

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⵢⵜ  
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵓⵔⵓⵎⵎⵓⵔ ⵏ ⵉⵎⵎⵓⵔ ⵏ  
ⵓⵔⵓⵎⵎⵓⵔ ⵏ ⵉⵎⵎⵓⵔ ⵏ ⵉⵎⵎⵓⵔ



المملكة المغربية  
وزارة التعليم العالي  
والبحث العلمي والابتكار

**Royaume du Maroc**  
Ministère de l'Enseignement Supérieur,  
de la Recherche Scientifique et de l'Innovation



## CONCOURS NATIONAL COMMUN

D'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

**Session 2026**

**Épreuve de : Mathématiques II**

**Filière : MP**

Date : 16-05-2026    Durée 4 Heures    de 08H00 à 12H00

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être un point de clarification d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons de son initiative.*

L'usage de tout document et de tout matériel électronique ou informatique (y compris la calculatrice) est interdit

*Cette épreuve comporte 4 pages en format A4 en plus de cette page de garde*

---

*Page de garde*

**L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.**  
**L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.**

*Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Ce sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants, à traiter dans l'ordre souhaité.

### Exercice

(Noté sur 4 points sur 20)

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ . Le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  est noté  $\langle x | y \rangle$  et  $\|x\|$  représente la norme du vecteur  $x$ . Pour tout vecteur  $u$  non nul de  $E$ , on note  $\varphi_u$  l'application de  $E$  dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2 \frac{\langle x | u \rangle}{\langle u | u \rangle} u - x$$

#### 1.1. Étude de l'application $\varphi_u$

1.1.1. Montrer que  $\varphi_u$  est un endomorphisme de  $E$ .

1.1.2. En calculant  $\varphi_u \circ \varphi_u$ , montrer que  $\varphi_u$  est un automorphisme de  $E$  et déterminer son inverse  $\varphi_u^{-1}$ .

1.1.3. Soit  $x$  appartenant à  $E$ , calculer  $\langle \varphi_u(x) | \varphi_u(x) \rangle$ .

1.1.4. En déduire que  $\varphi_u$  conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle \varphi_u(x) | \varphi_u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$$

1.1.5. On note  $D_u$  la droite vectorielle de base  $u$  et  $H_u = D_u^\perp$ .

Déterminer l'image de  $D_u$  par  $\varphi_u$ .

En déduire sans calcul que  $H_u$  est stable par  $\varphi_u$ .

1.1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme  $\varphi_u$  et en donner les éléments caractéristiques.

#### 1.2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit  $H$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tels que } x + y + z = 0.$$

1.2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de  $H^\perp$ .

1.2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection orthogonale sur  $H^\perp$  puis celle de la projection orthogonale sur  $H$ .

1.2.3. Soit  $v$  un vecteur unitaire de  $H^\perp$ . Écrire la matrice de  $\varphi_v$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.3. Étude d'une réciproque

Soit  $\psi$  un endomorphisme de  $E$  tel qu'il existe une droite vectorielle  $\Delta$  de  $E$  vérifiant :

$$\forall x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \Delta^\perp, \quad \psi(x) = -x$$

1.3.1. Montrer que  $\psi \circ \psi = \text{id}_E$  et que  $\psi$  conserve le produit scalaire.

1.3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur  $u$  de  $E$  tel que  $\psi = \varphi_u$ .

## Problème

Notations et conventions. Dans tout le problème, on fixe un entier  $n \geq 2$ . On note  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et l'on pose  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . De plus  $I_r$  désigne la matrice identité d'ordre  $r \in \mathbb{N}^*$ .

Pour toute matrice  $A \in E$ ,  $A^T$  et  $\text{tr}(A)$  désignent respectivement la matrice transposée de  $A$  et la trace de  $A$ . On note  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$  le spectre de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ , et  $\chi_A$  son polynôme caractéristique.

Une matrice  $M \in E$  est dite nilpotente s'il existe un entier naturel  $k \geq 1$  tel que  $M^k = 0$ . Enfin,  $\mathcal{B}_c = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  désigne la base canonique de  $E$ .

Pour  $A, B \in E$ , on considère l'endomorphisme  $\Phi_{A,B}$  de  $E$  défini par :

$$\Phi_{A,B} : \begin{cases} E \rightarrow E \\ M \mapsto AM - MB \end{cases}$$

Lorsque  $A = B$ , on notera simplement  $\Phi_A = \Phi_{A,A}$ .

### 1<sup>re</sup> Partie – Exemples

1.1. Vérifier que  $I_n$  et  $A$  appartiennent à  $\text{Ker}(\Phi_A)$ .

1.2. Cas  $n = 2$  : Dans cette question, on se place dans  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et l'on considère

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E.$$

1.2.1. Donner la matrice de  $\Phi_A$  dans la base  $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

1.2.2. En déduire que  $\Phi_A$  est nulle si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A = \lambda I_2$ .

Dans la suite de cette question, on suppose que  $A \neq \lambda I_2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et donc que  $\Phi_A$  n'est pas nulle.

1.2.3. Montrer que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $(a - d)^2 + 4bc > 0$ .

1.2.4. Vérifier que le polynôme caractéristique de  $\Phi_A$  est :

$$\chi_{\Phi_A}(X) = X^2 (X^2 - ((a - d)^2 + 4bc))$$

1.2.5. En déduire que  $\Phi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

1.3. Cas d'une projection : Dans cette question, on se place dans le cas général où  $n \geq 2$ , on suppose  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et l'on considère une matrice  $A \in E$  vérifiant :

$$A^2 = A, \quad A \neq 0, \quad A \neq I_n$$

1.3.1. Montrer que  $X^3 - X$  est un polynôme annulateur de  $\Phi_A$ .

1.3.2. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de  $\Phi_A$  ?

1.3.3. Justifier que  $\Phi_A$  est diagonalisable et que  $0 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi_A)$ .

1.3.4. Montrer qu'il existe une matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $r \in [1, n-1]$  tels que  $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ .

1.3.5. Soit  $B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$ . En considérant  $M_1 = P \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ , Calculer  $\Phi_A(M_1)$ .

1.3.6. En déduire  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi_A)$ .

## 2<sup>ème</sup> Partie – Spectre de $\Phi_{A,B}$

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**2.1. Soit  $B \in E$ .**

2.1.1. Montrer que  $B$  est diagonalisable si et seulement si  $B^T$  l'est.

2.1.2. Établir que  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(B) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B^T)$ .

2.1.3. Montrer que, si  $B$  est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de  $B$ . 2.1.4. Montrer que  $B$  est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à  $X^n$ .

2.1.5. Montrer la réciproque de la question 2.1.3.

**2.2. Montrer que si  $X$  est un vecteur propre de  $A$  et  $Y$  un vecteur propre de  $B^T$  alors  $XY^T$  est un vecteur propre de  $\Phi_{A,B}$ .**

**2.3. En déduire l'inclusion**

$$\{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)\} \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B})$$

**2.4. Soit  $M$  un vecteur propre de  $\Phi_{A,B}$  associé à la valeur propre  $\alpha$ .**

2.4.1. Montrer que pour tout entier naturel  $k$ ,  $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ .

2.4.2. En déduire que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X] : P(A)M = MP(\alpha I_n + B)$ .

2.4.3. En déduire que  $\chi_A(\alpha I_n + B)$  n'est pas inversible.

Dans la suite de cette partie, on se place dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**2.5. En factorisant  $\chi_A$  dans  $\mathbb{C}[X]$ , déduire que :**

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B}) \subset \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)\}$$

**2.6. Montrer que  $\Phi_{A,B}$  est nilpotent si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $A - \lambda I_n$  et  $B - \lambda I_n$  sont nilpotentes.**

## 3<sup>ème</sup> Partie – Diagonalisation de $\Phi_{A,B}$

On suppose que  $A$  et  $B$  sont diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et on désigne par  $(X_1, \dots, X_n)$  et  $(Y_1, \dots, Y_n)$  des bases respectives de vecteurs propres de  $A$  et  $B^T$ .

### 3.1.

3.1.1. Soit  $(Z_1, \dots, Z_n)$  une famille de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n Y_i Z_i^T = 0 \iff \forall i \in [1, n], \quad Z_i = 0$$

On pourra multiplier la somme à droite par  $\overline{Z_k}$ , pour  $k \in [1, n]$  fixé,  $\overline{Z_k}$  étant la colonne constituée des conjugués des coefficients de  $Z_k$ .

3.1.2. En déduire que la famille  $(X_i Y_j^T)_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

3.1.3. Prouver que  $\Phi_{A,B}$  est diagonalisable.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $\Phi_{A,B}$  est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**3.2. Dans cette question, on considère l'application, encore notée  $\Phi_{A,B}$ , définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par**

$$\Phi_{A,B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad M \mapsto AM - MB,$$

où  $A$  et  $B$ , à coefficients réels, sont aussi vues comme des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

3.2.1. Justifier que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B}) \subset \mathbb{R}$ .

3.2.2. Soient  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ . Justifier que  $\lambda - \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B})$  et que  $\bar{\lambda} - \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi_{A,B})$ , où  $\bar{\lambda}$  est le conjugué de  $\lambda$ .

3.2.3. En déduire que  $\chi_A$  et  $\chi_B$  sont scindés sur  $\mathbb{R}$ .

3.2.4. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  un vecteur propre de l'endomorphisme  $\Phi_{A,B}$  associé à la valeur propre  $\alpha$ . Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\mu$ . Exprimer  $A(MX)$  en fonction de  $MX$  (et des scalaires  $\alpha$  et  $\mu$ ).

3.2.5. Montrer que pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , l'application linéaire

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ M \mapsto MX \end{cases}$$

est surjective.

3.2.6. En déduire que  $A$  est diagonalisable.

**3.3. On considère l'application**

$$T : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T \end{cases}$$

3.3.1. Montrer que  $T$  est un automorphisme de  $E$ .

**3.4. Montrer que :**

$$T \circ \Phi_{A,B} \circ T^{-1} = \Phi_{-B^T, -A^T}$$

3.4.1. Déduire que  $\Phi_{-B^T, -A^T}$  et  $\Phi_{A,B}$  sont semblables.

3.4.2. Conclure que  $\Phi_{A,B}$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  et  $B$  le sont.

**4<sup>ème</sup> Partie – Étude de  $\Phi_{A,B}$  via les multiplications à gauche et à droite**

**4.1. Soit  $F$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et soient  $u, v \in \mathcal{L}(F)$  deux endomorphismes diagonalisables tels que  $uv = vu$ .**

Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on note  $F_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_F)$  le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

4.1.1. Montrer que, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , le sous-espace  $F_\lambda$  est stable par  $v$ .

4.1.2. Montrer que l'endomorphisme induit par  $v$  sur  $F_\lambda$  est diagonalisable.

4.1.3. En déduire que  $u$  et  $v$  sont diagonalisables dans une même base.

**4.2. Dans la suite on considère les endomorphismes de  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  suivants :**

$$g_A : M \mapsto AM \quad \text{et} \quad d_B : M \mapsto MB$$

4.2.1. Vérifier que pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  :

$$P(g_A) = g_{P(A)} \quad \text{et} \quad P(d_B) = d_{P(B)}$$

4.2.2. Montrer que  $g_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable ; et que  $d_B$  est diagonalisable si et seulement si  $B$  est diagonalisable.

4.2.3. Vérifier que  $g_A$  et  $d_B$  commutent.

4.2.4. Retrouver le fait que si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables, alors  $\Phi_{A,B}$  est diagonalisable.

### 5<sup>ème</sup> Partie – Adjoint de $\Phi_{A,B}$

Dans cette partie  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**5.1. Pour  $M$  et  $N$  appartenant à  $E$ , on pose :  $(M | N) = \text{tr}(M^T N)$ . Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .**

Dans la suite de cette partie,  $E$  est muni de ce produit scalaire.

**5.2. On note  $\Phi_{A,B}^*$  l'endomorphisme adjoint de  $\Phi_{A,B}$ . Montrer que :**

$$\forall M \in E, \quad \Phi_{A,B}^*(M) = A^T M - M B^T$$

**5.3. Soit  $D$  appartenant à  $E$  vérifiant :  $\forall M \in E, DM = MD$ . Prouver qu'il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $D = \alpha I_n$ .**

**5.4. En déduire que  $\Phi_{A,B}$  est l'application nulle si et seulement s'il existe  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  tel que :**

$$A = B = \alpha I_n$$

5.5. Démontrer que l'endomorphisme  $\Phi_{A,B}$  est autoadjoint si et seulement si les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques.

5.6. On suppose que  $B$  est une matrice orthogonale et antisymétrique. Montrer que  $n$  est un entier pair.

5.7. On suppose de plus que  $A$  est une matrice orthogonale et symétrique. Démontrer que l'endomorphisme  $\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{A,B}$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$ .

FIN DU SUJET