

Corrigé de l'épreuve banque PT 2026 – Mathématiques A
par François Dayrens

Partie A : quelques matrices.

On considère les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Rappeler la caractérisation des matrices trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique.

Solution. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ une matrice, on note χ_A son polynôme caractéristique. On a

A est trigonalisable si, et seulement si, χ_A est scindé.

2 M_1 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Déterminer si possible une matrice P_1 inversible et une matrice diagonale D_1 telles que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$.
Le calcul de P_1^{-1} n'est pas demandé.

Solution. On calcule le polynôme caractéristique de M_1 :

$$\chi_{M_1}(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -6 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1) - 6 = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4).$$

On voit apparaître deux racines réelles distinctes, donc M_1 possède autant de valeurs propres réelles que sa taille, ainsi

la matrice M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour la diagonaliser, on cherche les espaces propres :

► Pour $E_{-1}(M_1) = \ker(M_1 + I_2)$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a donc $E_{-1}(M_1) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

► Pour $E_4(M_1) = \ker(M_1 - 4I_2)$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} -2x + 6y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a donc $E_4(M_1) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Les deux vecteurs précédemment trouvés formant automatiquement une base de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$, on peut les concaténer pour trouver une matrice inversible $P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à laquelle on associe la matrice diagonale

$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ afin d'obtenir

$$M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}.$$

3 M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Déterminer si possible une matrice P_2 inversible et une matrice diagonale D_2 telles que $M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$.
Le calcul de P_2^{-1} n'est pas demandé.

Solution. On calcule le polynôme caractéristique de M_2 :

$$\chi_{M_2}(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-1) + 2 = x^2 - 4x + 5.$$

Le discriminant de ce polynôme $\Delta = -4$ étant négatif, on trouve deux racines complexes non-réelles

$$\lambda_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2 + i.$$

Donc M_2 possède aucune valeur propre réelle et autant de valeurs propres complexes que sa taille, ainsi

la matrice M_2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais ne l'est pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour la diagonaliser, on cherche les espaces propres :

► Pour $E_{2-i}(M_2) = \ker(M_2 - (2-i)I_2)$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} (1+i)x - 2y = 0 \\ x + (-1+i)y = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow (1+i)L_2 - L_1] \begin{cases} (1+i)x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1+i}{2}x \\ x \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

On a donc $E_{2-i}(M_2) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \right)$.

► Pour $E_{2+i}(M_2)$, il est nécessairement de dimension 1 et comme M_2 est une matrice réelle, on peut prendre la conjugaison de la relation $M_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = (2-i) \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ pour obtenir

$$M_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} = (2-i) \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \in E_{2-i}(M_2)$$

et par conséquent $E_{2-i}(M_2) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \right)$.

Les deux vecteurs précédemment trouvés formant automatiquement une base de $\mathbb{C}^2$, on peut les concaténer pour trouver une matrice inversible $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$ à laquelle on associe la matrice diagonale

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix} \quad \text{afin d'obtenir}$$

$$M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}.$$

4 (a) M_3 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Solution. On calcule le polynôme caractéristique de M_3 :

$$\chi_{M_3}(x) = \begin{vmatrix} x-5 & 4 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-5)(x-1) + 4 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2.$$

Ce polynôme étant scindé sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

M_3 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour la diagonalisabilité, on étudie l'espace propre $E_3(M_3) = \ker(M_3 - 3I_2)$ en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc $E_3(M_1) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 1 alors que la multiplicité de la valeur propre est 2. Ainsi

M_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On note f_3 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice M_3 . Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_3 est $T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution. Il s'agit de trouver deux vecteurs colonnes V_1 et V_2 formant une famille libre et vérifiant $M_3 V_1 = 3V_1$ et $M_3 V_2 = V_1 + 3V_2$. Ainsi V_1 est un vecteur propre de M_3 associé à la valeur propre 3 déjà déterminé précédemment : on choisit $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour V_2 , on résout l'équation matricielle $M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, qui devient sous-forme de système :

$$\begin{cases} 2x & - & 4y & = & 2 \\ x & - & 2y & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 2y + 1 \\ y & \in & \mathbb{R}. \end{cases}$$

On peut choisir $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les vecteurs V_1 et V_2 obtenus sont bien libres, ainsi

$(2; 1)$ et $(1; 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_3 est bien T_3 .

On s'intéresse désormais aux matrices $M(a; b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

5 À quelle condition nécessaire et suffisante les matrices $M(a; b)$ sont-elles inversibles ?

Solution. On utilise la caractérisation de l'inversibilité par le déterminant : $M(a; b)$ est inversible si, et seulement si, son déterminant est non-nul. On calcule donc

$$\det(M(a; b)) = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b.$$

On en déduit donc

$M(a; b)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq b$.

6 Calculer le discriminant $\Delta(a; b)$ du polynôme caractéristique de $M(a; b)$.

Solution. On calcule le polynôme caractéristique

$$\chi_{M(a; b)}(x) = \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -1 & x - 1 \end{vmatrix} = (x - a)(x - 1) - b = x^2 - (a + 1)x + a - b.$$

On trouve ainsi

$$\Delta(a; b) = (a + 1)^2 - 4(a - b) = a^2 - 2a + 4b + 1.$$

7 (a) Justifier que si $\Delta(a; b) = 0$ alors $M(a; b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution. Si $\Delta(a; b) = 0$ alors le polynôme caractéristique de $M(a; b)$ possède une seule racine réelle (double), ainsi $M(a; b)$ détient une unique valeur propre qu'on note λ . On raisonne par l'absurde : si $M(a; b)$ est diagonalisable alors, comme λ est sa seule valeur propre, on aurait l'existence d'une matrice inversible P vérifiant

$$M(a; b) = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{d'où } M(a; b) = P \times \lambda I_2 \times P^{-1} = \lambda P I_2 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_2.$$

Or $M(a; b)$ n'est pas multiple de la matrice identité, c'est donc une contradiction. Ainsi

$M(a; b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Lorsque $\Delta(a; b) \neq 0$, $M(a; b)$ est-elle diagonalisable ? On précisera si c'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et/ou dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solution. Si $\Delta(a; b) \neq 0$ alors le polynôme caractéristique de $M(a; b)$ possède deux valeurs propres distinctes. Si $\Delta(a; b) > 0$ alors ces valeurs propres sont réelles, donc $M(a; b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\Delta(a; b) < 0$ alors ces valeurs propres sont complexes non-réelles, donc $M(a; b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En résumé :

$\Delta(a; b) > 0$: $M(a; b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$
 $\Delta(a; b) < 0$: $M(a; b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8 Représenter sur la feuille de papier millimétré fournie :

- l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ tels que $M(a; b)$ est non-inversible ;
- l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ tels que $M(a; b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
- l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ tels que $M(a; b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
- l'ensemble des points de coordonnées $(a; b)$ tels que $M(a; b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;
- les trois points correspondant aux matrices M_1 , M_2 et M_3 définies au début de cette partie.

Solution. Avec les questions précédentes, la condition de non-inversibilité est $a = b$ représenté en violet sur le dessin ci-dessous. La condition de non-diagonalisabilité (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) est donnée par

$$\Delta(a; b) = 0 \iff a^2 - 2a + 4b + 1 = 0 \iff (a - 1)^2 + 4b = 0 \iff b = -\frac{1}{4}(a - 1)^2.$$

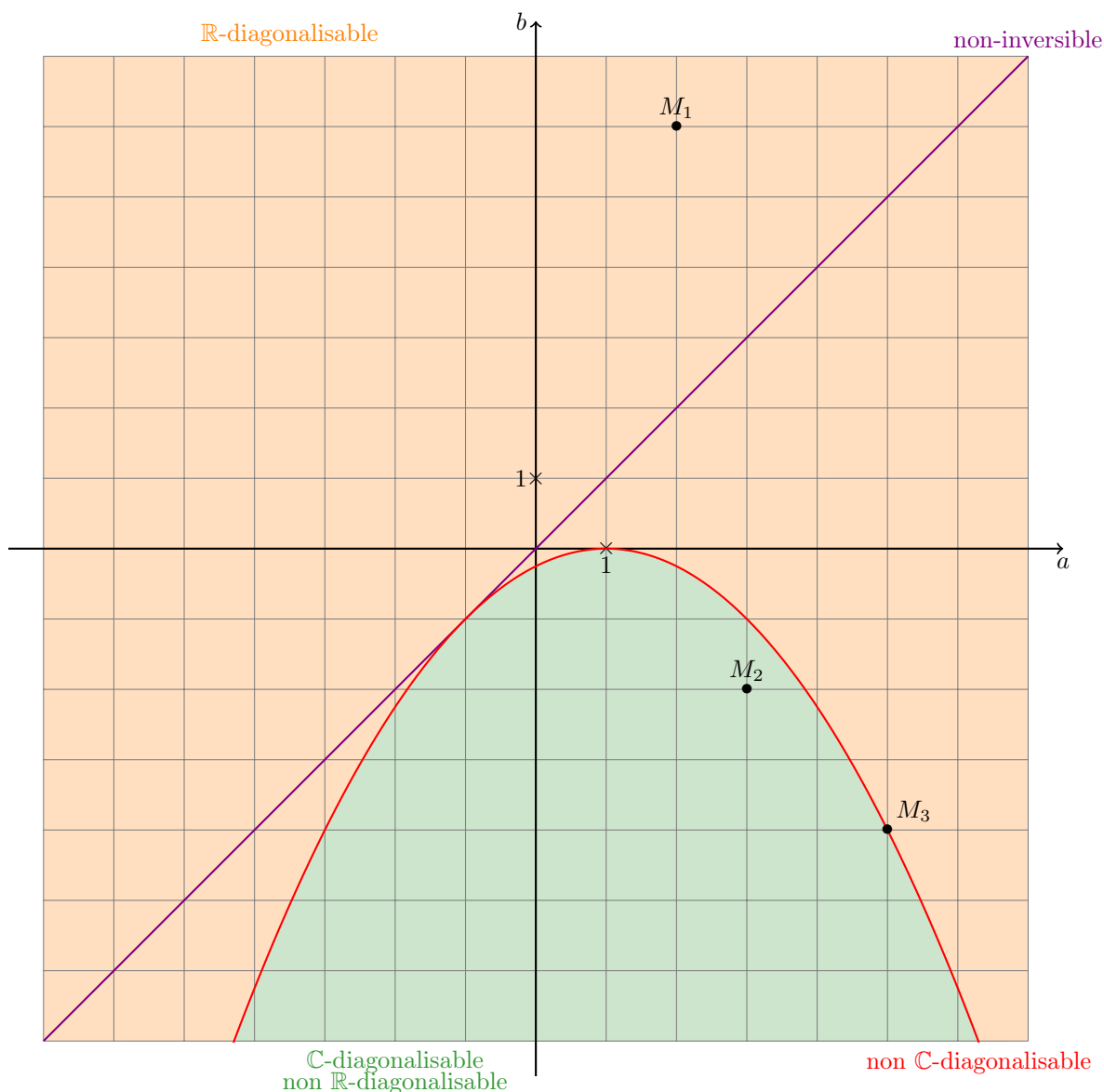
Cette parabole est dessinée en rouge sur le dessin ci-après. La condition de diagonalisabilité (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) est donnée par

$$\Delta(a; b) > 0 \iff b > -\frac{1}{4}(a - 1)^2.$$

Il s'agit du domaine du plan situé au-dessus de la parabole précédente et dessiné en orange sur le dessin ci-après. La condition de « semi-diagonalisabilité » (dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) est donnée par

$$\Delta(a; b) < 0 \iff b < -\frac{1}{4}(a - 1)^2.$$

Il s'agit du domaine du plan situé en-dessous de la parabole précédente et dessiné en vert sur le dessin ci-après.



Partie B : un couple de variables aléatoires.

Dans cette partie, on considère la matrice $C = (c_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;3 \rrbracket} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que le couple de variables aléatoires $(X; Y)$ dont la loi conjointe est donnée par :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3\}$ avec $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$;
- $\forall i \in \{1; 2; 3\}, \forall j \in \{1; 2; 3\}, \mathbb{P}(X = x_i; Y = x_j) = c_{i,j}$.

On note U le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et V le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

On convient de confondre une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec son unique coefficient.

- 1 (a) Justifier soigneusement que le produit CU permet d'obtenir la loi de X puis déterminer cette loi.

Solution. On exprime le produit

$$CU = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\ c_{2,1} + c_{2,2} + c_{2,3} \\ c_{3,1} + c_{3,2} + c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

De plus, pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$ et d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((Y = x_j))_{j \in \llbracket 1;3 \rrbracket}$, on a

$$c_{i,1} + c_{i,2} + c_{i,3} = \mathbb{P}(X = x_i; Y = x_1) + \mathbb{P}(X = x_i; Y = x_2) + \mathbb{P}(X = x_i; Y = x_3) = \mathbb{P}(X = x_i).$$

On trouve donc

$$CU = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_2) \\ \mathbb{P}(X = x_3) \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant avec les valeurs numériques :

$$CU = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ceci permet d'identifier

X	-1	0	1
$\mathbb{P}$	$1/3$	$5/12$	$1/4$

- (b) Vérifier que l'espérance de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est égale à $V^T CU$ puis la calculer.

Solution. On exprime

$$V^T CU = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_2) \\ \mathbb{P}(X = x_3) \end{pmatrix} = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + x_2 \mathbb{P}(X = x_2) + x_3 \mathbb{P}(X = x_3) = \mathbb{E}(X).$$

On a donc bien

$$V^T CU = \mathbb{E}(X).$$

On calcule avec les valeurs numériques :

$$\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{12}.$$

- 2 Donner, sans justification, les produits matriciels qui permettent d'obtenir la loi marginale Y et l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ de Y puis effectuer ses produit.

Solution. On a

$$U^T C = (\mathbb{P}(Y = x_1) \quad \mathbb{P}(Y = x_2) \quad \mathbb{P}(Y = x_3))$$

qui donne numériquement

$$U^T C = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que Y suit une loi uniforme sur $\llbracket -1; 1 \rrbracket$.

Et pour l'espérance

$$U^T C V = \mathbb{E}(Y)$$

qui donne

$$U^T C V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(Y) = 0.$$

- 3 Que représente le produit $V^T C V$ pour le couple $(X; Y)$? Une justification est attendue. Calculer ce produit.

Solution. On exprime le produit

$$\begin{aligned} V^T C V &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 c_{1,1} + x_1 x_2 c_{1,2} + x_1 x_3 c_{1,3} + x_2 x_1 c_{2,1} + x_2^2 c_{2,2} + x_2 x_3 c_{2,3} + x_3 x_1 c_{3,1} + x_3 x_2 c_{3,2} + x_3^2 c_{3,3} \\ &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \\ j \in \llbracket 1; 3 \rrbracket}} x_i x_j \mathbb{P}(X = x_i; Y = x_j) = \mathbb{E}(XY). \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques :

$$V^T C V = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(XY) = V^T C V = -\frac{1}{12}.$$

- 4 Calculer la covariance de X et Y .

Solution. On utilise la formule

$$\text{Cov}(X; Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{12} - \left(-\frac{1}{12}\right) \times 0 = -\frac{1}{12}.$$

Donc

$$\text{Cov}(X; Y) = -\frac{1}{12}.$$

- 5 Les variables aléatoires sont-elles indépendantes? On donnera deux justifications différentes.

Solution. Leur covariance étant non-nulle, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Aussi grâce aux lois déterminées précédemment, on a

$$\mathbb{P}(X = -1; Y = -1) = c_{1,1} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1).$$

Pour ces deux raisons,

$$\text{les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}$$

- 6 Que représente la trace de C pour le couple $(X; Y)$? La calculer.

Solution. On exprime

$$\text{tr}(C) = c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3} = \mathbb{P}(X = x_1; Y = x_1) + \mathbb{P}(X = x_2; Y = x_2) + \mathbb{P}(X = x_3; Y = x_3) = \mathbb{P}(X = Y).$$

La dernière égalité vient du découpage

$$(X = Y) = (X = Y) \cap \left(\bigcup_{i=1}^3 (X = x_i) \right) = \bigcup_{i=1}^3 \left((X = Y) \cap (X = x_i) \right) = \bigcup_{i=1}^3 \left((X = x_i) \cap (Y = y_i) \right)$$

avec une réunion disjointe. On trouve donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \text{tr}(C) = \frac{1}{3}.$$

Partie C : des variables aléatoires dans une matrice.

Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires A et B ainsi que la matrice $M(A; B) = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 On suppose dans cette question que les variables aléatoires A et B sont égales respectivement aux variables aléatoires X et Y définies dans la partie B.

(a) Déterminer la probabilité que $M(A; B)$ soit inversible.

Solution. On a vu précédemment que $M(X; Y)$ est inversible si, et seulement si, $X \neq Y$. Or

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

qui donne

$$\mathbb{P}(\text{« } M(X; Y) \text{ est inversible »}) = \mathbb{P}(X \neq Y) = \frac{2}{3}.$$

(b) Calculer la probabilité que $M(A; B)$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solution. Question ambiguë ? Que demande-t-on ?

- La probabilité que $M(A; B)$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- La probabilité que $M(A; B)$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (mais possiblement dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) et celle que $M(A; B)$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On a vu précédemment que $M(X; Y)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $\Delta(X; Y) = 0$. On exprime

$$\Delta(X; Y) = 0 \iff 4Y = -(X - 1)^2.$$

En détaillant avec les valeurs possibles de X et de Y :

$$\begin{array}{c|c|c|c} X & -1 & 0 & 1 \\ \hline \mathbb{P} & 4/12 & 5/12 & 3/12 \\ \hline -(X-1)^2 & -4 & -1 & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c|c|c} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline \mathbb{P} & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 4Y & -4 & 0 & 4 \end{array}$$

on obtient

$$\mathbb{P}(\Delta(X; Y) = 0) = \mathbb{P}(X = -1; Y = -1) + \mathbb{P}(X = 1; Y = 0) = c_{1,1} + c_{3,2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\text{« } M(X; Y) \text{ est non-diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ »}) = \frac{1}{6}.$$

On a vu précédemment que $M(X; Y)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\Delta(X; Y) > 0$. On exprime le contraire

$$\Delta(X; Y) \leq 0 \iff 4Y \leq -(X - 1)^2.$$

Avec les tableaux ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta(X; Y) \leq 0) &= \mathbb{P}(X = -1; Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0; Y = -1) + \mathbb{P}(X = 1; Y = -1) + \mathbb{P}(X = 1; Y = 0) \\ &= c_{1,1} + c_{2,1} + c_{3,1} + c_{3,2} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\ll M(X; Y) \text{ est non-diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \gg) = \frac{5}{12}.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de cette partie que A et B sont deux variables aléatoires indépendantes.

2 On suppose que A et B sont à valeurs dans une partie H de $\mathbb{N}$. Établir soigneusement que

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k).$$

Solution. On utilise d'abord la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $((A = k))_{k \in H}$:

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}((A = B) \cap (A = k)) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}((A = k) \cap (B = k)).$$

Puis on utilise l'indépendance de A et B pour séparer :

$$\forall k \in H, \quad \mathbb{P}((A = k) \cap (B = k)) = \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k).$$

3 On suppose dans cette question que A suit la loi binomiale de paramètres n et p où n est un entier naturel non-nul et p un réel appartenant à $]0; 1[$, et B suit la loi géométrique de paramètre r où r est un réel appartenant à $]0; 1[$.

(a) Rappeler l'univers-image $A(\Omega)$ de A ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(A = k)$ pour $k \in A(\Omega)$.

Solution. On a

$$A(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(b) Rappeler l'univers-image $B(\Omega)$ de B ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(B = k)$ pour $k \in B(\Omega)$.

Solution. On a

$$B(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B = k) = r(1-r)^{k-1}.$$

(c) Démontrer que la probabilité que $M(A; B)$ ne soit pas inversible est égale à

$$\frac{r}{1-r} ((1-pr)^n - (1-p)^n).$$

Solution. Comme précédemment, il s'agit de trouver la probabilité que $\Delta(A; B) = 0$, c'est-à-dire que $A = B$. En utilisant les questions précédentes, on calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A = B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) \\
&= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} r (1-r)^{k-1} \\
&= \frac{r}{1-r} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-r)^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{r}{1-r} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (p(1-r))^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{r}{1-r} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p - pr)^k (1-p)^{n-k} - (1-p)^n \right) \\
&= \frac{r}{1-r} \left((p - pr + 1 - p)^n - (1-p)^n \right) \\
&= \frac{r}{1-r} ((1 - pr)^n - (1-p)^n).
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\mathbb{P}(\ll M(A; B) \text{ est non-inversible} \gg) = \frac{r}{1-r} ((1 - pr)^n - (1-p)^n).$$

- 4 On suppose dans cette question que A suit la loi de Poisson de paramètre λ et que $B' = -B$ suit la loi de Poisson de paramètre μ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

(a) Rappeler l'univers-image $A(\Omega)$ de A ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(A = k)$ pour $k \in A(\Omega)$.

Solution. On a

$$A(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(A = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

- (b) Démontrer que $A + B'$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. On pourra utiliser les fonctions génératrices.

Solution. La fonction génératrice de la loi de Poisson A est donnée pour tout $t \in [-1; 1]$, par $G_A(t) = e^{\lambda(t-1)}$, et on a une fonction analogue pour B' . Par indépendance de A et de B (et de A et B' , par conséquent), on a : $\forall t \in [-1; 1]$,

$$G_{A+B'}(t) = G_A(t) G_{B'}(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$, et comme la fonction génératrice caractérise sa loi, on obtient que

$$A + B' \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda + \mu.$$

- (c) En déduire la probabilité que $M(A; B)$ soit inversible.

Solution. Comme précédemment, il s'agit de trouver la probabilité que $\Delta(A; B) \neq 0$, c'est-à-dire que $A \neq B$. En passant par le contraire et B' , on a

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A + B' = 0.$$

Comme on connaît la loi de $A + B'$, on a

$$\mathbb{P}(A = B) = \mathbb{P}(A + B' = 0) = \frac{(\lambda + \mu)^0}{0!} e^{-(\lambda + \mu)} = e^{-(\lambda + \mu)}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\ll M(A; B) \text{ est inversible} \gg) = 1 - \mathbb{P}(A = B) = 1 - e^{-(\lambda + \mu)}.$$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de cette partie que A suit la loi de Poisson de paramètre λ et que B suit la loi de Poisson de paramètre μ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

5 Démontrer que la probabilité que $M(A; B)$ soit non-inversible est égale à I où

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

Solution. Comme précédemment, il s'agit de trouver la probabilité que $\Delta(A; B) = 0$, c'est-à-dire que $A = B$, on calcule

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

On a bien

$$\mathbb{P}(\text{« } M(A; B) \text{ est non-inversible »}) = I.$$

L'objectif des questions suivantes est de déterminer une valeur approchée de I .

6 Une première option : on note, pour tout $n \geq 0$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}$.

(a) Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}$.

Solution. Pour tout $n \geq 0$, pour tout $k \geq n+1$, on a $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$. En utilisant cette majoration et en remarquant que la série définissant R_n et les séries suivantes sont constituées de termes positifs, on a

$$\begin{aligned} |R_n| = R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!(n+1)!} e^{-(\lambda+\mu)} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} e^{-(\lambda+\mu)} e^{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall n \geq 0, \quad |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}.$$

(b) Écrire en langage Python une fonction `val_app` de paramètre un réel strictement positif `eps` qui calcule et qui renvoie la valeur d'une somme partielle de I représentant une valeur approchée de I à `eps` > 0 près.

On supposera que les valeurs de λ et de μ sont stockées respectivement dans les variables globales `la` et `mu` et que les fonctions exponentielle et factorielle sont disponibles grâce à la commande suivante.

```
from math import exp, factorial
```

Il n'est pas demandé la documentation des fonctions mais il est possible et même recommandé de commenter les lignes de code.

Solution. Comme R_n est le reste de la série définissant I , c'est lui qui doit être inférieur à `eps` afin que la somme partielle approche la valeur de I à la précision souhaitée. On utilise l'inégalité précédente pour d'abord calculer une valeur de n convenable, puis on calcule (en même temps, pour plus d'efficacité) la somme partielle.

```
def val_app(eps:float) -> float :
    n = 0
    s = exp(-la-mu)                # somme partielle n=0
    r = exp(la*mu-la-mu)           # majoration du reste à n=0
    while r >= eps :
        n += 1
        s += ( (la*mu)**n/factorial(n)**2 ) * exp(-la-mu)
        r = exp(la*mu-la-mu)/factorial(n+1)
    return s
```

(c) Quelle instruction doit-on rajouter pour avoir une valeur approchée de I à 10^{-5} près.

Solution. Il suffit d'appeler la fonction avec la valeur de `eps` :

`val_app( 10**(-5) )`

7 Une deuxième option : soit N un entier naturel non-nul. On simule N fois de façon indépendante les variables aléatoires A et B .

Pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note J_i la variable aléatoire égale à 1 si la matrice $M(A; B)$ est inversible lors de la i -ème simulation, et égale à 0 sinon. On note également $K_N = \sum_{i=1}^N J_i$ et $\overline{K_N} = \frac{1}{N} K_N$.

(a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire J_i pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. On donnera son nom ainsi que son ou ses paramètres.

Solution. Comme les valeurs possibles de J_i sont 0 ou 1, on reconnaît une loi de Bernoulli. Son paramètre vaut la probabilité que J_i vaille 1, c'est-à-dire la probabilité que $M(A; B)$ soit inversible, c'est-à-dire I . Ainsi

pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, J_i suit une loi de Bernoulli de paramètre I .

(b) Quelle est la loi de K_N ? On donnera son nom ainsi que son ou ses paramètres. Une justification est attendue.

Solution. La variable aléatoire K_N est la somme de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre I , ainsi

K_N suit une loi de binomiale de paramètres N et I .

(c) En déduire l'espérance et la variance de $\overline{K_N}$.

Solution. On calcule en utilisant la linéarité de l'espérance, l'homogénéité de la variance et leur formule pour une loi binomiale :

$$\mathbb{E}(\overline{K_N}) = \frac{1}{N} \mathbb{E}(K_N) = \frac{1}{N} \times NI = I \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\overline{K_N}) = \frac{1}{N^2} \mathbb{V}(K_N) = \frac{1}{N^2} \times NI(1-I) = \frac{I(1-I)}{N}.$$

On a donc

$$\mathbb{E}(\overline{K_N}) = I \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\overline{K_N}) = \frac{I(1-I)}{N}.$$

(d) Démontrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

Solution. La variable aléatoire $\overline{K_N}$ possède une variance, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef afin d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\overline{K_N} - \mathbb{E}(\overline{K_N})| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(\overline{K_N})}{\varepsilon^2}.$$

On a $\mathbb{E}(\overline{K_N}) = I$ et $\mathbb{V}(\overline{K_N}) = \frac{I(1-I)}{N}$. De plus, la fonction $x \mapsto x(1-x)$ possède un maximum de $1/4$ car il s'agit d'un polynôme de degré 2 pour qui le graphe dessine une parabole renversée ayant son sommet en $x = 1/2$. Autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\mathbb{V}(\overline{K_N}) = \frac{I(1-I)}{N} \leq \frac{1}{4N}.$$

En rassemblant, on obtient bien

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

(e) En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(I \in [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]\right) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

Solution. On passe à l'événement contraire dans la question précédente :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 1 - \mathbb{P}(|\overline{K_N} - I| < \varepsilon) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

qui devient

$$\mathbb{P}(|\overline{K_N} - I| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

On ré-écrit ensuite l'événement :

$$\begin{aligned} |\overline{K_N} - I| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < \overline{K_N} - I < \varepsilon &\iff \overline{K_N} + \varepsilon > I > \overline{K_N} - \varepsilon \\ &\iff I \in]\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon[. \end{aligned}$$

Et comme $]\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon[\subset [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]$, on arrive à

$$\mathbb{P}(I \in [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]) \geq \mathbb{P}(I \in]\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon[) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

On a bien obtenu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(I \in [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

- (f) Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$, on effectue $N = 100\,000$ simulations. La matrice $M(A; B)$ a été non-inversible à 21 357 reprises.
Quelle information concernant la valeur de I , l'inégalité précédente donne-t-elle si on prend $\varepsilon = 10^{-2}$? puis $\varepsilon = 10^{-3}$?

Solution. Dans ces conditions, avec $\varepsilon = 10^{-2}$, on a

$$\overline{K_N} = \frac{21\,357}{100\,000} = 0,213\,57 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{40} = 97,5\%.$$

Ceci signifie que

$$I \text{ est compris entre } 0,203\,57 \text{ et } 0,233\,57 \text{ avec une probabilité supérieure à } 97,5\%.$$

De même pour $\varepsilon = 10^{-3}$, on a $1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2} = 1 - \frac{10}{4} = -\frac{3}{2}$. Ceci signifie que

$$\text{l'encadrement de } I \text{ par } 0,212\,57 \text{ et } 0,214\,57 \text{ est totalement farfelu}$$

car on n'a aucune idée de la probabilité que cet encadrement soit correct.

Partie D : un deuxième couple de variables aléatoires.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_n\}$. On note $Q = (q_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad q_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j).$$

- 1 On suppose que X et Y sont indépendantes et que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$.
(a) Justifier que le rang de la matrice Q est égal à 1.

Solution. Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

En regardant l'effet de cette relation sur la matrice Q , on peut voir que

$$\text{la } j\text{-ème colonne de } Q \text{ est égale à } \mathbb{P}(Y = y_j) \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}.$$

Chaque colonne de Q est donc colinéaire à la colonne non-nulle

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}, \text{ ce qui signifie}$$

que $\text{im}(Q) \subset \text{vect}(S)$. On a donc $\text{rg}(Q) \leq 1$. De plus, la matrice Q n'est pas nulle car ses coefficients sont positifs et de somme égale à 1 (car il s'agit de probabilités d'une loi conjointe). Donc

$$\text{rg}(Q) = 1.$$

- (b) Que peut-on en déduire concernant les éventuelles valeurs propres (réelles) de Q ainsi que de leur multiplicité ?

Solution. Par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(Q)) = n - 1$, donc 0 est valeur propre de Q de multiplicité $n - 1$ ou n . De plus, comme Q est automatiquement trigonalisable sur $\mathbb{C}$, sa trace est égale à la somme des valeurs propres (complexes et comptées avec multiplicité). En notant λ l'éventuelle dernière valeur propre inconnue, on a

$$\underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n-1 \text{ fois}} + \lambda = \text{tr}(Q) = \sum_{k=1}^n c_{k,k} = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = x_k) \mathbb{P}(Y = y_k).$$

Ceci signifie que $\lambda = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = x_k) \mathbb{P}(Y = y_k)$ est possiblement la dernière valeur propre. Comme

les $\mathbb{P}(X = x_i)$ sont tous non-nuls, c'est-à-dire strictement positifs, et que les $\mathbb{P}(Y = y_i)$ sont positifs dont au moins l'un est non-nul on a, par positivité améliorée, $\lambda > 0$. Il s'agit donc d'une nouvelle valeur propre, de multiplicité au moins 1. Comme la somme des multiplicités de toutes les valeurs propres est égale à n , on obtient que

0 est valeur propre de multiplicité $n - 1$ et λ est valeur propre de multiplicité 1 de Q .

- (c) Démontrer que Q est diagonalisable.

Solution. De la question précédente, on déduit deux espaces propres $E_0(Q)$ de dimension $n - 1$ et $E_\lambda(Q)$ de dimension 1 car la multiplicité de λ en tant que valeur propre est 1. On a donc $n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim(E_0(Q)) + \dim(E_\lambda(Q))$. Ceci signifie que

la matrice Q est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

- (d) Lorsque $n = 4$, donner un exemple où Q n'est pas diagonalisable si on enlève l'hypothèse : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$.
Les deux variables aléatoires X et Y devront être non-constantes.

Solution. À l'aide des questions précédentes, on voit que pour que Q ne soit pas diagonalisable, il faut que $\lambda = 0$, autrement dit pour tout $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, soit $\mathbb{P}(X = x_i) = 0$, soit $\mathbb{P}(Y = y_i) = 0$. Sur la matrice Q , cela signifie que soit la i -ème ligne, soit la i -ème colonne est nulle. On peut donc choisir

$$Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En écrivant la tableau de loi conjointe :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4	loi de X
x_1	0	0	1/4	1/4	1/2
x_2	0	0	1/4	1/4	1/2
x_3	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0
loi de Y	0	0	1/2	1/2	

on constate qu'on a bien

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; 4 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

Donc les variables aléatoires X et Y sont bien indépendantes et non-constantes.

De plus, la matrice Q étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale. Ainsi 0 est la seule valeur propre de Q et on a, comme précédemment, $\dim(\ker(Q)) = 4 - 1 = 3$ (l'hypothèse enlevée n'est pas utilisée pour cet argument). Les dimensions cumulées des espaces propres n'atteignant pas la dimension de l'espace, la matrice Q n'est pas diagonalisable.

2 On suppose que le rang de Q est égal à 1.

Démontrer que X et Y sont indépendantes. On pourra, si nécessaire, généraliser sans démonstration certains résultats vus dans la partie B.

Solution. Comme la matrice Q est de rang non-nul, elle n'est pas nulle et possède une colonne non-

nulle. Notons $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ cette colonne, toutes les autres colonnes lui sont donc colinéaires car le rang vaut 1. Ainsi, il existe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ des réels tels que

$$Q = \begin{pmatrix} \beta_1 S & ; & \beta_2 S & ; & \cdots & ; & \beta_n S \end{pmatrix}.$$

On a par construction $q_{i,j} = \alpha_i \beta_j$. Notons que comme Q est à coefficients positifs ou nuls, les coefficients α_i et β_j sont positifs ou nuls. De plus la somme de tous les coefficients de Q vaut 1 (en tant que probabilités d'une loi conjointe), ainsi

$$1 = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n q_{i,j} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \alpha_i \beta_j = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \right).$$

En reprenant la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de la partie B, on obtient

$$QU = \beta S = \beta \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } \beta = \sum_{j=1}^n \beta_j$$

et

$$U^T Q = \alpha (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n) \quad \text{avec } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

D'après la partie B, ces deux matrices donnent les lois marginales X et Y , on a donc

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \alpha_i \beta \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \alpha \beta_j.$$

Comme $\alpha \beta = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \right) = 1$, ainsi

$$\mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j) = q_{i,j} = \alpha_i \beta_j = \alpha \beta \alpha_i \beta_j = \alpha_i \beta \times \alpha \beta_j = \mathbb{P}(X = x_i) \mathbb{P}(Y = y_j).$$

Donc

les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.