

CONCOURS CENTRALE-SUPÉELEC

SESSION 2026 FILIÈRE MP-MPI

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2

m.laamoum2@gmail.com¹

Partie A – Questions préliminaires

I – La fonction ζ sur l'intervalle $]1, +\infty[$

Q.1 On a

$$\|u_k\|_{\infty,]1, +\infty[} = \sup_{s \in]1, +\infty[} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{k},$$

et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. Donc la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ n'est pas normalement convergente sur $]1, +\infty[$.

Q.2 Pour tout $a > 1$, on a $\|u_k\|_{\infty, [a, +\infty[} = \frac{1}{k^a}$ et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^a}$ converge, donc la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge normalement (et uniformément) sur tout $[a, +\infty[$. Chaque fonction $u_k : s \mapsto \frac{1}{k^s}$ est continue sur $[a, +\infty[$, par le théorème de continuité des séries de fonctions, ζ est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Q.3 Pour $s > 1$ et $k \geq 2$ on a $\frac{1}{k^s} > 0$, donc

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \geq 1 > 0.$$

La fonction ζ est strictement positive sur $]1, +\infty[$ et ne s'y annule pas.

II – Cas de la variable complexe

Q.4 Soit $s \in \mathbb{C}$ et $t > 0$. On écrit $s = \operatorname{Re}(s) + i \operatorname{Im}(s)$, donc

$$t^s = e^{s \ln(t)} = e^{\operatorname{Re}(s) \ln(t)} e^{i \operatorname{Im}(s) \ln(t)}.$$

Ainsi $\boxed{|t^s| = e^{\operatorname{Re}(s) \ln(t)} = t^{\operatorname{Re}(s)}}.$

Soit s un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Q.5 D'après **Q4**, $\left| \frac{1}{k^s} \right| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$. Comme $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ converge. Ainsi la série $\sum \frac{1}{k^s}$ converge absolument.

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

Q.6 • Sommabilité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et J une partie finie de $\mathbb{N}^n$, on a

$$\sum_{(m_1, \dots, m_n) \in J} \left| \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right| = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in J} \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^{\operatorname{Re}(s)}}$$

Chaque $(m_1, \dots, m_n) \in J$ définit un unique entier $k = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$, donc

$$\sum_{(m_1, \dots, m_n) \in J} \left| \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}} = \zeta(\operatorname{Re}(s))$$

Ainsi il existe $M > 0$ telle que pour tout $J \subset \mathbb{N}^n$ finie

$$\sum_{(m_1, \dots, m_n) \in J} \left| \frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right| \leq M$$

Donc la famille $\left(\frac{1}{(p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n})^s} \right)_{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n}$ est sommable.

• Calcul de la somme :

On a $\mathbb{N}^n = \bigcup_{(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}} \left(\bigcup_{m_n \in \mathbb{N}} \{ (m_1, \dots, m_n) \} \right)$, réunion disjointe.

Par sommabilité et le théorème de sommation par paquets on a

$$S_n(s) = \sum_{(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}} \left(\sum_{m_n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{sm_1} \dots p_n^{sm_n}} \right) = \left(\sum_{(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}} \frac{1}{p_1^{sm_1} \dots p_{n-1}^{sm_{n-1}}} \right) \sum_{m_n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_n^{sm_n}}$$

comme $|p_i^{-s}| = p_i^{-\operatorname{Re}(s)} < 1$, alors $\sum_{m_n \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_n^{sm_n}} = \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$ et

$$S_n(s) = \left(\sum_{(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}} \frac{1}{p_1^{sm_1} \dots p_{n-1}^{sm_{n-1}}} \right) \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$$

Ainsi, par récurrence
$$S_n(s) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - p_i^{-s}}.$$

Q.7 Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, les éléments de $\mathbb{N}_n$ sont exactement les $p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ avec $m_i \in \mathbb{N}$.

Donc $\sum_{k \in \mathbb{N}_n} \frac{1}{k^s} = S_n(s)$.

D'après **Q5** la famille $\left(\frac{1}{k^s} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, de plus $\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{N}_n = \mathbb{N}^*$, mais la famille $(\mathbb{N}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante (non disjointe).

Posons $A_1 = \mathbb{N}_1$ et $A_n = \mathbb{N}_n \setminus \mathbb{N}_{n-1}$ si $n \geq 2$. On a $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \mathbb{N}^*$, qui est une réunion disjointe. Le théorème de sommation par paquets donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k \in A_n} \frac{1}{k^s} \right) = S_1(s) + \sum_{n=2}^{+\infty} (S_n(s) - S_{n-1}(s))$$

Pour $m \geq 2$

$$\sum_{n=2}^m (S_n(s) - S_{n-1}(s)) = S_m(s) - S_1(s)$$

donc la suite $(S_m(s))_{m \geq 2}$ converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (S_n(s) - S_{n-1}(s)) = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m(s) - S_1(s)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(s)$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(s) = \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \zeta(s)} .$$

On note $x = \operatorname{Re}(s) > 1$.

Q.8 La suite $\left(\frac{1}{p_i^x}\right)_{i \geq 1}$ est une sous-suite de $\left(\frac{1}{k^x}\right)_{k \geq 1}$, donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^x} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \zeta(x)$$

La série est à termes positifs $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$ et de sommes partielles majorées, donc elle converge.

Autre méthode : Par **Q7** on a la convergence de $(S_n(x))_{n \geq 1}$ vers $\zeta(x)$ et

$$\ln(S_n(x)) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{1 - p_i^{-x}}\right)$$

donc la série $\sum_{i \geq 1} \ln\left(\frac{1}{1 - p_i^{-x}}\right)$ converge, comme $\ln \frac{1}{1 - p_i^{-x}} \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} p_i^{-x}$ alors la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$ converge .

Q.9 Soit $a_n = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^x}{p_i^x + 1}$.

On a

$$\ln(a_n) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{p_i^x}{p_i^x + 1}\right) = - \sum_{i=1}^n \ln(1 + p_i^{-x})$$

Puisque $\ln(1 + p_i^{-x}) \underset{i \rightarrow +\infty}{\sim} p_i^{-x}$ et $x > 1$, la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{p_i^x}$ converge, donc $\sum_{i \geq 1} \ln(1 + p_i^{-x})$ converge vers une limite

$L \in [0, +\infty[$. Ainsi $\ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -L$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = e^{-L} > 0$.

Q.10 Par l'inégalité triangulaire $|1 - p_i^{-s}| \leq 1 + |p_i^{-s}| = 1 + p_i^{-x}$, donc

$$|S_n(s)| = \prod_{i=1}^n \frac{1}{|1 - p_i^{-s}|} \geq \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + p_i^{-x}} = \prod_{i=1}^n \frac{p_i^x}{p_i^x + 1} = a_n.$$

On a $S_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(s)$ par **Q7** et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 0$ par **Q9** .

En passant à la limite :

$$|\zeta(s)| \geq \ell > 0,$$

donc $\zeta(s) \neq 0$.

III – Un calcul d'intégrale

Q.11 Soit s tel que $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

On a $|t^{2(s-1)}| = \frac{1}{t^{2(1-\operatorname{Re}(s))}}$ et $2(1 - \operatorname{Re}(s)) < 1$ donc la fonction $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est intégrable sur $]0, 1]$, et

$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt = \int_0^1 t^{2\operatorname{Re}(s)-2} dt = \left[\frac{t^{2\operatorname{Re}(s)-1}}{2\operatorname{Re}(s)-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2\operatorname{Re}(s)-1}.$$

IV – Une étude géométrique

Soit $d \in]0, 1[$ et $\Delta_d = \left\{ M(s) \mid d^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1 \right\}$

Q.12 Posons $s = x + iy$. On a

$$d^2 |s|^2 - (2\operatorname{Re}(s) - 1) = d^2 (x^2 + y^2) - 2x + 1 = d^2 \left(\left(x - \frac{1}{d^2} \right)^2 + y^2 - \frac{1-d^2}{d^4} \right)$$

Par suite

$$M(s) \in \Delta_d \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{d^2} \right)^2 + y^2 - \frac{1-d^2}{d^4} \geq 0 \Leftrightarrow \left| s - \frac{1}{d^2} \right| \geq \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$$

Donc Δ_d est le complémentaire du disque ouvert $\mathcal{D}_d$ de centre $O_d = \left(\frac{1}{d^2}, 0 \right)$ et de rayon $R_d = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$.

Q.13 On a pour $d \in]0, 1[$

$$g(d) = \frac{1 - \sqrt{1-d^2}}{d^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{1-d^2}}$$

g est continue et croissante sur $]0, 1[$ donc

$$g(]0, 1[) = \left] \lim_{d \rightarrow 0^+} g(d), \lim_{d \rightarrow 1^-} g(d) \right[= \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

Ainsi $\boxed{g(]0, 1[) = \left] \frac{1}{2}, 1 \right[}$.

Q.14 On a : si $s \in \bigcap_{d \in]0, 1[} \Delta_d$ alors $d^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1$, pour tout $d \in]0, 1[$.

En faisant tendre d vers 0^+ , on obtient $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$.

Réciproquement, si $\operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2}$ et $d \in]0, 1[$, alors $2\operatorname{Re}(s) - 1 \leq 0 \leq d^2 |s|^2$. Donc $s \in \Delta_d$ pour tout $d \in]0, 1[$.

Ainsi $\boxed{\bigcap_{d \in]0, 1[} \Delta_d = \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \leq \frac{1}{2} \right\}}$.

Partie B – Étude analytique

I – Transformée de Mellin des fonctions f_k

Soit $k \geq 2$, $f_k(t) = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{t} \right] - \left[\frac{1}{kt} \right]$.

Q.15 Pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ on a $f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{i}{k} - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor = \left\{ \frac{i}{k} \right\}$: la partie fractionnaire de $\frac{i}{k}$.

Ainsi
$$f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \begin{cases} \frac{i}{k} & \text{si } 1 \leq i \leq k-1, \\ 0 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Q.16 Soit $t \in]0, 1]$. Posons $m = \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière on a :

$$m \leq \frac{1}{kt} < m+1 \text{ et } km \leq \frac{1}{t} < k(m+1).$$

Donc

$$km \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq km + k - 1 \text{ et } m \leq \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq m + \frac{k-1}{k}$$

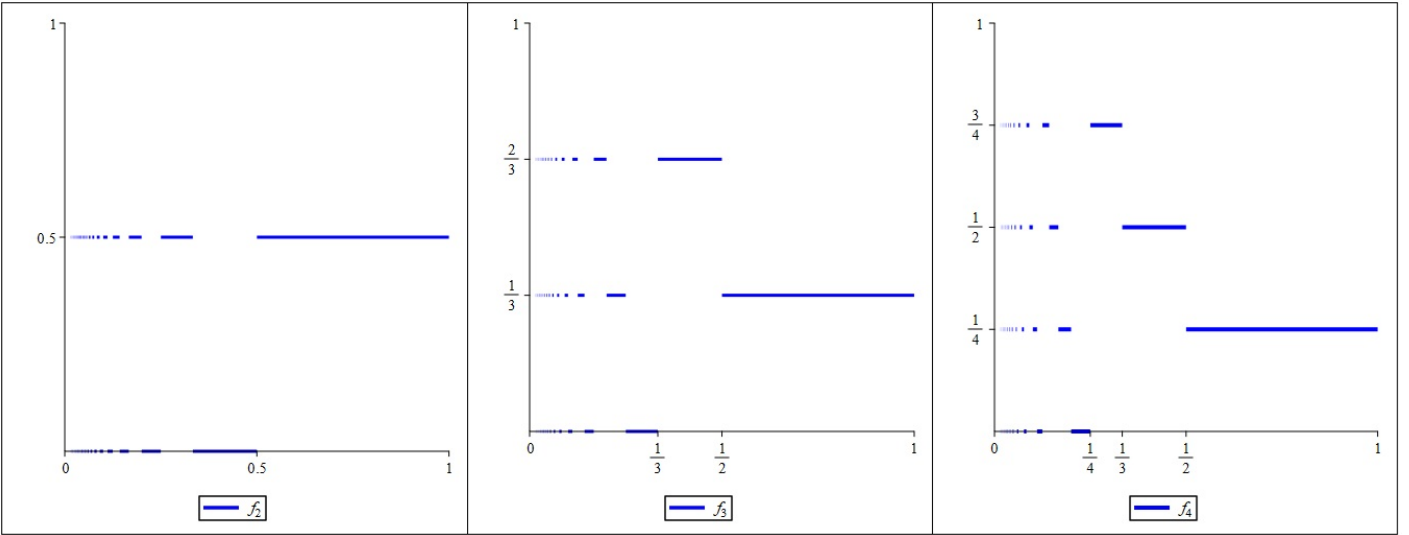
Comme $f_k(t) = \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - m$, alors $0 \leq f_k(t) \leq \frac{k-1}{k}$, pour tout $t \in]0, 1]$.

Q.17 Soit $t \in]0, 1]$. On a $f_k(t) = \frac{1}{k} \left(\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - k \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \right) = \frac{r_k(t)}{k}$ avec $r_k(t) \in \mathbb{Z}$.

D'après **Q.16**, f_k prend ses valeurs dans $\left[0, \frac{k-1}{k}\right]$, donc $r_k(t) \in [0, k-1]$. Par suite $f_k(]0, 1]) \subset \left\{ \frac{j}{k} \mid j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \right\}$.

D'après **Q.15**, les valeurs $0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}$ sont toutes atteintes, respectivement, en $t = \frac{1}{k}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k-1}$.

Donc $f_k(]0, 1]) = \left\{ \frac{j}{k} \mid j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \right\}$.



Q.18 • La fonction $\varphi : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ est en escalier sur $]0, 1]$, elle est constante sur $\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, φ est donc continue par morceaux sur $]0, 1]$ (car elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0, 1]$). Comme $f_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x) - \varphi(kx)$ pour $x \in]0, 1]$, alors f_k est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Plus précisément : si $j = qk + r$ avec $r \in [0, k[$ et $t \in \left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$ alors $f_k(t) = \frac{j}{k} - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor$. Comme $\frac{1}{kt} \in \left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k} \right[$ alors $\frac{1}{kt} - q \in \left[\frac{r}{k}, \frac{r+1}{k} \right[\subset [0, 1[$, par suite $\left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor = q = \left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor$, donc $f_k(t) = \frac{j}{k} - \left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor$.

Ainsi $\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$, $f_k(t) = \frac{j}{k} - \left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor = \left\{ \frac{j}{k} \right\}$, f_k est en escalier sur $]0, 1]$ et $\left(\frac{1}{j} \right)_{j \geq 1}$ est une partition adaptée.

- D'après **Q16**, $0 \leq f_k(t) \leq \frac{k-1}{k}$, pour tout $t \in]0, 1]$, la fonction $t \mapsto \frac{k-1}{k}$ est intégrable sur $]0, 1]$, par comparaison f_k est intégrable sur $]0, 1]$.

Q.19 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$.

On a $0 \leq \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor \leq \frac{1}{kt}$, donc

$$0 \leq \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} \leq \frac{t^{s-2}}{k}.$$

Or $s-2 > -1$ donc l'intégrale $\int_0^1 t^{s-2} dt$ converge, par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt$ converge.

Q.20 Soit $j \in \mathbb{N}^*$, sur $\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$, on a $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = j$.

Par la relation de Chasles :

$$F(s) = \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1} dt = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{1/(j+1)}^{1/j} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1} dt = \sum_{j=1}^{+\infty} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1} dt.$$

pour $j \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1} dt = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right)$$

Donc

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right).$$

Ecrivons

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{s-1}} - \frac{1}{(j+1)^{s-1}} + \frac{1}{(j+1)^s} \right)$$

On a

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j^{s-1}} - \frac{1}{(j+1)^{s-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j^{s-1}} - \frac{1}{(j+1)^{s-1}} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^{s-1}} = 1$$

donc

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)^s} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Ainsi $\boxed{F(s) = \frac{1}{s} \zeta(s)}$.

Q.21 Soit $k \geq 2$ et $s > 1$.

f_k est la somme de deux fonctions intégrables, donc

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \underbrace{\frac{1}{k} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1} dt}_{=F(s)} - \underbrace{\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} dt}_{=I}.$$

On calcule I par le changement de variable $u = kt$:

$$I = \frac{1}{k^s} \int_0^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du = \frac{1}{k^s} \left(\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du + \int_1^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du \right)$$

or $\left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor = 0$ pour $u > 1$, donc

$$I = \frac{1}{k^s} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1} du = \frac{F(s)}{k^s}$$

Ainsi $\boxed{\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = F(s) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) = \frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right)}$ pour tout $s > 1$.

II – Prolongement de la fonction ζ

Soit $s > 0$, $k \geq 1$ et $h(t) = \frac{1}{t^s}$, pour $t \in]0, +\infty[$.

Q.22 On a pour $t \in]0, +\infty[$ $|h'(t)| = st^{-s-1}$.

Cette fonction est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\max_{t \in [k, k+1]} |h'(t)| = \frac{s}{k^{s+1}}$.

Q.23 • Pour $t \in [k, k+1]$, $t^s \geq k^s$, donc $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \geq 0$.

• Le théorème des accroissements finis donne

$$\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} = (k-t) h'(c_k) \text{ avec } c_k \in [k, k+1]$$

Par **Q.22** on a :

$$0 \leq \frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \leq \frac{s}{k^{s+1}} (t-k) \leq \frac{s}{k^{s+1}}.$$

En intégrant sur $[k, k+1]$:

$$0 \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt \leq \frac{s}{k^{s+1}}.$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{s}{k^{s+1}}$ converge car $s+1 > 1$. Donc $\sum_{k \geq 1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$ converge, de somme $G(s)$, qui vérifie

$$0 \leq G(s) \leq s \zeta(s+1).$$

Q.24 • Soit $s > 1$. On a

$$G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} = \zeta(s) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} t^{-s} dt = \frac{1}{s-1}$, alors $G(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$.

• Par **Q.23** $0 \leq G(s) \leq s \zeta(s+1)$ pour tout $s > 0$, la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$, donc $s \zeta(s+1) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \zeta(2)$, par suite $G(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} O(1)$.

Ainsi $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \frac{1}{s-1} + O(1)$.

III – Intégrale des fonctions f_k

Q.25 On applique le théorème de convergence dominée.

Pour tout $t \in]0, 1]$ on a $f_k(t) t^{s-1} \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} f_k(t)$.

Si $s \in [1, 2]$, on a par **Q.16** $|f_k(t) t^{s-1}| \leq \frac{k-1}{k}$, c'est une condition de domination valable sur $]0, 1]$.

Le théorème de convergence dominée, version continue, donne : $\lim_{s \rightarrow 1^+} \int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \int_0^1 f_k(t) dt$.

Q.26 Soit $k \geq 2$. D'après **Q21**, on a pour $s > 1$:

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right).$$

Par **Q25**,

$$\frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \int_0^1 f_k(t) dt.$$

La question **Q24** donne

$$\frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right).$$

Puisque

$$\frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) = \frac{1}{k(s-1)} \left(1 - e^{-(s-1) \ln k} \right) \underset{s \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{\ln k}{k}$$

alors

$$\frac{\zeta(s)}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} \frac{\ln k}{k}$$

Par unicité de la limite, on a $\boxed{\int_0^1 f_k(t) dt = \frac{\ln(k)}{k}}.$

Partie C – Étude algébrique et géométrique

On note $E = \mathcal{C}_m([0, 1], \mathbb{R})$ et $L^2 = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)^2 dt \text{ converge} \right\}.$

I – Une forme bilinéaire symétrique positive

Q.27 a) Vraie : Si $|f| \leq M$, alors $f^2 \leq M^2$ et $t \mapsto M^2$ intégrable sur $]0, 1]$.

b) Fausse : $E \neq L^2$. Contre-exemple : $f(t) = t^{-1/2}$, $f \in E \setminus L^2$.

c) Fausse : Le même contre-exemple : $f(t) = t^{-1/2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ mais $f \notin L^2$.

Q.28 • Soit $f, g \in L^2$. L'inégalité $|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2} (f(t)^2 + g(t)^2)$ donne la convergence de $\int_0^1 |f(t)g(t)| dt$, donc fg est intégrable sur $]0, 1]$.

• $L^2 \neq \emptyset$ car il contient la fonction nulle.

Soient $f, g \in L^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g \in E$.

De plus, $(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2$, chaque terme étant intégrable, donc $(\lambda f + \mu g)^2$ est intégrable sur $]0, 1]$ et $\lambda f + \mu g \in L^2$. Ainsi L^2 est un sous-espace vectoriel de E .

Q.29 • Bilinearité et symétrie : Par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit.

• Positivité : $\langle f \mid f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$.

• Non définie : La fonction $f(t) = \mathbb{1}_{\{1/2\}}(t)$ (valant 1 en $t = \frac{1}{2}$ et 0 ailleurs) est un contre-exemple.

II – Un espace préhilbertien réel

Soit $n \geq 2$ et $(\lambda_k)_{2 \leq k \leq n}$ une famille de réels telle que :

$$\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k = 0 \quad \text{sur }]0, 1].$$

Q.30 Soit $k \geq 2$ et $t \in]\frac{1}{2}, 1]$. On a $\lfloor \frac{1}{t} \rfloor = 1$ et $\frac{1}{kt} \in]0, 1[$, donc $\lfloor \frac{1}{kt} \rfloor = 0$.

Ainsi $f_k(t) = \frac{1}{k}$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$.

Pour $t \in]\frac{1}{2}, 1]$, la relation $\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) = 0$ donne $\boxed{\sum_{k=2}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0}$.

Q.31 Soit $\ell \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$. On choisit $t = \frac{1}{\ell + \varepsilon}$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$.

On a pour $t \in]\frac{1}{\ell+1}, \frac{1}{\ell}]$, $f_k(t) = \frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor$ (**Q18**). Donc si $k \geq \ell+1$: $f_k(t) = \frac{\ell}{k}$ et si $k = \ell$: $f_k(t) = 0$.

La relation $\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) = 0$ donne $\boxed{\sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) = 0}$.

Q.32 • Pour $\ell = 2$, la question **Q31** donne : $\sum_{k=3}^n \lambda_k \frac{2}{k} = 0$ (la deuxième somme est vide), soit $\sum_{k=3}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

De la question **Q30** on a : $\frac{\lambda_2}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0$.

Donc $\lambda_2 = 0$.

• Soit $\ell \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, supposons $\lambda_2 = \dots = \lambda_{\ell-1} = 0$.

Les questions **Q30** et **Q31** donnent :

$$\sum_{k=\ell}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=\ell+1}^n \frac{\lambda_k}{k} = 0.$$

donc $\lambda_\ell = 0$.

Par récurrence on a $\lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, de la question **Q30** on tire $\lambda_n = 0$. Ainsi $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

• On a montré que toute sous famille finie de $(f_k)_{k \geq 2}$ est libre, donc la famille $(f_k)_{k \geq 2}$ est libre dans E .

Q.33 On a $\mathbf{1} \in L^2$ et pour tout $k \geq 2$, f_k est bornée sur $]0, 1]$ donc $f_k \in L^2$, par suite $F = \text{Vect} \{ \mathbf{1}, f_k, k \geq 2 \} \subset L^2$.

D'après **Q29**, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique et positive sur F . Il reste à vérifier qu'elle est définie.

Soit $f \in F$, on a

$$f = a\mathbf{1} + \sum_{k=2}^N \lambda_k f_k \quad \text{avec } N \geq 2$$

Supposons $\langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt = 0$. On a d'après **Q18**

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right], f_k(t) = \frac{j}{k} - \left\lfloor \frac{j}{k} \right\rfloor = \left\{ \frac{j}{k} \right\}$$

donc pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur $\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$ et

$$0 \leq \int_{\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]} f^2(t) dt \leq \int_0^1 f(t)^2 dt = 0$$

donc $\int_{\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]} f^2(t) dt = 0$, par suite f est nulle sur chaque $\left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$. Comme $]0, 1] = \bigcup_{j \geq 0} \left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$, alors f est nulle

sur $]0, 1]$, par suite $a\mathbf{1} + \sum_{k=2}^N \lambda_k f_k = 0$.

Pour $j = N!$ on a $\sum_{k=2}^N \lambda_k f_k(t) = 0$ pour tout $t \in \left] \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j} \right]$, donc $a = 0$. Ainsi $\sum_{k=2}^N \lambda_k f_k = 0$.

D'après **Q32** on a $\lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0$ donc $f = 0$. La forme bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est définie, donc c'est un produit scalaire sur F .

III – Distance d'un vecteur à des sous-espaces

Q.34 • Existence :

Posons $F_n = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$. La famille $(f_2, \dots, f_n)$ est libre donc $\dim(F_n) = n - 1$.

On applique le procédé de Gram-Schmidt au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur F_n :

► Posons $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}$ on a $\langle e_2 | f_2 \rangle = \|f_2\| > 0$.

Soit $n \geq 3$, supposons qu'on a construit $e_2, \dots, e_{n-1}$, tels que $\langle e_p | f_p \rangle > 0$ et

$\text{Vect}(e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_2, \dots, f_k)$, pour tout $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

► Posons

$$g_n = f_n - \sum_{k=2}^{n-1} \langle f_n | e_k \rangle e_k.$$

On a $g_n \neq 0$ car

$$f_n \notin \text{Vect}(f_2, \dots, f_{n-1}) = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}).$$

Soit $e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$. La famille $(e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est orthonormée.

► On a $f_n \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ donc

$$\text{Vect}(f_2, \dots, f_{n-1}, f_n) \subset \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, e_n).$$

De plus

$$e_n \in \{f_n\} + \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}) \subset \text{Vect}(f_2, \dots, f_{n-1}, f_n)$$

donc

$$\text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, e_n) \subset \text{Vect}(f_2, \dots, f_{n-1}, f_n).$$

Ainsi $\text{Vect}(f_2, \dots, f_{n-1}, f_n) = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$.

► On a $e_n \perp \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1})$, donc $\langle e_n | f_n \rangle = \langle e_n | g_n \rangle = \|g_n\| > 0$.

La propriété est donc vraie pour n .

• Unicité :

Si $(e'_2, \dots, e'_n)$ vérifie les mêmes conditions.

► On a $e'_2 \in V_2 = \text{Vect}(f_2)$ et $\|e'_2\| = 1$, donc $e'_2 = \pm \frac{f_2}{\|f_2\|}$.

La condition $\langle e'_2 | f_2 \rangle > 0$ donne $e'_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = e_2$.

Supposons que $e'_p = e_p$, pour tout $p \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

On a

$$\text{Vect}(e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}(e'_2, \dots, e'_n) = F_n$$

et

$$e'_n \in F_n \cap F_{n-1}^\perp = \text{Vect}\{e_n\}$$

donc $e'_n = \varepsilon e_n$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

On a

$$\langle e'_n | f_n \rangle = \varepsilon \langle e_n | f_n \rangle > 0$$

donc $\varepsilon = 1$ et $e'_n = e_n$.

La famille orthonormale construite $(e_2, \dots, e_n)$ est donc unique.

Q.35 Soit $F_n = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$ et $(e_2, \dots, e_n)$ la base orthonormée, construite dans **Q34**. La distance de $\mathbf{1}$ à F_n dans l'espace préhilbertien $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est

$$d_n = \|\mathbf{1} - p_{F_n}(\mathbf{1})\|.$$

avec p_{F_n} la projection orthogonale de F sur F_n . Par l'identité de Pythagore :

$$d_n^2 = \|\mathbf{1}\|^2 - \|p_{F_n}(\mathbf{1})\|^2.$$

Comme $\|\mathbf{1}\|^2 = \int_0^1 1 dt = 1$ et $p_{F_n}(\mathbf{1}) = \sum_{k=2}^n \langle \mathbf{1} | e_k \rangle e_k$, alors $d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^n \langle \mathbf{1} | e_k \rangle^2$.

Q.36 La suite $(d_n)_n$ est décroissante (car $\|p_{F_{n+1}}(\mathbf{1})\|^2 \geq \|p_{F_n}(\mathbf{1})\|^2$) et minorée par 0, donc elle converge.

Partie D – Synthèse

Soit $n \geq 2$, $(\lambda_k)_{2 \leq k \leq n}$ une famille de réels et s un complexe tel que $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

On a $F = \text{Vect}(\mathbf{1}, f_2, \dots, f_n, \dots)$.

Q.37 On pose pour $t \in]0, 1]$, $\varphi(t) = 1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t)$ et $\psi(t) = t^{s-1}$.

On a φ est bornée sur $]0, 1]$, donc φ^2 est intégrable sur $]0, 1]$. Et $|\psi|^2$ intégrable sur $]0, 1]$ car $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$ (**Q11**).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \int_0^1 \varphi(t) \psi(t) dt \right|^2 \leq \int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt \times \int_0^1 |\psi(t)|^2 dt,$$

soit

$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right) t^{s-1} dt \right|^2 \leq \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right)^2 dt \times \int_0^1 |t^{2(s-1)}| dt.$$

Q.38 On suppose $\zeta(s) = 0$, $s \neq 1$, $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

- Examinons les termes de l'inégalité précédente.

D'après **Q21** (admise pour $s \neq 1$)

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) \zeta(s) = 0.$$

donc

$$\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right) t^{s-1} dt \right|^2 = \left| \int_0^1 t^{s-1} dt \right|^2 = \frac{1}{|s|^2}.$$

D'après **Q11**,

$$\int_0^1 \left| t^{2(s-1)} \right| dt = \frac{1}{2\operatorname{Re}(s) - 1}.$$

On a aussi

$$\int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right)^2 dt = \left\| \mathbf{1} - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k \right\|^2$$

Comme $p_{F_n}(\mathbf{1}) \in F_n = \operatorname{Vect}(f_2, \dots, f_n)$, prenons $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que $p_{F_n}(\mathbf{1}) = \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k$, dans ce cas on a :

$$\int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k(t) \right)^2 dt = \|\mathbf{1} - p_{F_n}(\mathbf{1})\|^2 = d_n^2$$

L'inégalité de **Q37** donne

$$\frac{1}{|s|^2} \leq d_n^2 \cdot \frac{1}{2\operatorname{Re}(s) - 1},$$

puisque $|s|^2 (2\operatorname{Re}(s) - 1) > 0$, alors $\boxed{d_n^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1 > 0}$.

- Conclusion.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, alors $d_n^2 |s|^2 \rightarrow 0$ et on a $d_n^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1 > 0$ pour tout n , ce qui est contradictoire.

Donc si $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$, alors la fonction ζ , prolongée selon la partie **B-II**, ne s'annule en aucun nombre complexe s tel que $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$.