

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC 2026

Épreuve de mathématiques II, MP & MPI, quatre heures
(corrigé)

Partie A – Questions préliminaires

I - La fonction ζ sur l'intervalle $]1, +\infty[$

Q1. La série $\sum_{k \geq 1} \lim_{s \rightarrow 1} u_k(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est usuellement divergente (c'est la série harmonique). Par la contraposée du théorème de la double limite, la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} u_k$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$; par conséquent, elle ne converge pas normalement non plus sur cet intervalle.

Q2. Soit $a > 1$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall s \in [a, +\infty[, \quad |u_k(s)| \leq \frac{1}{k^a},$$

et donc on a dans $[0, +\infty[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} < +\infty$$

puisqu'on reconnaît une série de Riemann d'exposant $a > 1$. Ceci prouve que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$.

De plus, u_k est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout entier $k \geq 1$ et tout $a > 1$. Comme la convergence uniforme préserve la continuité et que $([a, +\infty[)_{a>1}$ est une base de voisinages de $]1, +\infty[$, on en déduit que $\zeta = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est continue sur $]1, +\infty[$: d'où le résultat.

Q3. Comme ζ est une somme de fonctions positives, on a :

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) \geq u_1(s) = 1 > 0,$$

donc ζ ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

II – Cas de la variable complexe

Q4. On a :

$$|t^s| = |e^{s \ln(t)}| = e^{\operatorname{Re}(s \ln(t))} = e^{\operatorname{Re}(s) \ln(t)}.$$

Q5. Par la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{k^s} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}} < +\infty,$$

puisque les séries de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 convergent. D'où le résultat.

Q6. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\frac{1}{p_i^s} \in [0, 1[$ (en effet un nombre premier est supérieur ou égal à 2, et s est strictement supérieur à 1 donc : $p_i^s > p_i$), donc la série géométrique $\sum_{m_i \geq 0} \frac{1}{(p_i^{m_i})^s} = \sum_{m_i \geq 0} \frac{1}{(p_i^s)^{m_i}}$ converge (absolument), et on a :

$$\sum_{m_i=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_i^{m_i})^s} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}.$$

En tant que produit fini de familles sommables, la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right)_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n}$ est aussi sommable et on a :

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^n \sum_{m_i=0}^{+\infty} \frac{1}{(p_i^{m_i})^s} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}},$$

d'où le résultat.

Q7. Par le théorème fondamental de l'arithmétique (plus précisément son résultat d'unicité), l'application suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{N}^n & \rightarrow \mathbb{N}_n \\ (m_1, \dots, m_n) & \mapsto \prod_{i=1}^n p_i^{m_i} \end{cases}$$

est injective, or elle est surjective par définition de $\mathbb{N}_n$: elle est donc bijective. La formule de changement d'indice, avec la somme de la famille positive $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right)_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n}$, donne donc :

$$S_n(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s}.$$

La suite $(\mathbb{N}_n)_{n \geq 1}$ est croissante au sens de l'inclusion, et par le théorème fondamental de l'arithmétique, cette fois-ci l'existence, on a :

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{N}_n = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{N}_{n+1} \setminus \mathbb{N}_n),$$

avec la convention $\mathbb{N}_0 = \emptyset$ pour éviter d'isoler le premier ensemble de la réunion (et aussi par convention : $S_0(s) = 0$, afin que l'égalité ci-dessus reste valable).

Par le théorème de sommation par paquets, qu'on peut utiliser avec la famille sommable $\left(\frac{1}{k^s} \right)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s} = \sum_{n=0}^{+\infty} (S_{n+1}(s) - S_n(s)).$$

C'est une somme télescopique, convergente puisque le théorème de sommation par paquets préserve la sommabilité, et on en déduit d'une part que $(S_n(s))_{n \geq 1}$ converge. D'autre part :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(s) - S_0(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(s).$$

On a démontré :

$$\zeta(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(s).$$

Remarque. On a obtenu le produit eulérien de la fonction ζ de Riemann, parfois réécrit ainsi :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Q8. L'application $i \mapsto p_i$ est une bijection de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ dans l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers. Par la formule de changement d'indice puis par propriété de restriction, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_i^x} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^x} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} < +\infty,$$

puisque l'on reconnaît une série de Riemann d'exposant $x > 1$. D'où la convergence de la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$.

Nous n'avons pas utilisé l'indication de l'énoncé.

Q9. Notons que $\frac{p_i^x}{p_i^x + 1}$ est strictement positif pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a donc, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\ln(a_n) = - \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{p_i^x + 1}{p_i^x} \right) = - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{p_i^x} \right).$$

Or la suite $(p_i)_{i \geq 1}$ tend vers l'infini comme le rappelle l'énoncé (conséquence de l'infinité de l'ensemble des nombres premiers), et x est strictement positif, donc $\left(\frac{1}{p_i^x}\right)_{i \geq 1}$ tend vers 0. On en déduit :

$$\ln \left(1 + \frac{1}{p_i^x}\right) \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_i^x} > 0.$$

Par la question précédente et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{i \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{p_i^x}\right)$ converge. Par l'égalité ci-dessus, la suite $(\ln(a_n))_{n \geq 1}$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e^\ell \in \mathbb{R}_+^*,$$

d'où le résultat : $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel strictement positif.

Q10. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Par multiplicativité du module et la question **Q6**, on a :

$$|S_n(s)| = \prod_{i=1}^n \frac{|p_i^s|}{|1 - p_i^s|} \stackrel{(\mathbf{Q4})}{=} \prod_{i=1}^n \frac{p_i^x}{|1 - p_i^s|}$$

or pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$|1 - p_i^s|^2 = |1|^2 - 2\operatorname{Re}(p_i^s) + |p_i^s|^2 \leq 1 + 2|p_i^s| + |p_i^s|^2 \stackrel{(\mathbf{Q4})}{=} (1 + p_i^x)^2,$$

donc :

$$|S_n(s)| \geq \prod_{i=1}^n \frac{p_i^x}{1 + p_i^x} = a_n,$$

d'où l'inégalité demandée.

Prenons la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans cette inégalité. Par les questions **Q7** et **Q9**, cela donne :

$$|\zeta(s)| \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > 0,$$

donc : $\zeta(s) \neq 0$. D'où le résultat.

III - Un calcul d'intégrale

Q11. L'application $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est continue sur $]0, 1]$ et on a pour tout $t \in]0, 1]$:

$$\left|t^{2(s-1)}\right| \stackrel{(\mathbf{Q4})}{=} t^{2(\operatorname{Re}(s)-1)} = \frac{1}{t^{2(1-\operatorname{Re}(s))}}.$$

On reconnaît une fonction de Riemann, d'exposant : $2(1 - \operatorname{Re}(s)) < 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$. Elle est donc intégrable sur $]0, 1]$. Ainsi $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est intégrable sur $]0, 1]$. De plus :

$$\int_0^1 \left|t^{(s-1)}\right|^2 dt = \int_0^1 t^{2(\operatorname{Re}(s)-1)} dt = \frac{1}{2\operatorname{Re}(s) - 1}.$$

IV - Une étude géométrique

Remarque rédactionnelle. Nous identifierons un point du plan et son affixe, et donc Δ_d sera ci-dessous une partie de $\mathbb{C}$.

Q12. Soit $s \in \mathbb{C}$. Alors s n'appartient pas à Δ_d si et seulement si :

$$\begin{aligned} d^2|s|^2 < 2\operatorname{Re}(s) - 1 &\iff d^2|s|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{d}ds\right) + \frac{1}{d^2} < \frac{1}{d^2} - 1 \\ &\iff \left|ds - \frac{1}{d}\right|^2 < \frac{1-d^2}{d^2} \\ &\iff \left|s - \frac{1}{d^2}\right|^2 < \frac{1-d^2}{d^4}. \end{aligned}$$

On en déduit que Δ_d est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du disque ouvert de centre O_d d'affixe $\frac{1}{d^2}$ et de rayon $R_d = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$.

Q13. Étudions plutôt $h : d \mapsto g(\sqrt{d}) = \frac{1}{d} - \frac{\sqrt{1-d}}{d}$, qui est plus simple. L'application h est dérivable sur $]0, 1[$ et on a pour tout $d \in]0, 1[$:

$$h'(d) = \frac{\frac{d}{\sqrt{1-d}} - (1 - \sqrt{1-d})}{d^2} = \frac{1 - \sqrt{1-d}}{d^2\sqrt{1-d}} \geq 0.$$

On en déduit que h est croissante sur l'intervalle $]0, 1[$ (et même strictement, puisque le numérateur ne s'annule qu'en $d = 0$, ce qui est exclu). Par composition à droite par $d \mapsto d^2$, qui est strictement croissante sur $]0, 1[$, l'application g l'est aussi. Par continuité et le théorème des valeurs intermédiaires, son image est :

$$g([0, 1]) = \left] \lim_0 g, g(1) \right[= \left] \lim_0 g, 1 \right[.$$

Or :

$$g(d) = \frac{1 - \sqrt{1-d^2}}{d^2} \underset{d \rightarrow 0}{\sim} \frac{d^2}{2d^2},$$

donc :

$$g([0, 1]) = \left] \frac{1}{2}, 1 \right[.$$

Q14. Soit $s \notin \bigcap_{d \in]0, 1[} \Delta_d$. Il existe donc $d \in]0, 1[$ tel que :

$$\left| \operatorname{Re}(s) - \frac{1}{d^2} \right| \leq \left| s - \frac{1}{d^2} \right| < \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2},$$

et en particulier :

$$\operatorname{Re}(s) > g(d) > \frac{1}{2}.$$

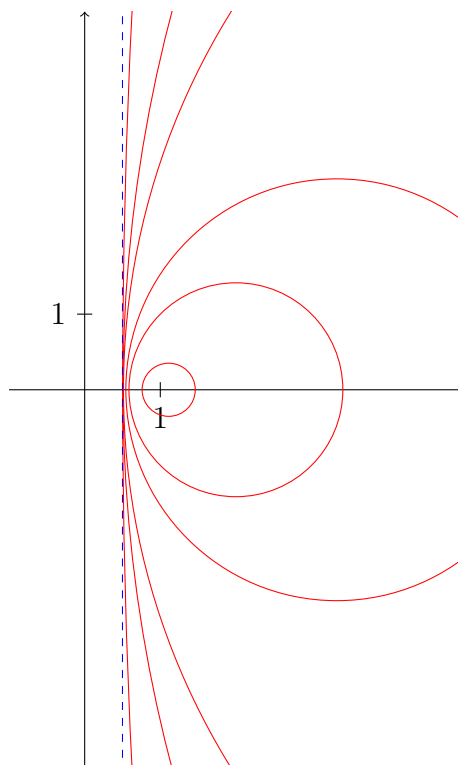
Réciproquement, soit s un nombre complexe de partie réelle strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. On a : $2\operatorname{Re}(s) - 1 > 0$, or : $\lim_{d \rightarrow 0^+} d^2|s|^2 = 0$, donc il existe $d \in]0, 1[$ tel que : $0 < d^2|s|^2 < 2\operatorname{Re}(s) - 1$. Pour un tel d , on a : $s \notin \Delta_d$.

On a démontré :

$$\mathbb{C} \setminus \bigcap_{d \in]0, 1[} \Delta_d = \operatorname{Re}^{-1} \left(\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[\right),$$

et donc :

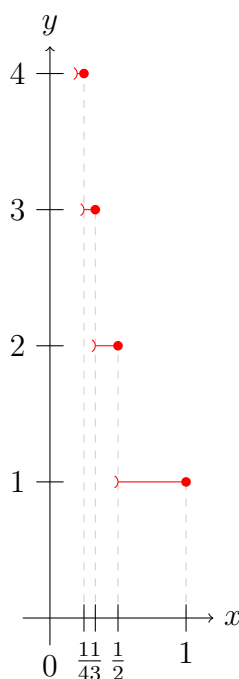
$$\bigcap_{d \in]0, 1[} \Delta_d = \operatorname{Re}^{-1} \left(\left[-\infty, \frac{1}{2} \right] \right).$$



Partie B – Étude analytique

I - Transformée de Mellin des fonctions f_k

Il est plus facile d'appréhender les questions suivantes avec la représentation du graphe de $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ dans un coin de l'esprit (je pense plus particulièrement aux points de discontinuité aux points de la forme $\frac{1}{i}$ avec $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) :



Q15. Soit $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On a :

$$f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{k} [i] - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor = \frac{i}{k} - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor.$$

On en déduit :

$$f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \begin{cases} \frac{i}{k} & \text{si } i < k, \\ \frac{i}{k} - 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Q16. On suit l'indication. Soit $t \in]0, 1]$. Par définition de la partie entière :

$$\frac{1}{kt} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \frac{1}{kt},$$

ce qui implique :

$$k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \frac{1}{t} < k \left(\left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor + 1 \right).$$

Or $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{1}{t}$, et $k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$ en est un, donc :

$$k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor.$$

Ceci équivaut à : $f_k(t) \geq 0$. Par un raisonnement similaire :

$$\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + 1 \leq k \left(\left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor + 1 \right),$$

qui implique : $f_k(t) \leq 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$. D'où le résultat :

$$0 \leq f_k(t) \leq \frac{k-1}{k}.$$

Q17. Les deux questions précédentes entraînent :

$$\frac{1}{k} \llbracket 0, k-1 \rrbracket \subseteq f_k([0, 1]) \subseteq \left[0, \frac{k-1}{k} \right].$$

Or par définition $f_k : t \mapsto \frac{1}{k} \left(\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \right)$ est à valeurs dans $\frac{1}{k}\mathbb{N}$, donc :

$$\frac{1}{k} \llbracket 0, k-1 \rrbracket \subseteq f_k([0, 1]) \subseteq \left[0, \frac{k-1}{k} \right] \cap \frac{1}{k}\mathbb{N} = \frac{1}{k} \llbracket 0, k-1 \rrbracket,$$

d'où :

$$f_k([0, 1]) = \frac{1}{k} \llbracket 0, k-1 \rrbracket.$$

Q18. Connaissant la régularité de la fonction partie entière, la fonction f_k est continue sur :

$$]0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{i} \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}$$

et admet des limites finies à gauche et à droite de chaque point de discontinuité, puisqu'en effet elle est constante sur un voisinage à gauche ou à droite de chacun de ces points. De plus, tout segment inclus dans $]0, 1]$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $\left\{ \frac{1}{i} \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \right\}$: on en déduit que f_k est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0, 1]$, donc sur $]0, 1]$.

De plus, par la question **Q16** la fonction f_k est dominée sur $]0, 1]$ par la fonction constante égale à $\frac{k-1}{k}$, qui est intégrable sur $[0, 1]$ (et donc sur $]0, 1]$) car continue sur un segment : par le théorème de comparaison des fonctions intégrables, f_k est aussi intégrable sur $]0, 1]$.

Q19. Tout d'abord, l'intégrande est bien continu par morceaux sur $]0, 1]$ d'après la question précédente (et parce que $t \mapsto t^{s-1}$ est continue sur $]0, 1]$). Par anticipation sur la suite, nous allons démontrer la convergence de l'intégrale par un calcul dans $[0, +\infty]$, ce qui est licite puisque l'intégrande est positif. On a, par un changement de variable puis la relation de Chasles :

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt \stackrel{(u=kt)}{=} \frac{1}{k^s} \int_0^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du = \frac{1}{k^s} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du = \frac{1}{k^s} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du,$$

et donc :

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt = \frac{1}{k^s} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} i u^{s-1} du = \frac{1}{k^s} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{s} \left(\frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s} \right).$$

On peut aisément obtenir la finitude de cette somme par comparaison mais, là encore, par anticipation sur la suite, nous poursuivons son calcul. Faisons une transformation d'Abel. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N i \left(\frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s} \right) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^{s-1}} - \sum_{i=1}^N \frac{i}{(i+1)^s} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{i^{s-1}} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{(i+1)^{s-1}} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(i+1)^s} \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)^{s-1}} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{(i+1)^s}. \end{aligned}$$

Or : $s - 1 > 0$. Quand $N \rightarrow +\infty$, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{i^s} - \frac{1}{(i+1)^s} \right) = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^s} = \zeta(s).$$

On peut conclure. Comme : $s > 1$, on a :

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt = \frac{\zeta(s)}{sk^s} < +\infty,$$

d'où le résultat : l'intégrale $\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt$ converge.

Q20. Il suffit de poser $k = 1$ dans le calcul de la question précédente.

Q21. Là encore, on se contente de reprendre les calculs de la question **Q19**, qui démontrent en même temps la convergence de l'intégrale de l'énoncé (c'est une différence d'intégrales convergentes). On a donc :

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \frac{1}{k} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1} dt - \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt = \frac{\zeta(s)}{sk} - \frac{\zeta(s)}{sk^s} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) \zeta(s).$$

II - Prolongement de la fonction ζ

Q22. On a immédiatement, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^{s+1}}$:

$$\max_{t \in [k, k+1]} |h'(t)| = \max_{t \in [k, k+1]} \frac{s}{t^{s+1}} = \frac{s}{k^{s+1}}.$$

Q23. L'application $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, ce qui garantit la positivité du terme général de la série $\sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$. On peut en outre calculer sa somme dans $[0, +\infty]$. Or, par l'inégalité des accroissements finis, appliquée à la fonction dérivable $h : t \mapsto \frac{1}{t^s}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour tout $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} = h(k) - h(t) \leq |k - t| \max_{t \in [k, k+1]} |h'(t)| = (t - k) \frac{s}{k^{s+1}} \leq \frac{s}{k^{s+1}},$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{s}{k^{s+1}} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{s}{k^{s+1}} = s\zeta(s+1) < +\infty.$$

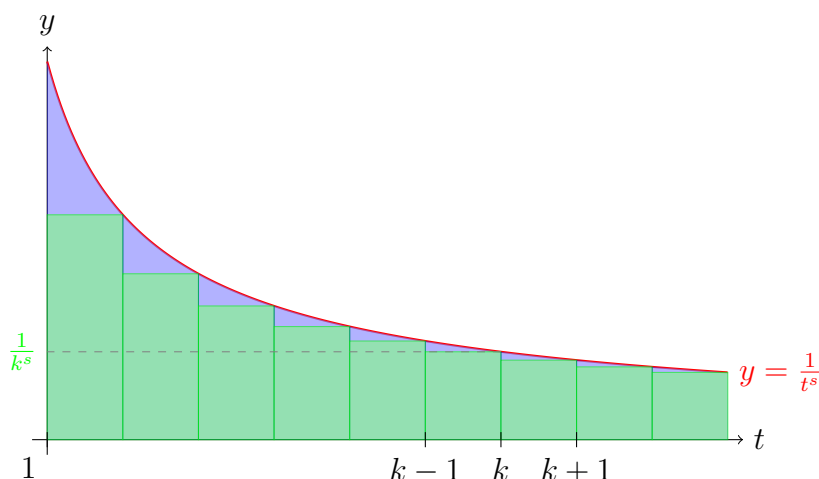
Ceci démontre à la fois la convergence de la série et l'encadrement :

$$0 \leq G(s) \leq s\zeta(s+1).$$

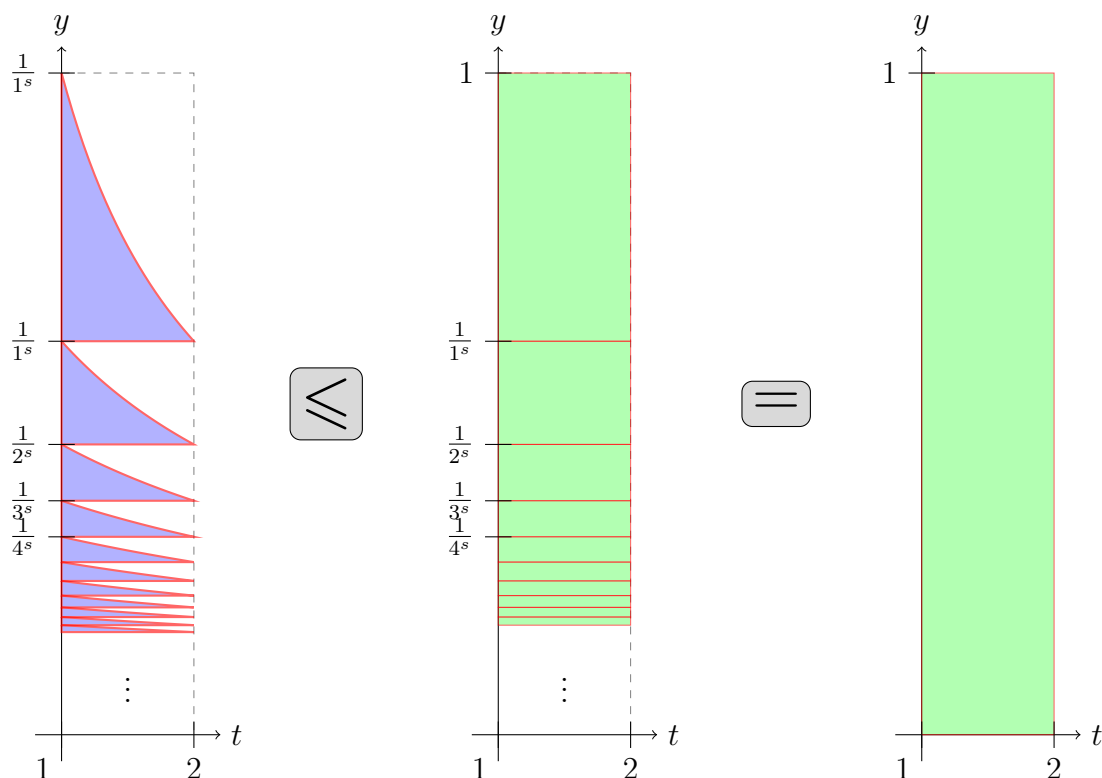
Remarque. La convergence de cette série peut se passer de la question précédente. Il suffit en effet d'écrire, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^s}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right) = 1 < +\infty,$$

qui est la formalisation du raisonnement géométrique suivant : la somme de cette série égale la somme des aires bleues ci-dessous.



Or cette somme d'aires bleues est assez trivialement bornée (trivialement sur le dessin, du moins !) par l'aire d'un rectangle, si on « empile » ces aires :



On obtient en prime le caractère borné de G , qui intervient dans la question suivante.

Q24. Soit $s > 1$. On a :

$$\zeta(s) - G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^s} dt - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Comme la fonction ζ est une somme de fonctions décroissantes, elle est elle-même décroissante sur $]1, +\infty[$. La question précédente implique donc :

$$\forall s \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \quad 0 \leq G(s) \leq 2\zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

Autrement dit, G est bornée au voisinage de 1. L'égalité ci-dessus implique immédiatement :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \underset{s \rightarrow 1}{O}(1).$$

III - Intégrale des fonctions f_k

Q25. Posons : $D = \operatorname{Re}^{-1}(]1, +\infty[) \subseteq \mathbb{C}$, et : $\forall (t, s) \in]0, 1] \times D$, $g(t, s) = f_k(t)t^{s-1}$. Alors :

- l'application $t \mapsto g(t, s)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$ pour tout $s \in D$ (question **Q21**) ;
- par continuité de l'exponentielle complexe, on a : $\forall t \in]0, 1], \lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s \in D}} g(t, s) = f_k(t)$, et l'application f_k est continue par morceaux sur $]0, 1]$;
- pour tout $(t, s) \in]0, 1] \times D$ on a, par positivité de $\operatorname{Re}(s) - 1$:

$$|g(t, s)| \stackrel{(\text{Q4})}{=} f_k(t)t^{\operatorname{Re}(s)-1} \leq f_k(t) \cdot 1^{\operatorname{Re}(s)-1} = f_k(t) \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et l'application f_k est intégrable sur $]0, 1]$ d'après la question **Q21**.

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s \in D}} \int_0^1 f_k(t)t^{s-1} dt = \int_0^1 f_k(t) dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q26. Par la question **Q24**, dont il fut admis qu'elle s'étend au cas d'une variable s complexe, on a :

$$\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

Par la question **Q21**, on a donc :

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1} dt = \frac{\zeta(s)}{sk} (1 - k^{1-s}) = \frac{\zeta(s)}{sk} (1 - e^{(1-s)\ln(k)}) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{k(s-1)} \cdot (1-s)\ln(k) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}.$$

On conclut par la question précédente :

$$\int_0^1 f_k(t) dt = \lim_{s \rightarrow 1} \int_0^1 f_k(t)t^{s-1} dt = \frac{\ln(k)}{k}.$$

Partie C – Étude algébrique et géométrie

I - Une forme bilinéaire symétrique positive

Q27. (a) Soit f une fonction continue par morceaux et bornée sur $]0, 1]$. Alors : $f(x)^2 = \underset{x \rightarrow 0}{O}(1)$, et la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$ puisque continue sur le segment $[0, 1]$. Par le théorème de comparaison des fonctions intégrables : $f \in E$.

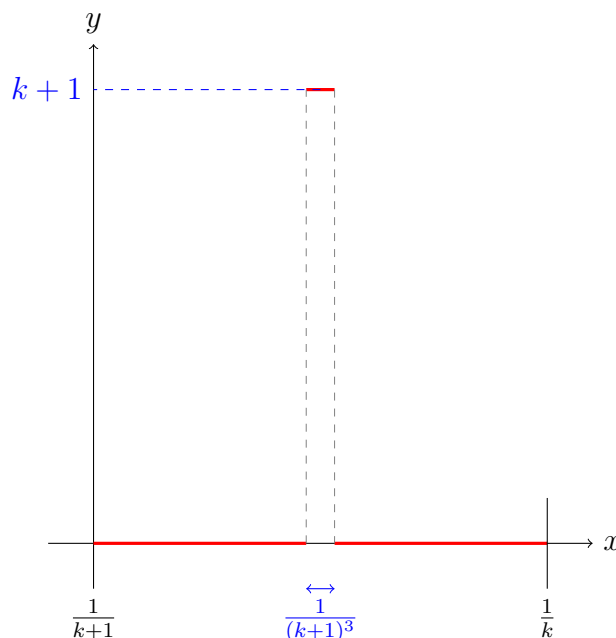
L'affirmation de l'énoncé est donc vraie.

- (b) La fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x}$ appartient à E et n'est pas de carré intégrable sur $]0, 1]$, donc : $E \neq L^2$.

L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.

- (c) Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, posons : $m_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} \right)$ (c'est le milieu du segment $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$).

Considérons la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, par le graphe suivant :



Son expression analytique exacte est sans importance. On vérifie facilement qu'elle est bien définie sur $]0, 1]$ (les intervalles $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ recouvrent $]0, 1]$ et la définition de f aux extrémités est cohérente) et qu'elle est continue par morceaux et positive sur $]0, 1]$. L'aire d'un rectangle étant connue, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < +\infty,$$

donc f est intégrable sur $]0, 1]$. En revanche :

$$\int_0^1 f^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

donc f^2 n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.

Q28. Soit $(f, g) \in E^2$. On a : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a - b)^2 \geq 0$, donc :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

On applique cette inégalité avec $a = |f(t)|$ et $b = |g(t)|$. On en déduit, dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^1 |fg| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 g^2 < +\infty,$$

d'où le résultat : l'intégrale $\int_0^1 fg$ converge absolument.

Démontrons alors que L^2 est un sous-espace vectoriel de E . Il contient la fonction nulle donc il n'est pas vide, et l'inclusion dans E est par définition.

Soient $(f, g) \in (L^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2.$$

Les fonctions f^2 , fg et g^2 étant intégrables sur $]0, 1]$, on a bien : $f + \lambda g \in L^2$. Ainsi L^2 est stable par combinaison linéaire, ce qui achève de démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E .

Q29. L'application $(\cdot | \cdot)$ est une forme bilinéaire par distributivité du produit par rapport à l'addition et par linéarité de l'intégrale. Elle est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. Elle est positive par croissance de l'intégrale, et parce que le carré d'une fonction réelle est positif.

On a : $\mathbb{1}_{\{1\}} \in E \setminus \{0\}$, mais : $(\mathbb{1}_{\{1\}} | \mathbb{1}_{\{1\}}) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{1\}}^2 = 0$, ce qui contredit le caractère défini de $(\cdot | \cdot)$.

II - Un espace préhilbertien réel

Q30. Soit $t \in]\frac{1}{2}, 1]$. On a :

$$1 \leq \frac{1}{t} < 2, \quad \text{et : } \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad 0 \leq \frac{1}{kt} < 1.$$

On en déduit :

$$\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = 1, \quad \text{et : } \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor = 0.$$

Par conséquent, la relation $\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) = 0$ peut se réécrire ainsi, en revenant à la définition de $f_k(t)$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q31. On imite le raisonnement de la question précédente. Soit $t \in]\frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell}]$ (la raison pour laquelle on exclut $\frac{1}{\ell}$ est en vue de la question **Q33** : dans cette question, on pouvait prendre $t \in]\frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell}]$). On a :

$$\ell \leq \frac{1}{t} < \ell + 1, \quad \text{et : } \forall k \in [\ell + 1, n], \quad 0 \leq \frac{1}{kt} \leq \frac{1}{(\ell + 1)t} < 1.$$

On en déduit :

$$\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = \ell, \quad \text{et : } \forall k \in [\ell + 1, n], \quad \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor = 0.$$

Par conséquent, la relation $\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) = 0$ peut se réécrire ainsi, en revenant à la définition de $f_k(t)$ et en isolant les termes de la somme tels que $k \geq \ell + 1$:

$$\sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer (pour $k = \ell$, le terme général de la seconde somme est nul).

Q32. Raisonnons par l'absurde et supposons que les λ_k ne sont pas tous nuls. Soit $\ell \geq 2$ le plus petit entier tel que : $\lambda_\ell \neq 0$. Les relations des deux questions précédentes, avec cet entier ℓ spécifique, deviennent :

$$\sum_{k=\ell}^n \lambda_k \frac{1}{k} = 0, \quad \text{et : } \sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k \frac{\ell}{k} = 0.$$

On soustrait la première somme fois ℓ à la seconde somme. On obtient : $-\lambda_\ell = 0$, ce qui contredit la définition de ℓ .

Par l'absurde : $\forall k \in [2, n], \lambda_k = 0$. On a démontré que la famille $(f_k)_{2 \leq k \leq n}$ est libre.

Q33. D'après la question **Q29**, il reste à vérifier le caractère défini. Soit $f \in F$. On suppose : $(f | f) = 0$. Par définition de F , il existe $(\lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que : $f = \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k$. Par positivité de l'intégrande, on a pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$0 = \int_0^1 \left(\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k \right)^2 \geq \int_{\frac{1}{\ell+1}}^{\frac{1}{\ell}} \left(\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k \right)^2 \geq 0,$$

donc :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \int_{\frac{1}{\ell+1}}^{\frac{1}{\ell}} \left(\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k \right)^2 = 0.$$

Or les f_k sont continues sur $\left] \frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell} \right[$ pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après la question **Q21**. Par conséquent $\left(\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k \right)^2$ l'est aussi, et est positive. Par propriété de séparation de l'intégrale :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall t \in \left] \frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell} \right[, \quad \left(\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k \right)^2 = 0,$$

puis : $\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall t \in \left] \frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell} \right[, \quad \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k = 0$. On reprend alors le raisonnement des trois questions précédentes, où l'on observe qu'il restait valable en prenant t à l'intérieur des intervalles $\left] \frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell} \right[$ (c'est pour cette raison qu'on avait exclu les bornes dans le raisonnement). On obtient : $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \lambda_k = 0$, et donc : $f = 0$.

Ainsi, l'égalité $(f | f) = 0$ entraîne $f = 0$, ce qui démontre le caractère défini de la restriction de $(\cdot | \cdot)$ à F^2 . Les autres propriétés ayant été établies à la question **Q29** : c'est un produit scalaire.

III - Distance d'un vecteur à des sous-espaces

Q34. La question **Q32** démontre que la famille $(f_2, \dots, f_n)$ est libre. C'est donc une base de $\text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$. L'existence et unicité de la famille orthonormée $(e_2, \dots, e_n)$ de l'énoncé découle alors de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Q35. Soit p le projecteur orthogonal de F sur $\text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$, qui existe puisque ce dernier sous-espace est de dimension finie. On sait que l'on a :

$$d_n^2 = \|1 - p(1)\|^2.$$

Comme $1 - p(1) \in F^\perp$ et $1 \in F$ sont orthogonaux, par le théorème de Pythagore on a :

$$d_n^2 = \|1\|^2 - \|p(1)\|^2.$$

Or :

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2 = 1,$$

et comme $(e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$, on a :

$$\|p(1)\|^2 = \left\| \sum_{k=2}^n (1 | e_k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=2}^n (1 | e_k)^2,$$

d'où le résultat :

$$d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^n (1 | e_k)^2.$$

Q36. La suite $(d_n)_{n \geq 2}$ est minorée par 0 (c'est une norme) et décroît puisque pour tout $n \geq 2$ on a : $\text{Vect}(f_2, \dots, f_n) \subseteq \text{Vect}(f_2, \dots, f_{n+1})$ (on peut aussi le déduire de l'égalité de la question précédente). Elle est donc convergente.

Partie D – Synthèse

Q37. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $f = 1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k$ et $g : t \mapsto t^{s-1}$, ce qui nécessite de justifier leur appartenance à L^2 . Dans le cas de g , ce fut démontré dans la question **Q11**. Pour f , on note que par structure d'espace vectoriel de L^2 , il suffit de démontrer que $x \mapsto 1$ et f_k sont dans L^2 dans tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$: c'est immédiat puisque f_k^2 est bornée pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ par la question **Q16**, et parce que toute fonction bornée est dans L^2 (question **Q27a**). Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique et donne le résultat voulu :

$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right) t^{s-1} dt \right|^2 \leq \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right)^2 dt \cdot \int_0^1 |t^{2(s-1)}| dt.$$

Q38. On note encore p le projecteur orthogonal de F sur $\text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$. On applique la question précédente, avec $(\lambda_k)_{2 \leq k \leq n}$ égal aux coordonnées de $p(1)$ dans la base $(f_2, \dots, f_n)$. On obtient :

$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right) t^{s-1} dt \right|^2 \leq \|1 - p(1)\|^2 \cdot \int_0^1 |t^{2(s-1)}| dt \stackrel{(\text{Q11})}{=} \frac{d_n^2}{2\text{Re}(s) - 1}. \quad (*)$$

De plus, par hypothèse sur s , on a : $\zeta(s) = 0$, et donc, par la question **Q21** (dont il fut admis qu'elle reste valable pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ quelconque de partie réelle strictement positive) :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = 0.$$

L'intégrale de gauche de $(*)$ se simplifie donc par linéarité de l'intégrale et donne :

$$\left| \int_0^1 t^{s-1} dt \right|^2 \leq \frac{d_n^2}{2\text{Re}(s) - 1},$$

ou encore :

$$\frac{1}{|s|^2} \leq \frac{d_n^2}{2\text{Re}(s) - 1}$$

d'où l'inégalité souhaitée, après multiplication par $|s|^2$ et par $2\text{Re}(s) - 1$, qui sont bien positifs (par hypothèse sur s).

Supposons à présent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$. Quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$0 \geq 2\text{Re}(s) - 1,$$

ce qui est absurde puisque l'on a : $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Contradiction (j'imagine que le concepteur du sujet attendait plutôt un recours à la question **Q14**).

Par l'absurde, ζ n'admet pas de zéro s tel que $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ (sous l'hypothèse que $(d_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0).