

- 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme u_k est positive et décroissante sur $]1, +\infty[$, on a $\sup_{s \in]1, +\infty[} |u_k(s)| = \lim_{s \rightarrow 1^+} u_k(s) = 1$.
Or la série de terme général 1 est divergente, donc $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$.

- 2) Fixons un réel $A > 1$.

- ▷ Les fonctions u_k sont continues sur $]1, +\infty[$, donc sur $[A, +\infty[$;
▷ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{s \in [A, +\infty[} |u_k(s)| = \frac{1}{k^A}$, or $A > 1$ donc la série $\sum \frac{1}{k^A}$ converge, et donc $\sum u_k$ converge normalement sur $[A, +\infty[$, donc uniformément.

Conclusion. Par théorème, la fonction ζ est continue sur $[A, +\infty[$, ceci pour tout $A > 1$, donc sur $]1, +\infty[$.

- 3) Soit $s > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^s} > 0$, donc par positivité de la somme, $\zeta(s) > 0$.
Conclusion. ζ est strictement positive sur $]1, +\infty[$ (et donc ne s'annule pas).

- 4) Notons $x = \operatorname{Re}(s)$ et $y = \operatorname{Im}(s)$ pour alléger les notations. On a

$$|t^s| = \left| e^{(x+iy)\ln(t)} \right| = \left| e^{x\ln(t)} \right| \cdot \left| e^{iy\ln(t)} \right| = e^{x\ln(t)} = t^x.$$

Conclusion. On a $|t^s| = t^{\operatorname{Re}(s)}$.

- 5) Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$. Alors d'après **Q4.**, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left| \left(\frac{1}{k} \right)^s \right| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$, qui est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann.
Conclusion. La série $\sum \frac{1}{k^s}$ est absolument convergente.

- 6) Notons $s = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Alors pour $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, d'après **Q4.**,

$$\left| \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right| = \frac{1}{p_1^{xm_1} \dots p_n^{xm_n}}.$$

On peut sommer par paquets dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n} \left| \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right| &= \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{xm_1} \dots p_n^{xm_n}} \right) \\ &= \sum_{m_1 \in \mathbb{N}} \sum_{m_2 \in \mathbb{N}} \dots \sum_{m_n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{p_1^{xm_1}} \times \frac{1}{p_2^{xm_2}} \times \dots \times \frac{1}{p_n^{xm_n}} \right) \\ &= \left(\sum_{m_1 \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p_1^x)^{m_1}} \right) \times \dots \times \left(\sum_{m_n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p_n^x)^{m_n}} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^x}} \times \dots \times \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^x}} \quad (\text{séries géométriques de raisons } \frac{1}{p_i^x} \in]0, 1[) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^x}} < +\infty. \end{aligned}$$

Ce résultat étant fini, la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right)_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n}$ est sommable. On peut donc sommer par paquets cette famille. Le même calcul que ci-dessus, sans valeur absolue, donne alors :

$$S_n(s) := \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i^s}}$$

7) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\phi_n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}_n$ définie par

$$\phi_n(m_1, \dots, m_n) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$$

est bijective : elle est en effet surjective par définition de $\mathbb{N}_n$, et injective par unicité de la décomposition des entiers en facteurs premiers. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s} &= \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\phi_n(m_1, \dots, m_n)^s} \\ &= \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n})^s}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$S_n(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s}.$$

• Montrons maintenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(s) = \zeta(s)$. La suite d'ensembles $(\mathbb{N}_n)$ est croissante au sens de l'inclusion, et puisque tout entier naturel non nul admet une décomposition en facteurs premiers, on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{N}_n = \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

La somme de la série convergente $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ coïncide avec la somme de la famille $(\frac{1}{k^s})_{k \in \mathbb{N}^*}$:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^s}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J \subset \mathbb{N}^*$, J fini, tel que $\sum_{k \in \mathbb{N}^* \setminus J} \left| \frac{1}{k^s} \right| \leq \varepsilon$. Mais J étant fini, (1) entraîne qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $J \subset \mathbb{N}_n$, ou autrement dit $(\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_n) \subset (\mathbb{N}^* \setminus J)$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$:

$$|S_n(s) - \zeta(s)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s} \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_n} \left| \frac{1}{k^s} \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^* \setminus J} \left| \frac{1}{k^s} \right| \leq \varepsilon.$$

Conclusion. Nous avons montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(s) = \zeta(s)$.

8) Nous présentons ici 2 solutions. La seconde n'utilise pas l'indication de l'énoncé mais nous paraît plus directe.

• *Solution 1.*

D'après la question précédente (elle s'applique car $\operatorname{Re}(x) = x > 1$) : $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \zeta(x)$ avec $\zeta(x) > 0$, et donc par continuité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la suite $(\ln(S_n(x)))$ est convergente.

Or $\ln(S_n(x)) = \sum_{i=1}^n \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{p_i^x} \right) \right)$, donc la série $\sum_{i \geq 1} \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{p_i^x} \right) \right)$ converge.

Or quand $i \rightarrow \infty$: $p_i \rightarrow \infty$, donc $-\frac{1}{p_i^x} \rightarrow 0$, et donc $-\ln \left(1 - \frac{1}{p_i^x} \right) \sim \frac{1}{p_i^x}$.

Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$ converge.

• *Solution 2.*

Comme $p_1 = 2$ et que la suite (p_i) est une suite d'entiers strictement croissante, on obtient par récurrence immédiate le fait que pour tout $i \geq 1$, $p_i \geq i$ donc $0 \leq \frac{1}{p_i^x} \leq \frac{1}{i^x}$.

Or $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^x}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$ converge également.

9) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(a_n) = \sum_{i=1}^n -\ln\left(1 + \frac{1}{p_i^x}\right)$. Or

$$-\ln\left(1 + \frac{1}{p_i^x}\right) \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{p_i^x},$$

et $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$ converge (**Q8.**), donc par comparaison de séries à termes négatifs, la suite $(\ln(a_n))$ converge vers un réel c , ainsi par continuité de la fonction exponentielle, (a_n) converge vers $\ell = e^c > 0$.

10) Remarquons que pour tout complexe $u \neq 1$, on a $|u - 1| \leq |u| + 1$, donc $\frac{|u|}{|u|+1} \leq \left|\frac{u}{u-1}\right|$.

En particulier pour $i \in \mathbb{N}^*$, comme $|p_i^s| = p_i^x$, on a $\frac{p_i^x}{p_i^x+1} \leq \left|\frac{p_i^s}{p_i^s-1}\right|$. Par conséquent

$$a_n = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^x}{p_i^x+1} \leq \prod_{i=1}^n \left|\frac{p_i^s}{p_i^s-1}\right| = \left|\prod_{i=1}^n \frac{p_i^s}{p_i^s-1}\right| = |S_n(s)|.$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans l'inégalité $a_n \leq |S_n(s)|$, on obtient $\ell \leq |\zeta(s)|$, donc finalement $\zeta(s) \neq 0$ puisque $\ell > 0$.

11) On conserve la notation $x = \operatorname{Re}(s)$. D'après l'énoncé, $x > \frac{1}{2}$.

La fonction $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est continue sur $]0, 1]$ et : $\forall t \in]0, 1], |t^{2(s-1)}| = t^{\operatorname{Re}(2(s-1))}$.

Or $\operatorname{Re}(2(s-1)) = 2(x-1) > -1$, donc par critère de Riemann, $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est intégrable sur $]0, 1]$. On peut alors calculer :

$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt = \int_0^1 t^{2(x-1)} dt = \left[\frac{t^{2x-1}}{2x-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2x-1}.$$

En effet, $2x-1 > 0$ donc $t^{2x-1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Conclusion. On a obtenu l'égalité : $\int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt = \frac{1}{2\operatorname{Re}(s)-1}$.

12) Soit M un point d'affixe $x + iy$. Alors on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} M \in \Delta_d &\Leftrightarrow d^2(x^2 + y^2) \geq 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2x}{d^2} \geq -\frac{1}{d^2} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{d^2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{d^4} - \frac{1}{d^2} \\ &\Leftrightarrow M \notin \mathcal{D}_d, \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}_d$ est le disque ouvert de centre O_d d'affixe $\frac{1}{d^2}$, et de rayon $R_d = \sqrt{\frac{1}{d^4} - \frac{1}{d^2}} = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$.

Conclusion. On a bien montré que $\Delta_d = \mathcal{D}_d^c$.

13) La fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ par opérations sur des fonctions dérivables, et pour $d \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} g'(d) &= -2d^{-3} \left(1 - \sqrt{1-d^2}\right) + d^{-2} \cdot \frac{d}{\sqrt{1-d^2}} \\ &= d^{-3} \left(-2 + 2\sqrt{1-d^2} + \frac{d^2}{\sqrt{1-d^2}}\right) \\ &= \frac{d^{-3}}{\sqrt{1-d^2}} \left(-2\sqrt{1-d^2} + 2(1-d^2) + d^2\right) \\ &= \frac{d^{-3}}{\sqrt{1-d^2}} \left(2 - d^2 - 2\sqrt{1-d^2}\right) \end{aligned}$$

Or fonction $t \mapsto 2\sqrt{1+t}$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\forall t \in [-1, +\infty[\setminus \{0\}, 2\sqrt{1+t} < 2+t$$

(comparaison avec la tangente au point d'abscisse 0). Pour $d \in]0, 1[$, en évaluant cette égalité en $-d^2$ (qui est bien dans $[-1, +\infty[\setminus \{0\})$, on obtient $2 - d^2 - 2\sqrt{1-d^2} > 0$, et ainsi $g'(d) > 0$, et donc g est strictement croissante sur $]0, 1[$.

Par ailleurs un développement limité en 0 donne :

$$g(d) \underset{d \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{d^2} \left(1 - \left(1 - \frac{d^2}{2} + o(d^2) \right) \right) = \frac{1}{2} + o(1),$$

donc $\lim_{d \rightarrow 0^+} g(d) = \frac{1}{2}$. Enfin par opérations sur les limites, $\lim_{d \rightarrow 1^-} g(d) = 1$.

Conclusion. g étant strictement croissante et continue sur $]0, 1[$, et d'après les limites ci-dessus, l'image de l'intervalle $]0, 1[$ par g est $]\frac{1}{2}, 1[$.

- 14) Notons $I = \bigcap_{d \in]0, 1[} \Delta_d$. Nous proposons de montrer de deux façons que I est égal à H , le demi-plan formé des points dont l'affixe s vérifie $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$.

• *Solution probablement attendue par l'énoncé.*

On a $I^c = \bigcup_{d \in]0, 1[} \Delta_d^c = \bigcup_{d \in]0, 1[} \mathcal{D}_d$, il suffit de montrer que I^c est le

demi-plan H^c d'inéquation $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Or d'après **Q12.**, $\mathcal{D}_d$ est un disque de diamètre $[A_d B_d]$ où A_d et B_d sont les points sur l'axe réel d'affixes respectives

$$g(d) = \frac{1 - \sqrt{1-d^2}}{d^2}, \quad \text{et} \quad h(d) = \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d^2}.$$

Comme $A_d, B_d \in H^c$, on a immédiatement $I^c \subset H^c$. De plus d'après **Q13.**, quand $d \rightarrow 0^+$, $g(d)$ tend vers $\frac{1}{2}$ en décroissant (strictement), et par ailleurs $h(d)$ tend vers $+\infty$. On en déduit que tout point $M \in H^c$ appartient à I^c

• *Solution directe, n'utilisant pas Q12. et Q13.*

Soit M un point d'affixe $s = x + iy$. Notons $\chi = 2x - 1$. On a :

$$M \in I \Leftrightarrow \forall d \in]0, 1[, d^2(x^2 + y^2) \geq 2x - 1 \Leftrightarrow \forall d \in]0, 1[, x^2 + y^2 \geq \frac{\chi}{d^2}.$$

Il est clair que si $\chi \leq 0$ cette condition est satisfaite (car $x^2 + y^2 \geq 0$), et qu'au contraire si $\chi > 0$ cette condition n'est pas satisfaite (car en prenant d assez proche de 0, on aura $\frac{\chi}{d^2} > x^2 + y^2$). On en conclut que I est l'ensemble des points dont l'affixe vérifie $2\operatorname{Re}(s) - 1 \leq 0$, autrement dit $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$.

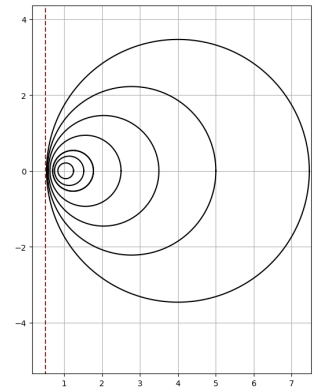
- 15) Pour $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, on a $\frac{i}{k} \in]0, 1[$ donc

$$f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{\lfloor i \rfloor}{k} - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor = \frac{i}{k}.$$

Par ailleurs

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \lfloor 1 \rfloor = 0.$$

Conclusion. Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \begin{cases} \frac{i}{k}, & \text{si } i \neq k, \\ 0, & \text{si } i = k. \end{cases}$



16) Soit $t \in]0, 1]$. On a l'encadrement :

$$\frac{1}{kt} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \frac{1}{kt},$$

qu'on peut réécrire :

$$k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \frac{1}{t} < k + k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Les bornes obtenues étant deux entiers on en déduit donc :

$$k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq k + k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor - 1,$$

autrement dit :

$$\left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq \frac{k-1}{k} + \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor,$$

et finalement on a bien :

$$0 \leq f_k(t) \leq \frac{k-1}{k}.$$

17) Notons J l'ensemble des valeurs prises par f_k sur l'intervalle $]0, 1]$.

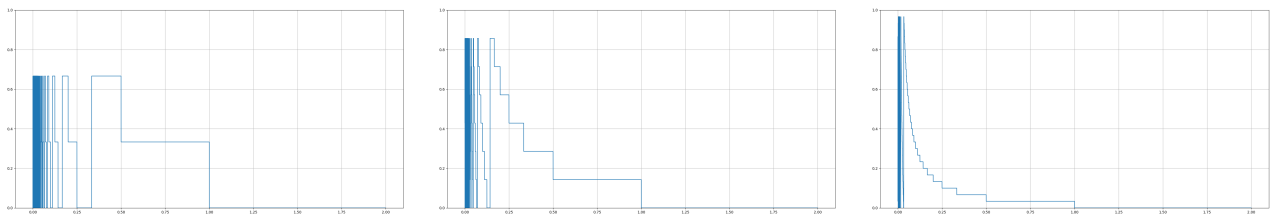
Pour tout $t \in]0, 1]$, $f_k(t) \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}$, d'après l'expression de $f_k(t)$. D'après l'encadrement obtenu en **Q16.**, on a donc $J \subset \left\{ \frac{a}{k}, a \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \right\}$.

Par ailleurs les valeurs $\frac{a}{k}$, pour $a = 0, \dots, k-1$, appartiennent en effet à J d'après **Q15.**

Conclusion.

$$J = \left\{ \frac{a}{k}, a \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k} \right\}.$$

18) Voici une représentation des graphes de f_k , pour $k = 3$, $k = 7$, et $k = 30$:



Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est constante sur chaque intervalle $\left] \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} \right]$, $i \in \mathbb{N}^*$.
- La fonction $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$ est constante sur chaque intervalle $\left] \frac{1}{k(i+1)}, \frac{1}{ki} \right]$, $i \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\left\{ \frac{1}{ki}, i \in \mathbb{N}^* \right\}$ étant inclus dans l'ensemble des réels $\left\{ \frac{1}{i}, i \in \mathbb{N}^* \right\}$, on en déduit que la fonction f_k est également constante sur chaque intervalle $\left] \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i} \right]$, $i \in \mathbb{N}^*$. Ainsi f_k est en escalier sur $]0, 1]$, et donc continue par morceaux.

Par ailleurs la question **Q16.** montre que $|f_k|$ est majorée par 1 sur l'intervalle $]0, 1]$ qui est de largeur finie, f_k est donc intégrable sur cet intervalle.

19) Notons ν la fonction définie sur $]0, 1]$ par l'expression $\nu(t) = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1}$. La fonction ν est continue par morceaux sur $]0, 1]$ par le même argument qu'en **Q18.** De plus :

$$\forall t \in]0, 1], 0 \leq \nu(t) \leq \frac{1}{t} \cdot t^{s-1} = t^{s-2}.$$

Or car $s-2 > -1$ (en effet $s > 1$ par hypothèse), donc $t \mapsto t^{s-2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (critère de Riemann), et donc ν est également intégrable sur cet intervalle par comparaison de fonctions positives.

20) Soit $t \in]0, 1]$ et $j \in \mathbb{N}^*$. On a l'équivalence :

$$\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = j \Leftrightarrow j \leq \frac{1}{t} < j+1 \Leftrightarrow \frac{1}{j+1} < t \leq \frac{1}{j},$$

ainsi sur chaque intervalle $\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$, la fonction $t \mapsto \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est constante et égale à j . On applique la relation de Chasles (attention à ne pas aller trop vite car on découpe ici $]0, 1]$ en une infinité de sous-intervalles) :

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1} dt \right) \quad (\text{car } \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \text{ et par intégrabilité en } 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \int_{\frac{1}{j+1}}^{\frac{1}{j}} j t^{s-1} dt \right) \quad (\text{d'après Chasles et la remarque ci-dessus}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{j+1}}^{\frac{1}{j}} j t^{s-1} dt. \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{s} \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) \end{aligned}$$

La fin du calcul ci-dessous est justifiée par une sommation par paquets. La somme étant à termes positifs, cette sommation par paquets est valable dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Même si ce n'est pas la question, on peut quand même préciser que le résultat fini obtenu nous permet d'affirmer que la famille $\left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right)_{(k,j) \in E}$, où $E = \{(k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2 : k \leq j\}$, se trouve être sommable.

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{s} \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{(k,j) \in E} \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=k}^N \frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(N+1)^s} \right) = \frac{1}{k^s}$, on a finalement

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \frac{\zeta(s)}{s}.$$

21) Par linéarité de l'intégrale (sur des intégrales convergentes d'après **Q19.**), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt &= \frac{1}{k} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1} dt - \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt \\ &= \frac{\zeta(s)}{ks} - \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt, \quad \text{d'après Q20..} \end{aligned}$$

Pour le terme de droite, le changement de variable $u = kt$ nous donne :

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt = \int_0^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor \left(\frac{u}{k} \right)^{s-1} \frac{1}{k} du = \frac{1}{k^s} \int_0^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du,$$

mais pour $u > 1$ on a $\lfloor \frac{1}{u} \rfloor = 0$ et donc ce terme de droite vaut $\frac{1}{k^s} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du = \frac{\zeta(s)}{sk^s}$.

Conclusion. En remplaçant, on obtient finalement :

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \frac{\zeta(s)}{ks} - \frac{\zeta(s)}{sk^s} = \frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right).$$

22) Pour $t > 0$, $|h'(t)| = \left| \frac{-s}{t^{s+1}} \right| = \frac{s}{t^{s+1}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $s > 0$, $|h'|$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc son maximum sur ce segment est atteint en k et vaut $|h'(k)| = \frac{s}{k^{s+1}}$.

23) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $|h'|$ étant majorée par $\frac{s}{k^{s+1}}$ sur $[k, k+1]$, l'inégalité des accroissements finis nous donne :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad 0 \leq \frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \leq (t-k) \frac{s}{k^{s+1}} \leq \frac{s}{k^{s+1}}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \leq \int_k^{k+1} \frac{s}{k^{s+1}} dt = \frac{s}{k^{s+1}}.$$

Comme $s+1 > 1$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{s}{k^{s+1}}$ est convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs,

la série $\sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$ est également convergente.

Enfin par croissance de la somme,

$$0 \leq G(s) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s}{k^{s+1}} = s \zeta(s+1).$$

Remarque. En gardant le facteur $(t-k)$ dans la première majoration on aurait obtenu un majorant final un peu meilleur : $\frac{1}{2} s \zeta(s+1)$. Mais ce raffinement n'aurait eu aucune utilité pour la suite.

24) On suppose $s > 1$. On peut remarquer que $\frac{1}{k^s} = \int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} dt$. Par linéarité de la somme,

$$\zeta(s) - G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} dt - \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^s} dt \right).$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^s}$ étant intégrable en $+\infty$, la relation de Chasles permet donc d'écrire

$$\zeta(s) - G(s) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s} dt = \left[\frac{1}{(-s+1)t^{s-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1} \quad (2)$$

La continuité de ζ sur $]1, +\infty[$ (voir **Q2.**), nous donne $s\zeta(s+1) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \zeta(2)$, et donc $s\zeta(s+1) = \mathcal{O}(1)$.

La comparaison obtenue en **Q23.** nous donne donc également $G(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \mathcal{O}(1)$.

Conclusion. En remplaçant dans la relation (2), on obtient bien :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \mathcal{O}(1).$$

25) k étant fixé, posons $g(s, t) = f_k(t) t^{s-1}$ pour $(s, t) \in]1, +\infty[\times]0, 1]$.

▷ Pour tout $t \in]0, 1]$, $g(s, t) = f_k(t) e^{(s-1)\ln(t)} \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} f_k(t)$;

- ▷ les fonctions $t \mapsto g(s, t)$ pour $s \in]1, +\infty[$, et la fonction f_k , sont continues par morceaux sur $]0, 1]$ (remarque : le programme officiel autorise à ne pas mentionner cette hypothèse)
- ▷ Pour tout $(s, t) \in]1, +\infty[\times]0, 1]$, $|g(s, t)| \leq f_k(t)$, or f_k est intégrable sur $]0, 1]$ d'après **Q18.**

Conclusion. Par théorème de convergence dominée (version paramètre), on a :

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \int_0^1 f_k(t) dt.$$

- 26) On a d'après **Q24.** : $\zeta(s) \sim_{s \rightarrow 1^+} \frac{1}{s-1}$. En combinant ceci avec **Q21.**, on obtient :

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s(s-1)} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right)$$

Or $\frac{1}{s} \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} 1$, et par ailleurs $\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} = \frac{1}{k^s} (e^{(s-1)\ln k} - 1) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{(s-1)\ln k}{k}$ (avec l'équivalent usuel $e^h - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$).
Ainsi par produit d'équivalents :

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{\ln k}{k}, \quad \text{donc} \quad \int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \frac{\ln k}{k}.$$

La question **Q25.** permet de conclure que $\int_0^1 f_k(t) dt = \frac{\ln k}{k}$.

- 27) a) **Vrai.** Soit f bornée sur $]0, 1]$. Alors f^2 est également bornée sur $]0, 1]$ (en effet si M est un majorant de $|f|$, alors f^2 est positive et majorée par M^2). Or l'intervalle $]0, 1]$ étant borné, toute fonction bornée sur cet intervalle est intégrable.
- b) **Faux.** La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est un exemple d'élément de E qui n'est pas dans L^2 , car $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.
- c) **Faux.** La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est un exemple de fonction intégrable sur $]0, 1]$ qui n'est pas dans L^2 , car $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.
- 28) • Commençons par remarquer que pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, conséquence de l'identité remarquable $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$.
Appliquée aux réels $|f(t)|$ et $|g(t)|$, cette remarque donne : $\forall t \in]0, 1], |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$.
Or $t \mapsto \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)$ est intégrable sur $]0, 1]$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables, donc par comparaison, $t \mapsto f(t)g(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

• Vérifions maintenant que L^2 est un sous-espace vectoriel de E (c'est déjà une partie de E par définition) :

- (a) L'ensemble L^2 contient la fonction nulle;
- (b) pour $f \in L^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)^2 = \lambda^2 f^2$ est intégrable car f^2 est intégrable, donc $\lambda f \in L^2$;
- (c) pour $f, g \in L^2$, $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$, donc $(f+g)^2$ est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.

Conclusion L^2 contient 0_E et est stable par combinaison linéaire donc c'est bien un sous-espace vectoriel de E .

- 29) Vérifions que nous avons affaire à une forme bilinéaire symétrique positive :

- ▷ L'application $(\cdot | \cdot)$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- ▷ Elle est clairement symétrique : pour $f, g \in L^2$, $(f | g) = \int_0^1 f g = \int_0^1 g f = (g | f)$.

▷ Elle est linéaire par rapport à la première variable : pour $f_1, f_2, g \in L^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha f_1 + \beta f_2 | g) = \int_0^1 (\alpha f_1 + \beta f_2) g = \int_0^1 (\alpha f_1 g + \beta f_2 g) = \alpha \int_0^1 f_1 g + \beta \int_0^1 f_2 g = \alpha (f_1 | g) + \beta (f_2 | g).$$

Elle est aussi linéaire par rapport à la deuxième variable, par symétrie.

▷ Enfin elle est positive, par positivité de l'intégrale : pour $f \in L^2$, $(f | f) = \int_0^1 f^2 \geq 0$.

En revanche $(\cdot | \cdot)$ n'est pas **définie** positive. Par exemple la fonction h suivante vérifie $(h | h) = 0$ mais ce n'est pas la fonction nulle :

$$h : t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } t = 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

30) Remarquons que pour k entier naturel tel que $k \geq 2$, on a $f_k(1) = \frac{1}{k} - \lfloor \frac{1}{k} \rfloor = \frac{1}{k}$ car $\frac{1}{k} \in]0, 1[$.
En évaluant en 1 la relation donnée par l'énoncé, on obtient donc

$$\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(1) = \sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0.$$

31) On choisit cette fois d'évaluer en $\frac{1}{\ell}$. On remarque que

$$f_k\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{1}{k} \lfloor \ell \rfloor - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor = \frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor$$

Ainsi

$$\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k\left(\frac{1}{\ell}\right) = \sum_{k=2}^n \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) = 0.$$

Par relation de Chasles,

$$\sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) + \lambda_\ell \left(\frac{\ell}{\ell} - \left\lfloor \frac{\ell}{\ell} \right\rfloor \right) = 0.$$

En remarquant que $\frac{\ell}{\ell} - \left\lfloor \frac{\ell}{\ell} \right\rfloor = 0$, et que pour $k > \ell$, $\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor = \frac{\ell}{k}$, on obtient donc :

$$\sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) = 0.$$

32) • Pour $\ell = 2$, **Q31.** donne $\sum_{k=3}^n 3 \frac{\lambda_k}{k} = 0$, donc $\sum_{k=3}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

On soustrait à cette égalité celle obtenue en **Q30.** : $\sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0$. On obtient $\frac{\lambda_2}{2} = 0$, donc $\lambda_2 = 0$.

• Supposons maintenant que pour un certain $j \in [2, n-1]$ on ait $\lambda_2 = \dots = \lambda_j = 0$.

Alors **Q31.** appliquée au rang $\ell = j+1$ donne : $\sum_{k=j+2}^n (j+1) \frac{\lambda_k}{k} = 0$, donc $\sum_{k=j+2}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

On soustrait à cette égalité celle obtenue en **Q30.** : $\sum_{k=j+1}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0$. On obtient $\frac{\lambda_{j+1}}{j+1} = 0$, donc $\lambda_{j+1} = 0$.

• **Conclusion.** Par récurrence finie, on a donc $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ceci montre que la famille $(f_k)_{2 \leq k \leq n}$ est libre, et ceci étant vrai pour tout $n \geq 2$, la famille $(f_k)_{k \geq 2}$ est libre.

- 33) Soit $u \in F$ une fonction telle que $(u|u) = 0$. Comme les fonctions f_k , $k \geq 2$, ainsi que la fonction $\mathbf{1}$, ont la propriété d'être constantes sur chaque intervalle $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ avec $i \in \mathbb{N}^*$, c'est le cas de u également, par combinaison linéaire.

Soit u_i la valeur prise par u sur l'intervalle $[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$. Alors on a

$$(u|u) = \int_0^1 u^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\frac{1}{i+1}}^{\frac{1}{i}} u^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) u_i^2 = 0.$$

Comme c'est une somme de termes positifs, on en déduit que pour $i \in \mathbb{N}^*$, $(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) u_i = 0$, donc $u_i = 0$. Ainsi $u = 0_F$.

Conclusion. $(\cdot|\cdot)$ définit déjà une forme linéaire symétrique positive sur L^2 d'après **Q29.**, donc sur F par restriction, et de plus sur F nous venons de vérifier qu'elle est «définie», c'est donc un produit scalaire sur F .

- 34) C'est une question de cours (Gram-Schmidt). Définissons la propriété

$$(\mathcal{P}_p) : \left[\begin{array}{l} \exists!(e_2, \dots, e_p) \in (L^2)^{p-1} : \left\{ \begin{array}{ll} \text{Vect}(e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_2, \dots, f_p) & (\mathcal{A}_p); \\ (e_2, \dots, e_p) \text{ est orthonormée} & (\mathcal{B}_p); \\ (e_p | f_p) > 0 & (\mathcal{C}_p). \end{array} \right. \end{array} \right]$$

• *Initialisation.* Prenons $p = 2$.

- $(\mathcal{A}_2)$ équivaut à l'existence d'un réel $\alpha \neq 0$ tel que $e_2 = \alpha f_2$;
- $(\mathcal{B}_2)$ équivaut à $|\alpha| \cdot \|f_2\| = 1$;
- $(\mathcal{C}_2)$ équivaut à $\alpha \cdot \|f_2\|^2 > 0$;

ce qui donne bien un unique vecteur $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$ vérifiant $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{B}_2)$ et $(\mathcal{C}_2)$. Ainsi $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée.

• *Hérédité.* Supposons maintenant $(\mathcal{P}_p)$ vérifiée, pour un certain rang $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, et notons $e_2, \dots, e_p$ les vecteurs vérifiant les trois propriétés $(\mathcal{A}_p)$, $(\mathcal{B}_p)$ et $(\mathcal{C}_p)$.

Soit e_{p+1} un vecteur de L^2 . $(\mathcal{A}_{p+1})$ est vérifiée par $(e_2, \dots, e_{p+1})$ si et seulement si e_{p+1} est de la forme

$$e_{p+1} = \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_p e_p + \alpha f_{p+1},$$

avec $\gamma_2, \dots, \gamma_p \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Supposons que c'est le cas.

L'orthogonal de $\text{Vect}(e_2, \dots, e_p)$ dans $\text{Vect}(e_2, \dots, e_p, f_{p+1})$ étant de dimension 1, on peut prendre u_{p+1} un vecteur non nul qui engendre cette droite. La famille $(e_2, \dots, e_{p+1})$ est orthogonale ssi il existe un réel β (non nul) tel que $e_{p+1} = \beta u_{p+1}$. Les conditions restantes pour réaliser $(\mathcal{A}_{p+1})$, $(\mathcal{B}_{p+1})$ et $(\mathcal{C}_{p+1})$ sont :

$$\|e_{p+1}\| = |\beta| \cdot \|u_{p+1}\| = 1, \quad \text{et} \quad (e_{p+1} | f_{p+1}) = \beta (u_{p+1} | f_{p+1}) > 0,$$

ces conditions sont vérifiées pour une unique valeur du réel β (signe et valeur absolue imposées). Ainsi la propriété $(\mathcal{P}_{p+1})$ est bien vérifiée.

Conclusion. On obtient bien la propriété demandée, par récurrence.

- 35) Notons F_n le sous-e.v. de F défini par $F_n = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$. F_n étant de dimension finie, la distance d_n est donnée par $d_n = \|\mathbf{1} - \pi_n\|$, où π_n est le projeté orthogonal de $\mathbf{1}$ sur F_n .

Le théorème de Pythagore permet alors d'écrire :

$$\|\mathbf{1}\|^2 = \|\pi_n\|^2 + \|\mathbf{1} - \pi_n\|^2.$$

On a $\|\mathbf{1}\|^2 = \int_0^1 1^2 dt = 1$. Par ailleurs comme $\pi_n = \sum_{k=2}^n (\mathbf{1}|e_k) e_k$, et la famille $(e_2, \dots, e_n)$ est orthonormée, on a $\|\pi_n\|^2 = \sum_{k=2}^n (\mathbf{1}|e_k)^2$.

Conclusion. On a bien

$$d_n^2 = \|\mathbf{1} - \pi_n\|^2 = 1 - \sum_{k=2}^n (\mathbf{1}|e_k)^2.$$

36) D'après **Q35.**, la suite de terme général d_n^2 est clairement décroissante, et elle est minorée par 0, elle est donc convergente. Comme $d_n \geq 0$, on a $d_n = \sqrt{d_n^2}$ et donc la suite de terme général d_n est aussi convergente par continuité de $\sqrt{\cdot}$.

37) Notons $U : t \mapsto 1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t)$, et $V : t \mapsto t^{s-1}$.

U et V sont c.p.m. sur $]0, 1]$, et de plus :

- U est bornée car les f_k sont bornées, donc U appartient à L^2 (**Q27.**);
- pour $t \in]0, 1]$, $V(t)^2 = t^{2(s-1)}$, donc $t \mapsto V(t)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$ (**Q11.**), donc V appartient à L^2 .

Les λ_k étant réels, U est à valeurs réelles et donc $|U(t)|^2 = U(t)^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à U et V s'écrit donc :

$$\left| \int_0^1 U(t)V(t)dt \right|^2 \leq \int_0^1 U(t)^2 dt \times \int_0^1 |V(t)|^2 dt,$$

autrement dit

$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right) t^{s-1} dt \right|^2 \leq \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right)^2 dt \times \int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt.$$

38) L'idée est d'appliquer l'inégalité en **Q37.** de sorte que son membre de droite soit minimal. On choisit donc les λ_k égaux aux coefficients α_k dans la décomposition de π_n selon $f_2, \dots, f_n$ (rappelons que π_n , défini en **Q35.**, est le projeté orthogonal de $\mathbf{1}$ sur $\text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$) :

$$\pi_n = \sum_{k=2}^n \alpha_k f_k.$$

Par linéarité de l'intégrale (sur des intégrales convergentes), et avec **Q21.** étendue à l'hypothèse « $s \neq 1$ et $\text{Re}(s) > 0$ » qui est bien vérifiée ici, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \alpha_k f_k(t) \right) t^{s-1} dt &= \int_0^1 t^{s-1} dt - \sum_{k=2}^n \alpha_k \int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{s} - \sum_{k=2}^n \alpha_k \frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) = \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (\text{grâce à l'hypothèse } \zeta(s) = 0).$$

De plus

$$\int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \alpha_k f_k(t) \right)^2 dt = \|\mathbf{1} - \pi_n\|^2 = d_n^2,$$

et d'après **Q11.**,

$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt = \frac{1}{2\text{Re}(s) - 1}.$$

L'inégalité de **Q37**. s'écrit donc $\left|\frac{1}{s}\right|^2 \leq \frac{d_n^2}{2\operatorname{Re}(s) - 1}$, et comme $2\operatorname{Re}(s) - 1 > 0$ on obtient :

$$2\operatorname{Re}(s) - 1 \leq d_n^2 |s|^2.$$

Conclusion. Sous l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, en faisant tendre $n \rightarrow \infty$ notre inégalité donne $2\operatorname{Re}(s) - 1 \leq 0$, i.e. $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur s . Ainsi il ne peut exister de réel s vérifiant $\zeta(s) > \frac{1}{2}$, $s \neq 1$ et $\zeta(s) = 0$.