

**INTRODUCTION AUX DISTRIBUTIONS :
EXEMPLES, DÉRIVATION ET CONVERGENCE
CORRIGÉ
M. SCHWEITZER - R. CRÉTOIS**

Notations et rappels

- Les lettres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs et celui des nombres réels.
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.
- On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ constitué des fonctions f pour lesquelles il existe $A > 0$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| > A$:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists A > 0, \forall x \notin [-A, A], f(x) = 0\}.$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Le but de ce sujet est d'introduire les distributions. Après avoir construit une fonction test (partie A), on introduit les distributions (partie B). Les propriétés de dérivation et de convergence sont introduites dans les parties C et D. La partie E donne une application classique de la théorie des distributions et utilise les résultats des parties précédentes.

Partie A – Construction d'une fonction test

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

- Q 1.** La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction nulle l'est sur $\mathbb{R}_-^*$ et la fonction exponentielle l'est sur $\mathbb{R}$. Par composition, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Q 2.** On procède par récurrence.

On pose $P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi^{(0)}(x) = P_0 \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

En dérivant de nouveau, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-1/x} \end{aligned}$$

En posant $P_{n+1} = X^2 P_n - X^2 P_n'$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi^{(n+1)}(x) = P_{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$.

On conclut alors par principe de récurrence.

- Q 3.** Déjà, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc φ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées, et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$. D'après la première question et le théorème de la limite de la dérivée, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q 4. Posons $\varphi_b : x \mapsto \varphi(b - x)$ et $\varphi_a : x \mapsto \varphi(x - a)$. Pour tout $x \geq b$, $b - x \leq 0$, donc $\varphi_b(x) = 0$, et pour tout $x \leq a$, $x - a \leq 0$, donc $\varphi_a(x) = 0$, et enfin, pour tout $x \in]a, b[$, $b - x > 0$ et $x - a > 0$ donc $\varphi_b(x) = e^{-1/(b-x)} > 0$ et $\varphi_a(x) = e^{-1/(x-a)} > 0$. On pose alors $\psi_{a,b} : x \mapsto \varphi_a(x)\varphi_b(x)$. D'après la question précédente, $\psi_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus]a, b[$, $\psi_{a,b}(x) = 0$ et pour tout $x \in]a, b[$, $\psi_{a,b}(x) > 0$.

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) du} \psi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Q 5. Comme pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$, $\psi_{-1,1}(x) = 0$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) du = \int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) du$. De plus, comme $\psi_{-1,1}$ est strictement positive sur $] -1, 1[$, son intégrale est strictement positive. Donc ρ_ε est bien définie.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\frac{x}{\varepsilon} \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$, donc $\rho_\varepsilon(x) = 0$. Ainsi, $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Q 6. D'après la question précédente, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho_\varepsilon(x) dx$.

Posons $u = \frac{x}{\varepsilon}$ pour calculer : $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) \varepsilon du = \varepsilon \int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) du$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$.

Q 7. Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) On ne peut pas appliquer tout de suite de théorème de convergence, la fonction intégrée ne convergeant pas en 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On va d'abord faire un changement de variable. Notons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) du$.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $u = \frac{x}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) dx &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho_\varepsilon(x) g(x) dx \\ &= \frac{1}{I} \int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) g(\varepsilon u) du \end{aligned}$$

Posons $f : (\varepsilon, u) \mapsto \psi_{-1,1}(u) g(\varepsilon u)$ définie sur $[-1, 1]^2$.

— $\forall \varepsilon \in [-1, 1]$, $u \mapsto f(\varepsilon, u)$ est continue sur $[-1, 1]$;

— $\forall u \in [-1, 1]$, $\varepsilon \mapsto f(\varepsilon, u)$ est continue sur $[-1, 1]$;

— pour tout $(\varepsilon, u) \in [-1, 1]^2$, $\varepsilon u \in [-1, 1]$, donc $|f(\varepsilon, u)| \leq \|\psi_{-1,1}\|_{\infty, [-1, 1]} \|g\|_{\infty, [-1, 1]}$ et la fonction constante $u \mapsto \|\psi_{-1,1}\|_{\infty, [-1, 1]} \|g\|_{\infty, [-1, 1]}$ est intégrable sur $[-1, 1]$.

La fonction $\varepsilon \mapsto \int_{-1}^1 f(\varepsilon, u) du$ est donc continue sur $[-1, 1]$. En particulier, en 0 : $\int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) g(\varepsilon u) du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \psi_{-1,1}(u) g(0) du = I g(0)$.

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(0)$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On applique la question précédente à la fonction $h : x \mapsto g(x + a)$ qui est bien continue sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x + a) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(a)$.

On pose alors $t = x + a$ et on obtient bien $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(t - a) g(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g(a)$.

Partie B – Distribution sur $\mathbb{R}$

Pour tout segment K inclus dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}(K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulles en dehors de K :

$$\mathcal{D}(K) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \forall x \notin K, f(x) = 0\}.$$

On appelle distribution sur $\mathbb{R}$ toute forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout segment $K \subset \mathbb{R}$, il existe un réel $C_K > 0$ et un entier $N_K \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \quad |T(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in [0, N_K]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty.$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

Remarque préliminaire : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et A tel que $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [-A, A]$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fonction $\varphi^{(i)}$ est nulle sur $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$ et continue sur $[-A, A]$ donc bornée par le théorème des bornes atteintes, et ainsi $\varphi^{(i)}$ est bornée et $\|\varphi^{(i)}\|_\infty$ est bien défini.

Q 8. L'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un espace-vectoriel, montrons que $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en est un sous-espace vectoriel.

La forme nulle appartient bien à $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (en choisissant par exemple, pour tout segment K , $C_K = 1$ et $N_K = 0$).

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit K un segment, il existe des réels $C_{K,1}$ et $C_{K,2}$ strictement positifs et des entiers $N_{K,1}$ et $N_{K,2}$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \quad |T_1(\varphi)| \leq C_{K,1} \max_{i \in [0, N_{K,1}]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty \quad \text{et} \quad |T_2(\varphi)| \leq C_{K,2} \max_{i \in [0, N_{K,2}]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

Notons $N = \max(N_{K,1}, N_{K,2})$, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \quad |(\lambda T_1 + \mu T_2)(\varphi)| \leq |\lambda| |T_1(\varphi)| + |\mu| |T_2(\varphi)| \leq (|\lambda| C_{K,1} + |\mu| C_{K,2}) \max_{i \in [0, N]} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

et ainsi $\lambda T_1 + \mu T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Finalement $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Q 9. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit l'application $\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f \mapsto f(a)$$

Cette application est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|_\infty$$

donc la condition de distribution est vérifiée avec, pour tout segment K , $N_K = 0$ et $C_K = 1$. Ainsi δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Q 10. Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit l'application

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et A tel que $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [-A, A]$, alors la fonction $f \varphi$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-A, A]$ donc son intégrale est convergente et $T_f(\varphi)$ est bien définie.

Ainsi l'application T_f est bien définie, et est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ car pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $T_f(\lambda \varphi + \mu \psi) = \lambda T_f(\varphi) + \mu T_f(\psi)$ par linéarité de l'intégrale. Soit $K = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ on a

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt \right| = \left| \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)| dt \right) \|\varphi\|_\infty$$

et donc la condition est vérifiée avec $C_K = \int_a^b |f(t)| dt$ et $N_k = 0$. Ainsi, T_f est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Q 11. Soient f_1 et f_2 sont deux fonctions continues telles que $T_{f_1} = T_{f_2}$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$T_{f_1}(\varphi) = T_{f_2}(\varphi), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\varphi(t) dt.$$

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et choisissons en particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi : x \mapsto \rho_\varepsilon(x - a)$, où ρ_ε a été défini dans la partie A. On obtient donc que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(t - a)f_1(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(t - a)f_2(t) dt.$$

En faisant tendre ε vers 0^+ , on a d'après **Q 7.** : $f_1(a) = f_2(a)$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a bien montré que $f_1 = f_2$.

Q 12. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit ψ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, on a par changement de variable $u = tx$:

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x \varphi'(u) du = \frac{1}{x} \int_0^1 \varphi'(tx) x dt = \int_0^1 \varphi'(tx) dt$$

et si $x = 0$, cette égalité est aussi vérifiée car $\int_0^1 \varphi'(0) dt = \varphi'(0) = \psi(0)$. Ainsi

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre en posant

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \varphi'(tx) \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = t^k \varphi^{(k+1)}(tx)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)$ est continue et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$, et on a

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq t^k \|\varphi^{(k+1)}\|_\infty$$

ce qui assure la condition de domination pour la dérivée k -ième.

Ainsi, par théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q 13. (a) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et A tel que $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [-A, A]$, alors pour tout $\varepsilon \in]0, A[$ on a

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\
&= \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\varphi(x)}{x} dx \\
&= \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\varphi(0)}{x} dx \\
&= \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + [\varphi(0) \ln(-x)]_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A \psi(x) dx + [\varphi(0) \ln(x)]_{\varepsilon}^A \\
&= \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^A \psi(x) dx + \varphi(0) \ln \frac{\varepsilon}{A} + \varphi(0) \ln \frac{A}{\varepsilon} \\
&= \int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x) dx + \int_{\varepsilon}^A \psi(x) dx
\end{aligned}$$

et puisque ψ est continue sur $\mathbb{R}$, on peut faire tendre ε vers 0^+ et on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \int_{-A}^A \psi(x) dx.$$

On note $V(\varphi)$ cette limite et on dispose ainsi d'une application V de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

(b) On remarque tout d'abord que l'application V est bien linéaire par linéarité de l'intégrale.

Soit K un segment de $\mathbb{R}$ et A tel que $K \subset [-A, A]$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $\varphi(x) = 0$ pour $x \notin [-A, A]$ donc d'après le calcul précédent on a $V(\varphi) = \int_{-A}^A \psi(x) dx$.

D'après **Q 12.** on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\psi(x)| = \left| \int_0^1 \varphi'(tx) dt \right| \leq \|\varphi'\|_{\infty}$ et donc

$$|V(\varphi)| \leq 2A \|\varphi'\|_{\infty} \leq 2A \max(\|\varphi\|_{\infty}, \|\varphi'\|_{\infty}).$$

Ainsi la condition de distribution est vérifiée en choisant $N_K = 1$ et $C_K = 2A$ (qui ne dépend que de K), donc V est une distribution sur $\mathbb{R}$.

Partie C – Dérivation d'une distribution

Pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit la forme linéaire T' sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad T'(\varphi) = -T(\varphi').$$

Q 14. T' est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par linéarité de T et de la dérivation. Puis, prenons K un segment de $\mathbb{R}$. Comme T est une distribution, il existe $C_K > 0$ et $N_K \in \mathbb{N}$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(K)$, $|T(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in [0, N_K]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}$.

En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $|T(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in [0, N_K]} \|\varphi^{(i+1)}\|_{\infty}$, d'où $|T'(\varphi)| \leq C_K \max_{i \in [0, N_K+1]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}$. Donc $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Q 15. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par définition, $T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt$.

On réalise une IPP, dont le crochet converge car φ est nulle en dehors d'un segment :

$$T'_f(\varphi) = -[f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t) dt = T_{f'}(\varphi).$$

Donc $T'_f = T_{f'}$.

Q 16. Soit f la fonction valeur absolue : $f(x) = |x|$ pour tout réel x .

- (a) — pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$, donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$
 — pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, f n'est pas dérivable en 0.

- (b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par intégrations par parties (dont les crochets convergent de nouveau) :

$$\begin{aligned} T'_f(\varphi) &= -T_f(\varphi') \\ &= \int_{-\infty}^0 t\varphi'(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi'(t) dt \\ &= [t\varphi(t)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt - [t\varphi(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(t)f(t) dt \end{aligned}$$

où $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. La fonction C est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $T'_f = T_C$.

Q 17. $H_{]-\infty, 0]}$ et $H_{]0, +\infty[}$ sont continues (elles sont constantes, et prolongeables par continuité en 0). Donc H est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} T'_H(\varphi) &= -T_H(\varphi') \\ &= - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt \\ &= -[\varphi(t)]_0^{+\infty} \\ &= \varphi(0) = \delta_0(\varphi) \end{aligned}$$

Donc $T'_H = \delta_0$.

Q 18. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$.

- (a) Par définition, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T'(\varphi) = -T(\varphi')$, donc $T(\varphi') = 0$
- (b) Prenons $A > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour $x \notin [-A, A]$ et soit $\psi : x \mapsto \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_{-A}^x \varphi(t) dt$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\psi' = \varphi$. Donc ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, pour $x < -A$, $\psi(x) = 0$ et pour $x > A$, $\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 0$. Donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
 D'après la question précédente, $T(\psi') = 0$. Donc $T(\varphi) = 0$.
- (c) D'après les questions **Q 5.** et **Q 6.**, pour tout ε , $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(t) dt = 1$. Donc ρ_ε convient.
- (d) Posons $\psi = \varphi - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \right) \varphi_0$. Déjà, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Par linéarité de l'intégrale, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$.

Ainsi, $T(\psi) = 0$. Donc

$$T(\varphi) = T\left(\psi + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt\right) \varphi_0\right) = T(\varphi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$$

(e) Posons h la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à $T(\varphi_0)$.

Par définition, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T_h(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t) dt = T(\varphi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt$.

Donc $T_h = T$.

Q 19. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $T'_f = 0$. D'après la question précédente, il existe h une fonction constante sur $\mathbb{R}$ telle que $T_h = T_f$. D'après la question **Q 11.**, $f = h$. Donc f est une fonction constante.

Réciproquement, soit f une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Alors f est bien continue et même de classe $\mathcal{C}^1$, donc d'après la question **Q 15.**, $T'_f = T'_0 = 0$.

Ainsi, les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = 0$ sont les fonctions constantes.

Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la distribution dérivée seconde de T est par définition la distribution $T'' = (T')'$.

Si $T = T_f$, on note $(T_f)'' = T''_f$.

Q 20. Soit g une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$, donc $T''_g = T_{g''} = 0$.

Réciproquement, soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $T''_f = 0$. D'après la question **Q 18.**, il existe une fonction h constante sur $\mathbb{R}$ telle que $T'_f = T'_h$. Posons G une primitive de h sur $\mathbb{R}$. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $T'_G = T_h = T'_f$. On remarque que $T'_{f-G} = T'_f - T'_G = 0$, donc il existe une fonction constante k sur $\mathbb{R}$ telle que $T_{f-G} = T_k$. Comme $f - G$ et k sont continues sur $\mathbb{R}$, $f - G = k$ et $f = G + k$ est une fonction affine. Ainsi, les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T''_f = 0$ sont les fonctions affines.

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $T'_f = T'_g$.

Q 21. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $G_x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$.

Q 22. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} (T_f - T_g)'(\varphi) &= -(T_f - T_g)(\varphi') \\ &= T_g(\varphi') - T_f(\varphi') \\ &= -T'_G(\varphi) + T'_f(\varphi) \\ &= T_g(\varphi) - T'_f(\varphi) \end{aligned}$$

d'après la question **Q 15.** (G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

Donc $(T_f - T_g)' = 0$.

Q 23. On remarque que $T_f - T_g = T_{f-G}$. La fonction $f - G$ étant continue sur $\mathbb{R}$ et $T'_{f-G} = 0$, d'après la question **Q 19.**, elle est constante. Autrement dit, il existe une constante h telle que $f = G + h$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f' = G' = g$.

Partie D – Suite de distributions

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions. On dit que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une distribution T si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi).$$

On notera $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} T$.

Q 24. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : T'_n(\varphi) = -T_n(\varphi') \rightarrow -T(\varphi') = T'(\varphi)$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T'_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} T'$.

Q 25. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \rho_{\frac{1}{n+1}}$.

Les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = (-1)^n \frac{\psi_{-1,1}(0)}{1}$ ne converge pas car $\psi_{-1,1}(0) > 0$. Donc (f_n) ne converge pas simplement.

D'après la question **Q 7.**, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t) dt \rightarrow 0$, donc $T_{f_n} \rightarrow 0$.

Q 26. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $A > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [-A, A]$:

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| &= \left| \int_{-A}^{+A} (f_n(t) - f(t))\varphi(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-A}^A |f_n(t) - f(t)| |\varphi(t)| dt \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty} \int_{-A}^A |\varphi(t)| dt \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc $T_{f_n}(\varphi) \rightarrow T_f(\varphi)$ par encadrement, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Pour la question **Q 27.**, on donne les définitions suivantes.

— Pour toute fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

— On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge en norme 2 vers une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si les fonctions $(f_n - f)^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.

Q 27. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $A > 0$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \notin [-A, A]$:

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(\varphi) - T_f(\varphi)| &= \left| \int_{-A}^A (f_n(t) - f(t))\varphi(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-A}^A |f_n(t) - f(t)| |\varphi(t)| dt \\ (\text{Cauchy-Schwarz}) &\leq \left(\int_{-A}^A (f_n(t) - f(t))^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-A}^A \varphi(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \|f_n - f\|_2 \|\varphi\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{f_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_f$.

Partie E – Une application, le théorème d'unicité de Cantor

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels telles que la série $\sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge pour tout réel x et est de somme nulle.

Q 28. On souhaite montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

- (a) En choisissant $x = 0$ on a la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$, ce qui implique que
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

On suppose que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0.

- (b) Soit $x \in [0, 2\pi]$, la convergence de la série implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0.$$

Or pour tout n on a $|a_n \cos(nx)| \leq |a_n|$ donc d'après la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cos(nx) = 0$ par encadrement, et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \sin(nx) = 0$.

- (c) On a supposé la négation de $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui se traduit par le fait que

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \exists n \geq N, \quad |b_n| > \varepsilon \quad (*).$$

On considère ce réel ε et on construit par récurrence l'application $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$: En appliquant (*) avec $N = 1$, on obtient un entier $\varphi(1) \in \mathbb{N}^*$ tel que $|b_{\varphi(1)}| > \varepsilon$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait construit $\varphi(n)$, on applique alors (*) avec $N = \varphi(n) + 1$ en on obtient un entier $\varphi(n+1) \geq N$ tel que $|b_{\varphi(n+1)}| > \varepsilon$. Par principe de récurrence, on a bien construit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $|b_{\varphi(n)}| > \varepsilon$ et donc $|b_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon$, et telle que pour tout n on ait $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$, autrement dit φ est strictement croissante.

- (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|b_{\varphi(n)} \sin(\varphi(n)x)| \geq \varepsilon |\sin(\varphi(n)x)|$ donc par théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\varphi(n)x) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\varphi(n)x) = 0$.

Ainsi la suite de fonctions $x \mapsto \sin^2(\varphi(n)x)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 2\pi]$. De plus chacune de ces fonctions est continue sur $[0, 2\pi]$ et

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, 2\pi], \quad |\sin^2(\varphi(n)x)| \leq 1$$

où $x \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Par théorème de convergence dominée, on obtient ainsi que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) \, dx = 0.$$

- (e) Calculons explicitement cette intégrale pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\varphi(n)x)}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2\varphi(n)x)}{4\varphi(n)} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\text{et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) \, dx = \pi.$$

On a abouti à une absurdité donc l'hypothèse de départ est fausse : la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q 29. On suppose dans cette question que les séries $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ et $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ convergent.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions

$$u_n : x \mapsto (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \cos(kx) \quad \text{et} \quad v_n : x \mapsto (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sin(kx).$$

Par hypothèse sur (a_n) et (b_n) , les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent simplement vers la fonction nulle.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 2\pi]$ on a $|u_n(x)| \leq |a_n| + |b_n|$ qui est le terme général

d'une série convergente, et ainsi la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, et il en va de même pour $\sum_{n \geq 1} v_n$. On a alors par théorème d'intégration des séries de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) \, dx = 0$$

et de même $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(x) \, dx = 0$.

Pour $j \in \mathbb{Z}$, notons $C_j = \int_0^{2\pi} \cos(jx) \, dx$ et $S_j = \int_0^{2\pi} \sin(jx) \, dx$, on a $C_0 = 2\pi$, $S_0 = 0$ et

$$\forall j \in \mathbb{Z}^*, \quad C_j = \left[\frac{\sin(jx)}{j} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{et} \quad S_j = \left[-\frac{\cos(jx)}{j} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u_n(x) \, dx &= a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(kx) \, dx \\ &= a_n \frac{C_{n+k} + C_{n-k}}{2} + b_n \frac{S_{n+k} + S_{n-k}}{2} \\ &= \frac{a_n C_{n-k}}{2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \pi a_n & \text{si } n = k \end{cases} \end{aligned}$$

et finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(x) \, dx = \pi a_k$ et donc $a_k = 0$.

De la même manière, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v_n(x) \, dx &= a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(kx) \, dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(kx) \, dx \\ &= a_n \frac{S_{n+k} + S_{k-n}}{2} + b_n \frac{C_{n-k} - C_{n+k}}{2} \\ &= \frac{b_n C_{n-k}}{2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \pi b_n & \text{si } n = k \end{cases} \end{aligned}$$

et finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} v_n(x) \, dx = \pi b_k$ et donc $b_k = 0$.

Ainsi on a bien justifié que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n = 0$.

On revient au cas général et on ne suppose plus que les séries $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ et $\sum_{n \geq 1} |b_n|$ convergent.

Q 30. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$.

On a montré en **Q 28.** que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, elles sont

en particulier bornées et il existe donc $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^2}$ étant convergente et indépendante de x , on en déduit la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$. On note F sa somme.

Q 31. Puisque chaque fonction f_n est continue et qu'il y a convergence normale, la fonction F est continue par théorème de transfert de continuité. Pour montrer que F est une fonction affine, on va justifier que T_F'' est la distribution nulle et conclure à l'aide de **Q 20**.

Posons, pour tout N , $F_N = \sum_{n=1}^N f_n$. Puisque la convergence normale implique la convergence uniforme, la suite de fonctions continues $(F_N)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction continue F , donc d'après **Q 26**, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_{F_N} \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_F$.

En appliquant deux fois **Q 24**, on en déduit que $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_{F_N}'' \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_F''$. Or pour tout N la fonction F_N est de classe C^2 donc $T_{F_N}'' = T_{F_N}''$ d'après **Q 15**. Ainsi on a justifié que $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_{F_N}'' \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_F''$.

Par ailleurs, pour tout $N \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $F_N''(x) = -\sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ donc la suite de fonctions $(F_N'')_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction nulle.

SI L'ON PARVIENT À JUSTIFIER QUE CETTE CONVERGENCE EST EN NORME 2 on peut alors déduire de **Q 27**, que $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_{F_N}'' \stackrel{\mathcal{D}}{=} T_0 = 0$ et on a alors justifié que $T_F'' = 0$, et donc que F est une fonction affine.

Q 32. En utilisant la même majoration qu'en **Q 30**, avec M un majorant de la suite $(|a_n| + |b_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |F(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n^2}.$$

et ainsi la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$. Puisqu'il s'agit d'une fonction affine, son coefficient directeur est nul, et elle est constante.

Q 33. Puisqu'il y a convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ vers F , on a par théorème d'intégration des séries de fonctions

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} C_n + \frac{b_n}{n^2} S_n \right) = 0$$

d'après les calculs de la question **Q 29**. Or en notant k la valeur constante de F on a $\int_0^{2\pi} F(x) dx = 2\pi k$ donc $k = 0$, et finalement F est la fonction nulle.

Q 34. On a ainsi obtenu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right) = 0$,

où les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{|b_n|}{n^2}$ sont convergentes puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées. On peut donc appliquer **Q 29.** avec ces familles de coefficients, et on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0$, et finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = b_n = 0.$$

— *Fin* —