

CONCOURS NATIONAL COMMUN (CNC )  
SESSION 2026 FILIÈRE MP  
**CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1**

m.laamoum2@gmail.com<sup>1</sup>

## EXERCICE

### La loi binomiale négative

**1** ▷ On sait que  $\forall x \in ]-1, 1[ \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ .

**2** ▷ La somme d'une série entière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  son intervalle ouvert de convergence . Donc pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^m}{dx^m} (x^k)$$

On a par récurrence  $\frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$  , donc pour  $x \in ]-1, 1[$

$$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-m+1) x^{k-m} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}.$$

Ainsi  $\forall x \in ]-1, 1[ \quad \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}$

**3** ▷ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u_k = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$  . On a, pour tout  $k \geq n$  ,  $u_k > 0$  et

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = q \frac{k}{k-n+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} q$$

Puisque  $q \in ]0, 1[$  , alors d'après la règle de D'Alembert  $\sum_{k \geq n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$  converge .

D'après **Q2** on a pour tout  $x \in ]-1, 1[$

$$\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n+1)!} x^{k-n+1} \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{(j-1)!}{(j-n)!} x^{j-n} = \sum_{j=n}^{+\infty} (n-1)! \binom{j-1}{n-1} x^{j-n}$$

et

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{n-1} x^{j-n}$$

Donc pour  $p \in ]0, 1[$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = p^n \frac{1}{(1-q)^n} = 1$$

<sup>1</sup> <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

**4** ▷ Pour  $k \geq 1$  :

$$(Y_1 = k) = \binom{k-1}{0} p^1 q^{k-1} = p q^{k-1}.$$

Donc  $Y_1$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ ,  $\boxed{Y_1 \sim \mathcal{G}(p)}$ .

**5** ▷ La variable  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  compte le nombre de succès parmi  $n$  essais indépendants.

Pour avoir  $S_n = k$ , il faut choisir quels  $k$  essais sont des succès, ce qui peut se faire de  $\binom{n}{k}$  façons. Par indépendance des variables, chaque configuration a pour probabilité  $p^k q^{n-k}$ . Ainsi,  $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  et  $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ .  
Autre méthode avec les fonctions génératrices : On a  $G_{X_i}(t) = e(t^{X_i}) = q + pt$ . Comme les variables sont indépendantes, alors

$$G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = (q + pt)^n.$$

Par la formule du binôme :

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k.$$

Or, par définition,

$$G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) t^k.$$

donc

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ainsi,  $\boxed{S_n \sim \mathcal{B}(n, p)}$ .

**6** ▷ On a  $\mathbb{P}(S_{k-1} = n-1) \neq 0$  donc

$$\mathbb{P}(S_k = n, S_{k-1} = n-1) = \mathbb{P}(S_{k-1} = n-1) \cdot \mathbb{P}_{[S_{k-1}=n-1]}(S_k = n)$$

Comme  $S_k = S_{k-1} + X_k$  alors  $\mathbb{P}_{[S_{k-1}=n-1]}(S_k = n) = \mathbb{P}(X_k = 1) = p$ , par suite

$$\mathbb{P}(S_k = n, S_{k-1} = n-1) = p \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n}$$

Ainsi  $\boxed{\mathbb{P}(S_k = n, S_{k-1} = n-1) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}}$ .

**7** ▷ D'après la question **Q.6**,  $\mathbb{P}(Y_n = k)$  coïncide avec  $\mathbb{P}(S_k = n, S_{k-1} = n-1)$ , qui est la probabilité d'avoir le  $n$ -ième succès exactement au rang  $k$ . Donc  $Y_n$  représente le numéro de l'expérience auquel on obtient le  $n$ -ième succès.

**8** ▷  $Z_n$  la variable aléatoire qui vaut le rang d'obtention du  $n$ -ième succès

**8.a** L'ensemble des valeurs possibles pour  $Z_n$  est  $\{n, n+1, \dots\} = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ .

**8.b**  $\mathbb{P}(Z_n = k)$  est la probabilité que le  $n$ -ième succès est obtenu au rang  $k$ . Donc les  $k-1$  premières expériences contiennent exactement  $n-1$  succès, c'est l'événement  $[S_{k-1} = n-1]$ . Par suite

$$[Z_n = k] = [S_{k-1} = n-1] \cap [X_k = 1] \text{ et } \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(S_{k-1} = n-1, X_k = 1)$$

Par le lemme des coalitions  $S_{k-1}$  et  $X_k$  sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(S_{k-1} = n-1) \mathbb{P}(X_k = 1) = p \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n}$$

C'est exactement  $\mathbb{P}(Y_n = k)$ , donc  $Z_n$  suit la même loi que  $Y_n$ .

**9** ▷ Soit  $u_k = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ . On a  $u_k > 0$  pour tout  $k \geq n$  et

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = q \frac{k}{k-n+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} q$$

alors d'après la règle de D'Alembert le rayon de convergence de la série  $\sum_{k \geq n} \mathbb{P}(Y_n = k) t^k$  vaut  $R = \frac{1}{q} > 1$ .

**10** ▷ Soit  $t \in ]-R, R[$ . On a

$$f_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) t^k = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k = \frac{p^n}{q^n} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} (qt)^k$$

D'après **Q.2** on a, pour  $|qt| < 1$  :

$$\frac{1}{(1-qt)^n} = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(j-1)!}{(n-1)!(j-n)!} (qt)^{j-n} = \sum_{j=n}^{\infty} \binom{j-1}{n-1} (qt)^{j-n}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} (qt)^k = \frac{(qt)^n}{(1-qt)^n},$$

Donc :

$$f_n(t) = \frac{p^n}{q^n} \cdot \frac{(qt)^n}{(1-qt)^n} = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}$$

Ainsi  $\boxed{\forall t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[, f_n(t) = \frac{(pt)^n}{(1-qt)^n}}.$

**11** ▷ On a  $f_n$  est dérivable sur  $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$  et  $\forall t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[, f'_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}(Y_n = k) t^{k-1}$ . Comme  $\frac{1}{q} > 1$ ,  $f_n$  est dérivable en 1 et

$$f'_n(1) = \sum_{k=n}^{\infty} k \mathbb{P}(Y_n = k)$$

donc  $Y_n$  admet une espérance et  $f'_n(1) = \mathbb{E}(Y_n)$ .

On a  $f'_n(t) = \frac{np^n t^{n-1}}{(1-qt)^{n+1}}$  et  $f'_n(1) = \frac{np^n}{(1-q)^{n+1}} = \frac{n}{p}$ .

Ainsi  $\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{p}}.$

## PROBLÈME

### PARTIE 1

#### Calcul d'une intégrale auxiliaire

**1** ▷ Soit  $h : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt, t \in ]0, +\infty[$ .

- En  $0^+$  :  
 $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , donc  $h$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .
- En  $+\infty$  :  
 $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t})$ . La fonction  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc  $h$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

Ainsi  $h$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et  $I$  existe.

**2 ▷ Étude de la fonction**  $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} dt$ .

**2.a •** Pour  $x \geq 0, t > 0$  :

$$\left| \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \quad (1)$$

On a  $\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$  et  $\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$ , donc la fonction  $t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Par comparaison la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Ainsi  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

• La fonction :  $t \mapsto \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$  est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ , pour tout  $x \geq 0$ .

La fonction :  $x \mapsto \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$  est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ , pour tout  $t > 0$ .

De l'inégalité (1) on a la relation de domination par une fonction intégrable  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$ .

Par le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale,  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2.b** Pour  $x \geq 0, t > 0$  :

$$\left| \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}} \right| \leq \frac{e^{-x}}{(1+t)\sqrt{t}} = e^{-x} \varphi(t) \quad (2)$$

$\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , donc

$$g(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$$

Ainsi  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}$ .

**2.c** La fonction :  $H : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x(1+t)}}{(1+t)\sqrt{t}}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , et

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, t) = -\frac{e^{-x(1+t)}}{\sqrt{t}}$$

Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$  on a pour tout  $(x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}} = \psi(t)$$

La fonction  $\psi$  est continue et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$  donc  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et pour  $x > 0$

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) dt = -e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt.$$

par le changement de variable  $u = xt$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/x}} \frac{du}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

Ainsi  $\boxed{\forall x \in ]0, +\infty[, g'(x) = -\text{I.} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}$ .

**2.d**  $g$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$  donc

$$g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} dt.$$

Changement de variable  $t = u^2$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2u}{(1+u^2)u} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi.$$

Ainsi  $\boxed{g(0) = \pi}$ .

**2.e** Soit  $b > a > 0$  on a

$$\int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a)$$

or  $\lim_{b \rightarrow +\infty} g(b) = 0$  et  $\lim_{a \rightarrow 0} g(a) = g(0) = \pi$ , alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g'(t) dt$  converge et

$$\int_0^{+\infty} g'(t) dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} g(b) - \lim_{a \rightarrow 0} g(a) = -\pi$$

**3**  $\triangleright$  On a, d'après **Q2.c**  $g'(t) = -I \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = I$ . Donc :

$$\int_0^{+\infty} g'(t) dt = -I^2.$$

De la question **Q2.e** :  $I^2 = \pi$ . Comme  $I > 0$ , alors  $\boxed{I = \sqrt{\pi}}$ .

## PARTIE 2

### Étude de la fonction $F$

**4**  $\triangleright$  Définition de la fonction  $F$ .

**4.a** Pour  $x \neq 0$  posons  $u_n = \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ .

On utilise la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs :

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{x^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc la série  $\sum \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$  converge. Elle converge aussi pour  $x = 0$ . Donc  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**4.b**  $F$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n x^{2n-1}}{(n!)^2} \text{ et } F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1) x^{2n-2}}{(n!)^2}$$

On en déduit que :

- $F$  est décroissante sur  $]-\infty, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$ .

- $F''(x) \geq 0$  pour tout  $x$ , donc  $F$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

## 5 ▷ Encadrement de la fonction $F$ sur $\mathbb{R}_+^*$ .

**5.a** On a l'équivalence

$$\frac{4^n}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!} \Leftrightarrow \frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

Etudions les variations de la suite  $\left(\binom{2n}{k}\right)_{0 \leq k \leq 2n}$  :

- Pour  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$

$$\frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \frac{2n-k}{k+1}.$$

On a

$$\frac{2n-k}{k+1} \geq 1 \iff k < n.$$

Donc la suite  $\left(\binom{2n}{k}\right)_{0 \leq k < n}$  est croissante et la suite  $\left(\binom{2n}{k}\right)_{n < k \leq 2n}$  est décroissante.

Par conséquent

$$\binom{2n}{n} = \max_{0 \leq k \leq 2n} \binom{2n}{k}.$$

- Par la formule du binôme on a  $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ .

De ce qui précède

$$\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq (2n+1) \binom{2n}{n}$$

donc

$$\binom{2n}{n} \leq 4^n \leq (2n+1) \binom{2n}{n}$$

et

$$\frac{4^n}{(2n+1)} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

Ainsi  $\boxed{\frac{4^n}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{4^n}{(2n)!}}.$

**5.b** Des inégalités précédentes on a pour  $x > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Or :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(2x)$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\text{sh}(2x)}{2x}$$

Ainsi  $\boxed{\frac{\text{sh}(2x)}{2x} \leq F(x) \leq \text{ch}(2x)}.$

**5.c** On a  $\frac{\text{sh}(2x)}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{4x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ ,  
donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty}$ .

## 6 ▷ Une expression intégrale de $F$

**6.a** Soit  $t \in [0, \pi]$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$e^{2x \cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x \cos(t))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n \cos^n(t)}{n!} x^n$$

de rayon de convergence  $R = +\infty$ .

**6.b** La série de fonctions précédente, n'est pas entière pour la variable  $t$ .

On a pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sup_{t \in [0, \pi]} \left| \frac{2^n \cos^n(t)}{n!} x^n \right| = \frac{2^n |x|^n}{n!}$$

La série  $\sum \frac{2^n |x|^n}{n!}$  converge (de somme  $e^{2|x|}$ ). Donc la série  $\sum \frac{2^n \cos^n(t)}{n!} x^n$  converge normalement et uniformément sur  $[0, \pi]$ . Le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un segment, donne :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!} \int_0^\pi \cos^n(t) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!} w_n$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{2n} = \frac{\pi (2n)!}{4^n (n!)^2} \text{ et } w_{2n+1} = 0$$

donc

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} w_{2n} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \frac{\pi (2n)!}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$$

Ainsi  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{2x \cos(t)} dt}$ .

**7** ▷ On pose  $f_1(x) = \int_{\pi/2}^\pi e^{2x \cos(t)} dt$ .

Pour  $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ,  $\cos(t) < 0$ , donc  $e^{2x \cos(t)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$  et  $|e^{2x \cos(t)}| \leq 1$  pour tout  $x \geq 0$ , la fonction  $t \mapsto 1$  est intégrable sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

Par le théorème de convergence dominée (version continue), on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \int_{\pi/2}^\pi \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \cos(t)} dt = 0.$$

## 8 ▷ Équivalent de $F$

On pose  $f_2(x) = \int_0^{\pi/2} e^{2x \cos(t)} dt$ .

**8.a** Soit  $x > 0$ . Pour  $t \in [0, \pi/2]$ , on pose  $u = 2x(1 - \cos(t))$ , donc  $dt = \frac{du}{2x \sin(t)}$ .

Comme  $\sin(t) \geq 0$  alors

$$\sin(t) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}} \quad \text{et} \quad dt = \frac{du}{2\sqrt{x} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}}$$

Donc

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x \cos(t)} dt = \int_0^{2x} e^{2x(1 - \frac{u}{2x})} \frac{du}{2\sqrt{x} \sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du.$$

Ainsi  $\forall x > 0, \quad f_2(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du$ .

**8.b** Soit  $x > 0$  et  $u \in [0, 2x]$ . On a  $\frac{u}{2x} \in [0, 1]$  donc  $\frac{u^2}{4x^2} \leq \frac{u}{2x}$  et  $\frac{u^2}{4x} \leq \frac{u}{2}$ , par suite  $u - \frac{u^2}{4x} \geq \frac{u}{2}$ .

**8.c** Posons pour  $x > 0$ ,  $g_x(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} \mathbb{1}_{[0, 2x]}(u)$  ( avec  $\mathbb{1}_{[0, 2x]}$  la fonction caractéristique de  $[0, 2x]$  )

On a :

- Pour tout  $u > 0$ ,  $g_x(u) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ .
- Pour  $u \in [0, 2x]$ , d'après **Q8.b**,  $u - \frac{u^2}{4x} \geq \frac{u}{2}$ , donc :

$$g_x(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} \leq \sqrt{2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$$

Par suite, pour tout  $u \in ]0, +\infty[$  et  $x > 0$  :  $g_x(u) \leq \varphi(u)$ , avec  $\varphi(u) = \sqrt{2} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ .

D'après **Q1**, la fonction de domination  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Par le théorème de convergence dominée (version continue) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_x(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

Et d'après **Q.3**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du = I = \sqrt{\pi}$ .

Pour  $x > 0$ , on a  $f_2(x) = \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}} \int_0^{2x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u - \frac{u^2}{4x}}} du$ , donc  $f_2(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} e^{2x}}{2\sqrt{x}}$ .

**9**  $\triangleright$  On a  $\pi F(x) = f_2(x) + f_1(x)$ .

D'après **Q.7**  $f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et de **Q8.c**  $f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} e^{2x}}{2\sqrt{x}}$ .

Donc  $f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f_2(x))$  et  $\pi F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} e^{2x}}{2\sqrt{x}}$ .

Ainsi  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{2\sqrt{\pi x}}$ .

## PARTIE 3

### Transformée de Laplace de $F$

On rappelle que pour  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur tout  $]0, a]$ , la transformée de Laplace est :

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

**10**  $\triangleright$  Soit  $G : t \mapsto \frac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$ ,  $t \in ]0, +\infty[$ .

**10.a** Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$

$$G(t) e^{-xt} = \frac{e^{-(x-2)t}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

• En  $0^+$  :

$G(t) e^{-xt} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ . Donc  $t \mapsto G(t) e^{-xt}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

• En  $+\infty$  :

$G(t) e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-(x-2)t})$ , si  $x - 2 > 0$  alors  $t \mapsto G(t) e^{-xt}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Mais pour  $x - 2 \leq 0$  on a  $\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(G(t) e^{-xt})$ , donc  $t \mapsto G(t) e^{-xt}$  est non intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Par suite  $t \mapsto G(t) e^{-xt}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , si et seulement si  $x > 2$ .

Ainsi  $t \mapsto G(t) e^{-xt}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et  $L_G$  existe, si et seulement si  $x > 2$ .

**10.b** Soit  $x > 2$ . Par le changement de variable  $u = (x - 2)t$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x-2)t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x-2}}.$$

Donc 
$$L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}.$$

## 11 ▷ Calcul de $L_F$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on a 
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

**11.a** D'après **Q.9** on a  $F(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2t}}{2\sqrt{\pi t}}$ , donc  $F(t) e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} G(t) e^{-xt}$ .

Par comparaison, la fonction  $t \mapsto F(t) e^{-xt}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  si et seulement si  $x > 2$  ( $F$  est définie et continue en 0). Ainsi  $L_F$  est définie sur  $]2, +\infty[$ .

**11.b** Soit  $f : t \mapsto t^n e^{-xt}$ ,  $t \in [0, +\infty[$ .

Pour  $x > 0$  on a  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , donc  $f$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ , d'où l'existence de  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt$ .

**11.c** Soit  $x > 0$ . Le changement de variable  $u = xt$  donne :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

Par récurrence on a

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

Ainsi 
$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

**11.d** Pour  $x > 2$  on a  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$ . D'après **Q5.a** on a  $\frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}} \leq \frac{4^n}{x^{2n+1}}$ .

Comme  $0 < \frac{4}{x^2} < 1$  alors  $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{x^{2n+1}}$  converge. Par suite la série  $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt$  converge.

**11.e** D'après **Q11.a**,  $L_F$  est définie sur  $]2, +\infty[$ .

Soit  $x > 2$ , on a

$$L_F(x) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt$$

Soit  $f_n : t \mapsto \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt}$ ,  $t \in [0, +\infty[$ .

On a :

- $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  vers  $t \mapsto F(t) e^{-xt}$  qui est continue et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .
- D'après **Q11.d** la série  $\sum \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  converge.

Le théorème d'intégration d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque, permet d'intervertir  $\sum$  et  $\int$ , ce qui donne

$$L_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} e^{-xt} dt$$

D'après **Q11.c**

$$L_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$$

**11.f** On a le développement pour  $|u| < 1$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} u^n.$$

pour  $u = \frac{4}{x^2}$  ( $|u| < 1$  car  $x > 2$ ) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{4^n}{x^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n}}.$$

Donc : 
$$L_F(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

**12** ▷ Lorsque  $x \rightarrow 2^+$  :

$$L_F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x \rightarrow 2^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

D'après **Q10.b** on a  $L_G(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$  donc  $\boxed{L_F(x) \underset{x \rightarrow 2^+}{\sim} L_G(x)}$ .

## PARTIE 4

### Cas général : Transformée de Laplace et abscisse de convergence

Soit  $f$  une fonction définie et continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ , et intégrable sur tout intervalle  $]0, a]$  ( $a > 0$ ). On définit l'ensemble de convergence

$$I(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid t \mapsto f(t) e^{-xt} \text{ est intégrable sur } ]0, +\infty[ \right\},$$

**13** ▷ Soit  $x_0 \in I(f)$  et  $x \geq x_0$ . Pour  $t \geq 0$  :

$$|f(t) e^{-xt}| = |f(t) e^{-x_0 t}|.$$

Puisque  $t \mapsto f(t) e^{-x_0 t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , par comparaison,  $t \mapsto f(t) e^{-xt}$  l'est aussi. Donc  $x \in I(f)$ , ainsi  $\boxed{[x_0, +\infty[ \subset I(f)}$ .

**14** ▷ Soit  $f \in E$ .

**14.a** On a  $I(f) \neq \emptyset$  et  $I(f) \neq \mathbb{R}$ , donc il existe  $x_1 \in \mathbb{R} \setminus I(f)$ . Par la question **Q13**, pour tout  $x \in I(f)$  on a  $[x, +\infty[ \subset I(f)$ , donc forcément  $x \geq x_1$  (sinon  $x_1 \in I(f)$ , contradiction). Par suite  $I(f)$  est minoré par  $x_1$ , et non vide, donc admet une borne inférieure  $\alpha(f) = \inf I(f)$ .

**14.b** Par **Q13**, si  $x \in I(f)$  alors  $[x, +\infty[ \subset I(f)$ , on en déduit que  $I(f)$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ , donc c'est un intervalle de la forme  $]\alpha(f), +\infty[$  ou  $[\alpha(f), +\infty[$ .

**15** ▷ La fonction  $x \mapsto f(t) e^{-xt}$  est continue sur  $] \alpha(f), +\infty[$ .

Pour tout  $[a, b] \subset ] \alpha(f), +\infty[$  on a

$$\forall t > 0, |f(t) e^{-xt}| \leq |f(t) e^{-at}|$$

et la fonction de domination  $\varphi : t \mapsto |f(t) e^{-at}|$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  (car  $a \in I(f)$ ). Le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale, donne  $L_f$  est continue sur tout  $[a, b] \subset ] \alpha(f), +\infty[$ , donc  $L_f$  est continue sur  $] \alpha(f), +\infty[$ .

**16** ▷ Si  $f \geq 0$  et  $x_1, x_2 \in ] \alpha(f), +\infty[$ . Si  $x_1 < x_2$  alors

$$f(t) e^{-x_1 t} \geq f(t) e^{-x_2 t} \geq 0$$

donc  $L_f(x_1) \geq L_f(x_2)$ , ainsi  $L_f$  est décroissante.

Si  $\alpha(f) \in I(f)$ , pour tout  $x \in [\alpha(f), +\infty[$  :

$$0 \leq L_f(x) \leq L_f(\alpha(f)).$$

Donc  $L_f$  est bornée sur  $[\alpha(f), +\infty[$ .

**17** ▷ Soit  $g \in E$  positive telle que  $L_g$  est bornée sur  $] \alpha(g), +\infty[$ .

**17.a** Soit  $M = \sup_{x \in ] \alpha(g), +\infty[} L_g(x)$ , donc pour tout  $A \geq 0$

$$0 \leq \int_0^A g(t) e^{-xt} dt \leq L_g(x) \leq M.$$

**17.b** • Pour  $t \in ]0, A]$  on a

$$0 \leq g(t) e^{-\alpha(g)t} \leq g(t)$$

Or  $g \in E$ , elle est intégrable sur  $]0, A]$ , donc la fonction  $t \mapsto g(t) e^{-\alpha(g)t}$  est intégrable sur  $]0, A]$  et  $\int_0^A g(t) e^{-\alpha(g)t} dt$  existe.

• Soit  $u_n = \alpha(g) + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On a :  $g(t) e^{-u_n t} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g(t) e^{-\alpha(g)t}$  et la condition de domination :  $0 \leq g(t) e^{-u_n t} \leq g(t)$ . Le théorème de la convergence dominée donne :

$$\int_0^A g(t) e^{-u_n t} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^A g(t) e^{-\alpha(g)t} dt$$

Comme  $u_n \in ] \alpha(g), +\infty[$  alors

$$0 \leq \int_0^A g(t) e^{-u_n t} dt \leq M.$$

Par passage à la limite on obtient

$$0 \leq \int_0^A g(t) e^{-\alpha(g)t} dt \leq M.$$

• Par conséquent, la fonction  $x \mapsto \int_0^x g(t) e^{-\alpha(g)t} dt$  est croissante et majorée, donc elle admet une limite en  $+\infty$ , ainsi l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-\alpha(g)t} dt$  converge.

Puisque la fonction  $x \mapsto g(t) e^{-\alpha(g)t}$  est positive donc elle est intégrable sur  $]0, +\infty[$ , par suite  $\alpha(g) \in I(g)$ .

## PARTIE 5

### Comparaison des transformées de Laplace de deux fonctions équivalentes

Soient  $g$  et  $h$  deux fonctions positives appartenant à  $E$ , telles que :

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} h(x)$$

**18** ▷ Soit  $x \in I(h)$ , alors  $t \mapsto h(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , comme  $g(t)e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} h(t)e^{-xt}$  donc  $t \mapsto g(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Par hypothèse  $t \mapsto g(t)$  est intégrable sur  $]0, 1]$  donc  $t \mapsto g(t)e^{-xt}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  ( $|g(t)e^{-xt}| \leq |g(t)|$ ). Donc  $x \in I(g)$  et  $I(h) \subset I(g)$ .

Par symétrie,  $I(g) \subset I(h)$ , d'où  $I(h) = I(g)$  et  $\alpha(g) = \alpha(h)$ .

**19** ▷ On a  $\alpha(h) \notin I(h)$ , donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} h(t)e^{-\alpha(h)t} dt$  diverge, c'est-à-dire  $\int_0^a g(t)e^{-\alpha(h)t} dt \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty$

Soit  $A > 0$ , il existe  $a > 0$  tel que  $\int_0^y h(t)e^{-\alpha(h)t} dt \geq A + 1$  pour tout  $y > a$ .

Soit  $y > a$ . On a  $g(t)e^{-xt} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha(h)^+} g(t)e^{-\alpha(h)t}$  et la condition de domination :  $0 \leq g(t)e^{-xt} \leq g(t)$ . Le théorème de la convergence dominée cas continue, donne :

$$\int_0^y h(t)e^{-xt} dt \xrightarrow{x \rightarrow \alpha(h)^+} \int_0^y h(t)e^{-\alpha(h)t} dt$$

Donc pour  $\varepsilon = 1$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in ]\alpha(h), \alpha(h) + \eta[$  :

$$\left| \int_0^y h(t)e^{-xt} dt - \int_0^y h(t)e^{-\alpha(h)t} dt \right| \leq 1$$

Par suite pour tout  $x \in ]\alpha(h), \alpha(h) + \eta[$

$$A \leq \int_0^y h(t)e^{-\alpha(h)t} dt - 1 \leq \int_0^y h(t)e^{-xt} dt.$$

Comme  $L_h(x) \geq \int_0^y h(t)e^{-xt} dt$ , alors on a :

$$\forall A > 0 \exists \eta > 0 \mid x \in ]\alpha(h), \alpha(h) + \eta[ \Rightarrow L_h(x) \geq A.$$

Donc  $\lim_{x \rightarrow \alpha(h)^+} L_h(x) = +\infty$ .

**20** ▷ On a  $g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} h(x)$  ce qui est équivalent à  $g(x) - h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(h(x))$ . Donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que pour  $t \geq A$ ,  $|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h(t)|$ .

**21** ▷ Soit  $x \in ]\alpha(h), +\infty[$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , soit  $A > 0$  défini dans la question précédente, on a :

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \int_A^{+\infty} |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt.$$

Or pour  $t \geq A$ ,  $|g(t) - h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |h(t)|$ , donc

$$\int_A^{+\infty} |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)| e^{-xt} dt$$

d'où

$$|L_g(x) - L_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_A^{+\infty} |h(t)| e^{-xt} dt.$$

**22** ▷ On a d'après **Q21**, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que :

$$|\mathbf{L}_g(x) - \mathbf{L}_h(x)| \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-xt} dt + \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{L}_h(x) \quad (1)$$

on fixe  $A$ .

On a  $\int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-\alpha(h)t} dt \leq \int_0^A |g(t) - h(t)| dt$ , qui est convergent car  $h$  et  $g$  sont intégrables sur  $]0, A]$ .

D'après **Q19** on a  $\mathbf{L}_h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha(h)^+} +\infty$ , donc il existe  $\eta > 0$  tel que si  $x \in ]\alpha(h), \alpha(h) + \eta[$  alors

$$\int_0^A |g(t) - h(t)| e^{-\alpha(h)t} dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{L}_h(x) \quad (2)$$

Par les relation (1) et (2)

$$|\mathbf{L}_g(x) - \mathbf{L}_h(x)| \leq \varepsilon \mathbf{L}_h(x)$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid x \in ]\alpha(h), \alpha(h) + \eta[ \Rightarrow |\mathbf{L}_g(x) - \mathbf{L}_h(x)| \leq \varepsilon \mathbf{L}_h(x)$$

Donc  $\boxed{\mathbf{L}_g(x) \underset{x \rightarrow \alpha(h)^+}{\sim} \mathbf{L}_h(x)}$ .