\left(u - \frac{u^2}{4x}\right) - \frac{u}{2} = \frac{u}{2} - \frac{u^2}{4x}$$

En réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\frac{u}{2} - \frac{u^2}{4x} = \frac{2xu - u^2}{4x} = \frac{u(2x - u)}{4x}$$

Déterminons le signe de cette expression sur l'intervalle donné :

- Par hypothèse, $x > 0$, donc le dénominateur $4x$ est strictement positif.
- Puisque $u \in [0, 2x]$, on a d'une part $u \geq 0$ et d'autre part $u \leq 2x$, ce qui implique que $2x - u \geq 0$.

Le numérateur étant le produit de deux quantités positives ou nulles, il est lui-même positif ou nul. Par conséquent, la différence est positive ou nulle :

$$\frac{u(2x - u)}{4x} \geq 0$$

On en conclut immédiatement que pour tout $x > 0$ et tout $u \in [0, 2x]$:

$$u - \frac{u^2}{4x} \geq \frac{u}{2}$$

3.5.2 Posons $\phi(x, u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} \mathbf{1}_{]0, 2x[}(u)$ pour tout $u > 0$ et $x > 0$. Appliquons le théorème de convergence dominée pour la variable continue $x \rightarrow +\infty$:

- **Convergence simple** : Pour tout $u > 0$ fixé, dès que $2x > u$, l'indicatrice vaut 1. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{4x} = 0$, on obtient par continuité :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x, u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

La fonction limite est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- **Hypothèse de domination** : D'après la question 3.5.2, pour tout $u \in]0, 2x[$, on a $u - \frac{u^2}{4x} \geq \frac{u}{2} > 0$. Par croissance de la fonction racine et décroissance de l'inverse :

$$\forall x > 0, \text{ presque tout } u > 0, \quad |\phi(x, u)| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{u}{2}}} = \frac{\sqrt{2}e^{-u}}{\sqrt{u}} = \psi(u)$$

- **Intégrabilité** : La fonction dominatrice ψ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. De plus, d'après les résultats des questions 2.1 et 2.2.5, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = I = \sqrt{\pi}$ converge, ce qui prouve l'intégrabilité de ψ .

En appliquant le théorème de convergence dominée, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$$

D'après la formule établie à la question 3.5.1, on a :

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du$$

L'intégrale convergeant vers la constante non nulle $\sqrt{\pi}$, on en déduit par produit l'équivalent en $+\infty$:

$$f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} e^{2x}}{2\sqrt{x}}$$

3.6 D'après l'expression intégrale de la fonction F établie à la question 3.3.2, on a :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt$$

En utilisant la relation de Chasles au point $t = \frac{\pi}{2}$, on décompose l'intervalle d'intégration :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} e^{2x \cos(t)} dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{2x \cos(t)} dt \right)$$

On reconnaît les définitions respectives des fonctions auxiliaires $f_2(x)$ et $f_1(x)$ étudiées précédemment :

$$F(x) = \frac{1}{\pi}(f_2(x) + f_1(x))$$

Étudions les comportements asymptotiques lorsque $x \rightarrow +\infty$:

- D'après la question 3.4, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$.
- D'après la question 3.5.3, on a $f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}}$. Cette quantité tendant vers $+\infty$, il vient que $f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_2(x))$.

Par somme d'équivalents dont l'un est négligeable devant l'autre, on obtient :

$$f_2(x) + f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_2(x)$$

En multipliant par le facteur pré-intégral $\frac{1}{\pi}$, on en déduit par transitivité :

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}e^{2x}}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{x}}$$

On conclut de manière rigoureuse à l'équivalent de la fonction F en $+\infty$:

$$F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$$

3^{ème} Partie - Transformée de Laplace de F

4.1 Existence et calcul de $L_G(x)$.

4.1.1 Soit $x \in \mathbf{R}$. Par définition, la transformée de Laplace de la fonction G au point x s'exprime sous la forme :

$$L_G(x) = \int_0^{+\infty} G(t)e^{-xt}dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x-2)t}}{\sqrt{t}} dt$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{-(x-2)t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$. Étudions sa convergence aux bornes :

- **Au voisinage de 0** : Pour tout réel x , on a l'équivalence :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Par comparaison avec les fonctions de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2}$), l'intégrabilité au voisinage de 0 est donc acquise pour tout réel x .

- **Au voisinage de $+\infty$** :

– **Si $x > 2$** : Par croissances comparées, on a $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. La fonction $det \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant intégrable en $+\infty$, l'intégrale converge.

– **Si $x \leq 2$** : On a, pour tout $t \geq 1$, $e^{-(x-2)t} \geq 1$. On obtient la minoration $f(t) \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$.

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ étant divergente ($\frac{1}{2} \leq 1$), l'intégrale de f diverge par comparaison.

L'intégrale convergeant en 0 dans tous les cas, elle est globalement convergente si et seulement si elle converge en $+\infty$. On en déduit bien que $L_G(x)$ existe si et seulement si :

$$x > 2$$

4.1.2 Pour $x > 2$, la transformée de Laplace de la fonction G s'écrit :

$$L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x-2)t}}{\sqrt{t}} dt$$

Posons $u = (x-2)t$. Comme $x > 2$, l'application est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme strictement croissant préservant les bornes d'intégration 0 et $+\infty$. On a $t = \frac{u}{x-2}$, ce qui donne $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x-2}}$ et $dt = \frac{du}{x-2}$. D'où :

$$L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x-2}}} \frac{du}{x-2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x-2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

D'après la question **2.2.5**, $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$. Par substitution et simplification, on conclut pour tout $x > 2$:

$$L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x-2}} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

4.2 Existence et calcul de $L_F(x)$.

4.2.1 Par définition, la transformée de Laplace de F au point x est définie par l'intégrale :

$$L_F(x) = \int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt} dt$$

La fonction $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ est continue et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$. L'unique borne à étudier pour la convergence est $+\infty$.

D'après la question **3.6**, on a au voisinage de $+\infty$:

$$F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$$

D'où :

$$F(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-xt} = \frac{e^{-(x-2)t}}{2\sqrt{\pi t}} = G(t)e^{-xt}$$

Les fonctions en présence étant strictement positives au voisinage de $+\infty$, le théorème de comparaison par équivalence s'applique :

- L'intégrale de $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ au voisinage de $+\infty$ est de même nature que l'intégrale de $t \mapsto G(t)e^{-xt}$.
- Or, d'après la question 4.1.1, l'intégrale de $G(t)e^{-xt}$ sur $[1, +\infty[$ converge si et seulement si $x > 2$.

La convergence sur $[0, 1]$ étant triviale par continuité de $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ sur un segment, on en déduit que l'intégrale définissant $L_F(x)$ converge si et seulement si $x > 2$. Le domaine de définition de la fonction L_F est donc :

$$\mathcal{D}_{L_F} =]2, +\infty[$$

4.2.2 Soient $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ fixés. Posons la fonction intégrande $f : t \mapsto t^n e^{-xt}$. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{+} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant positive et intégrable sur $[1, +\infty[$, le théorème de comparaison des fonctions positives garantit l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$.

La convergence sur le segment $[0, 1]$ étant immédiate par continuité, l'intégrale est convergente. Son existence est ainsi démontrée pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

4.2.3 Soit $x > 0$ un réel strictement positif fixé. Démontrons cette formule par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}$.

- Pour $n = 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x}$$

Comme $\frac{0!}{x^{0+1}} = \frac{1}{x}$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons que l'égalité soit vraie au rang n . Étudions l'intégrale au rang $n + 1$ sur un segment $[0, X]$ pour $X > 0$, en effectuant une intégration par parties :

$$\int_0^X t^{n+1} e^{-xt} dt = \left[-\frac{t^{n+1} e^{-xt}}{x} \right]_0^X + \frac{n+1}{x} \int_0^X t^n e^{-xt} dt$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-xt} dt = \frac{n+1}{x} \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$$

En substituant la valeur de l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-xt} dt = \frac{n+1}{x} \times \frac{n!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$

La relation est ainsi établie au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, la formule est valide pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

4.2.4 Soit $x > 2$ fixé. Le terme général de la série s'écrit :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-xt} dt$$

Puisque $x > 2 > 0$, on applique le résultat de la question **4.2.3** au rang $2n$, ce qui fournit :

$$u_n = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{x \cdot (n!)^2 \cdot x^{2n}}$$

Déterminons la nature de la série numérique de terme général strictement positif u_n en appliquant la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{x \cdot ((n+1)!)^2 \cdot x^{2n+2}}}{\frac{(2n)!}{x \cdot (n!)^2 \cdot x^{2n}}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 \cdot x^2} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}$$

D'après le critère de d'Alembert, la série converge si la limite du rapport est strictement inférieure à 1 :

$$\frac{4}{x^2} < 1 \iff x^2 > 4 \iff x > 2 \quad (\text{car } x > 0)$$

Par hypothèse, $x > 2$, la condition de convergence est donc vérifiée. La série numérique converge bien pour tout réel $x > 2$.

4.2.5 Soit $x > 2$ un réel fixé. Par définition, la transformée de Laplace s'exprime par :

$$L_F(x) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} \right) e^{-xt} dt$$

Montrons que le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions positives s'applique :

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (d'après **4.2.2**).

- La série de fonctions converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction continue $t \mapsto F(t)e^{-xt}$.
- La série numérique constituée par l'intégrale des modules converge d'après l'étude de la question 4.2.4 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} \right| dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} < +\infty$$

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique de façon rigoureuse. On peut donc permuter les symboles somme et intégrale :

$$L_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt \stackrel{\text{d'après 4.2.4}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$$

4.2.6 Soit $x > 2$ un réel fixé. L'expression obtenue à la question 4.2.5 s'écrit aussi à l'aide du coefficient binomial $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$:

$$L_F(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{x^2} \right)^n$$

Rappelons le développement en série entière de référence de la fonction de la variable t défini par :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{t}{4} \right)^n$$

Choisissons la variable $t = \frac{4}{x^2}$. Comme $x > 2$, on a $x^2 > 4$, d'où $0 < \frac{4}{x^2} < 1$. En substituant t , il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{4}{4x^2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{x^2} \right)^n$$

Par conséquent :

$$L_F(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

4.3 D'après le résultat de la question 4.2.6, on a pour tout $x > 2$:

$$L_F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}$$

On obtient ainsi l'équivalent suivant :

$$L_F(x) \underset{x \rightarrow 2^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

D'après le résultat de la question 4.1.2, on dispose de la valeur exacte de la fonction pour tout $x > 2$:

$$L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

D'où :

$$L_F(x) \underset{x \rightarrow 2^+}{\sim} L_G(x)$$

4^{ème} Partie - Cas général : Transformée de Laplace et abscisse de convergence

5.1 Soit $x_0 \in I(f)$. Par définition de l'ensemble de convergence $I(f)$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Soit un réel $x \in [x_0, +\infty[$ fixé. Étudions l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$:

- La fonction f étant continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-x_0 t}$ est également continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ par produit avec la fonction exponentielle.

- Pour tout réel $t \geq 0$, on peut décomposer le facteur exponentiel sous la forme suivante :

$$|f(t)e^{-xt}| = |f(t)e^{-x_0t} \cdot e^{-(x-x_0)t}| = |f(t)e^{-x_0t}| e^{-(x-x_0)t}$$

Comme $x \geq x_0$ et $t \geq 0$, $e^{-(x-x_0)t} \leq 1$, ce qui fournit la majoration suivante :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)e^{-x_0t}|$$

La fonction majorante $t \mapsto |f(t)e^{-x_0t}|$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$ par hypothèse, le théorème de comparaison des fonctions positives garantit l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que $x \in I(f)$ pour tout $x \geq x_0$, d'où l'inclusion :

$$[x_0, +\infty[\subset I(f)$$

5.2 Existence de $\inf I(f)$.

5.2.1 Soit $f \in E$. D'après la définition de l'ensemble E , la partie $I(f)$ est une partie non vide de $\mathbf{R}$ ($I(f) \neq \emptyset$).

Pour démontrer l'existence d'une borne inférieure dans $\mathbf{R}$ d'après la propriété de la borne inférieure, il suffit d'établir que l'ensemble $I(f)$ est minoré.

- Toujours par définition de l'ensemble E , on sait que $I(f) \neq \mathbf{R}$. Il existe donc un réel y_0 tel que $y_0 \notin I(f)$.
- Montrons par contraposition (ou par l'absurde) que y_0 est un minorant de $I(f)$. Supposons qu'il existe un élément $x_0 \in I(f)$ tel que $x_0 < y_0$.
- D'après le résultat établi à la question 5.1, comme $x_0 \in I(f)$, on a l'inclusion $[x_0, +\infty[\subset I(f)$.
- Comme $y_0 > x_0$, le réel y_0 appartient nécessairement à cet intervalle $[x_0, +\infty[$, ce qui implique que $y_0 \in I(f)$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $y_0 \notin I(f)$.

Par conséquent, pour tout $x \in I(f)$, on a obligatoirement $x \geq y_0$, ce qui prouve que la partie $I(f)$ est minorée par y_0 .

L'ensemble $I(f)$ étant une partie de $\mathbf{R}$ non vide et minorée, elle possède une borne inférieure dans $\mathbf{R}$. On note cette abscisse de convergence :

$$\alpha(f) = \inf I(f)$$

5.2.2 Posons $\alpha = \alpha(f) = \inf I(f)$. Par définition de la borne inférieure, α est un minorant de $I(f)$, ce qui implique que pour tout $x \in I(f)$, $x \geq \alpha$. On a donc l'inclusion :

$$I(f) \subset [\alpha, +\infty[$$

Soit $x \in]\alpha, +\infty[$.

- Puisque $x > \alpha$, le réel x n'est pas un minorant de $I(f)$. Il existe donc un élément $x_0 \in I(f)$ tel que :

$$\alpha \leq x_0 < x$$

- D'après la question 5.1, l'appartenance de x_0 à $I(f)$ entraîne l'inclusion $[x_0, +\infty[\subset I(f)$. Comme $x > x_0$, on en déduit immédiatement que $x \in I(f)$.

On a ainsi démontré l'inclusion réciproque pour la partie ouverte :

$$]\alpha, +\infty[\subset I(f)$$

En combinant les deux résultats, l'ensemble $I(f)$ vérifie :

$$]\alpha, +\infty[\subset I(f) \subset [\alpha, +\infty[$$

Donc la forme finale de $I(f)$ dépend de α :

- Si $\alpha \notin I(f)$, alors $I(f) =]\alpha(f), +\infty[$.
- Si $\alpha \in I(f)$, alors $I(f) = [\alpha(f), +\infty[$.

5.3 Posons $\alpha = \alpha(f)$. La transformée de Laplace est définie par :

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$$

Soit $\phi(x, t) = f(t)e^{-xt}$ définie sur $] \alpha, +\infty[\times [0, +\infty[$. Pour établir la continuité de L_f sur $] \alpha, +\infty[$, il suffit de justifier sa continuité sur tout segment de la forme $[x_0, X]$ tel que $\alpha < x_0 < X$.

Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre :

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \phi(x, t)$ est continue sur $[x_0, X]$ comme produit d'une constante et d'une fonction exponentielle.
- Pour tout $x \in [x_0, X]$, la fonction $t \mapsto \phi(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ car la fonction f l'est par hypothèse.
- **Hypothèse de domination :** Pour tout $x \in [x_0, X]$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $x \geq x_0$, d'où $-xt \leq -x_0t$. On obtient :

$$|\phi(x, t)| = |f(t)|e^{-xt} \leq |f(t)|e^{-x_0t} = \psi(t)$$

- **Intégrabilité de la fonction ψ :** La fonction $\psi : t \mapsto |f(t)|e^{-x_0t}$ est positive et continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Comme $x_0 > \alpha$, le réel x_0 appartient à l'ensemble $I(f)$ d'après la question **5.2.2**. Par définition de $I(f)$, la fonction ψ est donc intégrable sur $[0, +\infty[$.

Les hypothèses du théorème étant validées, la restriction de la fonction L_f à tout segment $[x_0, X]$ est continue. On en conclut que L_f est continue sur l'intervalle ouvert $] \alpha(f), +\infty[$.

5.4 Soit $f \in E$ une fonction positive.

- Soient $x_1, x_2 \in I(f)$ deux réels tels que $x_1 \leq x_2$. Pour tout $t \geq 0$, on a $-x_1t \geq -x_2t$. D'où :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t)e^{-x_1t} \geq f(t)e^{-x_2t}$$

Par croissance de l'intégrale (la convergence étant assurée car $x_1, x_2 \in I(f)$), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-x_1t} dt \geq \int_0^{+\infty} f(t)e^{-x_2t} dt \implies L_f(x_1) \geq L_f(x_2)$$

La fonction L_f est donc décroissante sur l'ensemble $I(f)$.

- Supposons que $\alpha = \alpha(f) \in I(f)$. D'après la question **5.2.2**, on a $I(f) = [\alpha, +\infty[$.
 - Soit $x \in [\alpha, +\infty[$, on a $x \geq \alpha$. Par décroissance de la fonction L_f , il vient $L_f(x) \leq L_f(\alpha)$.
 - Puisque f est positive, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est positive sur $[0, +\infty[$, ce qui implique par positivité de l'intégrale que $L_f(x) \geq 0$.

On obtient ainsi l'encadrement uniforme suivant pour tout $x \in [\alpha, +\infty[$:

$$0 \leq L_f(x) \leq L_f(\alpha)$$

La fonction L_f est donc bornée sur l'intervalle $[\alpha(f), +\infty[$.

5.5

5.5.1 Par hypothèse, la transformée de Laplace L_g est bornée sur l'intervalle $] \alpha(g), +\infty[$. Comme la fonction g est positive, sa transformée L_g l'est également. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x > \alpha(g), \quad 0 \leq L_g(x) \leq M$$

Soient $x > \alpha(g)$ et $A \geq 0$ deux réels fixés. La fonction $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ étant positive sur $[0, +\infty[$, l'intégrale de cette fonction est une fonction croissante de sa borne supérieure. On peut donc majorer l'intégrale sur le segment $[0, A]$ par l'intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$:

$$\int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt$$

D'où :

$$\int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq L_g(x) \leq M$$

5.5.2 Posons $\alpha = \alpha(g)$. Montrer que la transformée de Laplace de g est définie au point α revient à prouver l'intégrabilité de la fonction positive et continue par morceaux $t \mapsto g(t)e^{-\alpha t}$ sur $[0, +\infty[$. Soit $A \geq 0$ un réel fixé. D'après le résultat de la question **5.5.1**, on dispose pour tout $x > \alpha$ de l'inégalité suivante :

$$\int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq M$$

L'application $x \mapsto \int_0^A g(t)e^{-xt} dt$ est continue sur $\mathbf{R}$ d'après le théorème de continuité des intégrales sur un segment. Par passage à la limite lorsque $x \rightarrow \alpha^+$, l'inégalité large est conservée :

$$\int_0^A g(t)e^{-\alpha t} dt = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \int_0^A g(t)e^{-xt} dt \leq M$$

La fonction de la borne supérieure $A \mapsto \int_0^A g(t)e^{-\alpha t} dt$ est croissante (car g est positive) et majorée par la constante M sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de la limite monotone, cette fonction admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-\alpha t} dt$ est donc convergente, ce qui montre que $\alpha(g) \in I(g)$.

D'après la question **5.2.2**, l'intervalle de convergence $I(g) = [\alpha(g), +\infty[$, ce qui montre que la transformée de Laplace de g est bien définie sur cet intervalle.

5^{ème} Partie - Comparaison des transformées de Laplace de deux fonctions équivalentes

Soient g et h deux fonctions positives appartenant à E , telles que $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} h(x)$.

6.1 Par hypothèse, on a l'équivalent asymptotique $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} h(t)$. En multipliant par le facteur strictement positif e^{-xt} pour un réel x fixé, on obtient :

$$g(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} h(t)e^{-xt}$$

Les fonctions g et h étant positives, les fonctions intégrantes $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto h(t)e^{-xt}$ sont également positives sur $[0, +\infty[$, et continues par morceaux. Le théorème de comparaison par équivalence des fonctions positives s'applique :

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt \text{ converge} \iff \int_0^{+\infty} h(t)e^{-xt} dt \text{ converge}$$

Cette équivalence montre que pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $x \in I(g)$ si et seulement si $x \in I(h)$. Les deux ensembles de convergence sont donc identiques :

$$I(g) = I(h)$$

Deux ensembles égaux admettent la même borne inférieure dans $\mathbf{R}$. Par définition de l'abscisse de convergence, on en conclut que :

$$\alpha(g) = \alpha(h)$$

6.2 Par hypothèse, on a $\alpha(h) \notin I(h)$. En vertu de l'étude des formes de l'intervalle de convergence menée à la question 5.2.2, l'ensemble de définition de la transformée de Laplace L_h est l'intervalle ouvert :

$$I(h) =]\alpha(h), +\infty[$$

La fonction h étant positive, la fonction L_h est décroissante et minorée par 0 sur $I(h)$ d'après la question **5.4**. D'après le théorème de la limite monotone au point $\alpha(h)$, la fonction L_h admet une limite en $\alpha(h)^+$, finie ou infinie ($+\infty$).

Raisonnons par l'absurde pour déterminer la nature de cette limite :

- Supposons que $\lim_{x \rightarrow \alpha(h)^+} L_h(x) = \ell < +\infty$.
- Par décroissance et positivité, on aurait alors pour tout $x > \alpha(h)$ l'encadrement $0 \leq L_h(x) \leq \ell$, ce qui signifie que L_h est bornée sur $] \alpha(h), +\infty[$.
- Le résultat de la question **5.5.2** appliqué à la fonction positive h montre alors que $\alpha(h) \in I(h)$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

La limite ne peut donc pas être finie. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha(h)^+} L_h(x) = +\infty$$

6.3 Par hypothèse, les fonctions g et h sont deux fonctions positives sur $[0, +\infty[$ et vérifient la relation d'équivalence $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} h(t)$, ce qui équivaut à écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t) - h(t)}{h(t)} = 0$$

Ainsi pour un réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad \left| \frac{g(t) - h(t)}{h(t)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ou encore

$$\forall t \geq A, \quad |g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h(t)|$$

6.4 Soient $x \in] \alpha(h), +\infty[$ et $\varepsilon > 0$. D'après la question **6.1**, $\alpha(g) = \alpha(h)$, donc x est un point de convergence pour les deux transformées de Laplace. On a :

$$L_g(x) - L_h(x) = \int_0^{+\infty} (g(t) - h(t)) e^{-xt} dt$$

En utilisant l'inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées, on obtient la majoration globale suivante :

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^{+\infty} |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt$$

Soit le réel $A > 0$ associé à ε fourni par la question **6.3**. En appliquant la relation de Chasles au point A , on obtient :

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt$$

Sur la seconde intégrale, on utilise l'inégalité $|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h(t)|$. Par croissance de l'intégrale de fonctions positives, on peut écrire :

$$\int_A^{+\infty} |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt \leq \int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} |h(t)| e^{-xt} dt = \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)| e^{-xt} dt$$

D'où :

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)| e^{-xt} dt$$

6.5 Posons $\alpha = \alpha(h)$. Pour établir cette équivalence, montrons que :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{|L_g(x) - L_h(x)|}{L_h(x)} = 0$$

Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Reprenons la majoration de la question 6.4 associée à ce choix de ε et au réel $A > 0$ correspondant :

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)| e^{-xt} dt$$

Puisque h est positive sur $[0, +\infty[$, on peut écrire :

$$\int_A^{+\infty} |h(t)|e^{-xt}dt \leq \int_0^{+\infty} h(t)e^{-xt}dt = L_h(x)$$

D'après la question **6.2**, on sait que $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} L_h(x) = +\infty$, ce qui assure que $L_h(x) > 0$ au voisinage de α^+ .

En divisant par $L_h(x)$, il vient :

$$\frac{|L_g(x) - L_h(x)|}{L_h(x)} \leq \frac{1}{L_h(x)} \int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-xt}dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

- L'application $x \mapsto \int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-xt}dt$ est continue sur $\mathbf{R}$. Elle admet donc une limite finie au point α , ce qui implique qu'elle reste bornée au voisinage de α^+ .
- Puisque $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} L_h(x) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{1}{L_h(x)} = 0$.

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{1}{L_h(x)} \int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-xt}dt = 0$$

Il existe donc un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]\alpha, \alpha + \eta[$:

$$\frac{1}{L_h(x)} \int_0^A |g(t) - h(t)|e^{-xt}dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En combinant ces inégalités, on obtient pour tout $x \in]\alpha, \alpha + \eta[$:

$$\frac{|L_g(x) - L_h(x)|}{L_h(x)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cette majoration étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit la relation d'équivalence en $\alpha(h)^+$:

$$L_g(x) \underset{x \rightarrow \alpha(h)^+}{\sim} L_h(x)$$

FIN DU SUJET