

Epreuve de Mathématiques A

Partie A : Quelques matrices

On considère les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Rappeler la caractérisation des matrices trigonalisables à l'aide du polynôme caractéristique.

Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé

2. M_1 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
Déterminer (si possible) une matrice P_1 inversible et une matrice diagonale D_1 telles que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$. Le calcul de P_1^{-1} n'est pas demandé.

On calcule $\chi_{M_1}(X) = \begin{vmatrix} X-2 & -6 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-2)(X-1) - 6 = X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$

Le polynôme caractéristique de M_1 est scindé simple donc M_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

De la question précédente on déduit que $Sp(M_1) = \{-1; 4\}$ donc $D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On résout : $M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = -x \\ x + y = -y \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0.$

On obtient une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

De la même façon on résout : $M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 4x \\ x + y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow 3y = x.$

On obtient une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice $P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formée des coordonnées des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres -1 et 4 exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ répond à la question posée.

3. a) M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

On calcule

$$\chi_{M_2}(X) = \begin{vmatrix} X-3 & 2 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-1) + 2 = X^2 - 4X + 5$$

Le discriminant du polynôme caractéristique de M_2 vaut $-4 < 0$. Donc $\chi_{M_2}(X)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ donc M_2 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ses racines complexes conjuguées sont $2 \pm i$ donc $\chi_{M_2}(X)$ est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ donc M_2 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- b) Déterminer (si possible) une matrice P_2 inversible et une matrice diagonale D_2 telles que $M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$. Le calcul de P_2^{-1} n'est pas demandé.

D'après ce qui précède la matrice $D_2 = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$ répond à la question posée.

De la même façon qu'à la question précédente on résout :

$$M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2+i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = (2+i)x \\ x + y = (2+i)y \end{cases} \Leftrightarrow x = (1+i)y.$$

On obtient une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

On résout :

$$M_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2-i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = (2-i)x \\ x + y = (2-i)y \end{cases} \Leftrightarrow x = (1-i)y.$$

On obtient une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice $P_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formée des coordonnées des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $2+i$ et $2-i$ exprimées dans la base canonique de $\mathbb{C}$ répond à la question posée.

4.

- a) M_3 est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

On calcule

$$\chi_{M_3}(X) = \begin{vmatrix} X-5 & 4 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-5)(X-1) + 4 = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$$

$\chi_{M_3}(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc M_3 est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

3 est la seule valeur propre de M_3 et f_3 n'est pas proportionnel à l'identité (une homothétie de rapport 3) donc M_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- b) On note f_3 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice M_3 . Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f_3 est $T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On résout :

$$M_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 3x \\ x + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y$$

On obtient une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche un vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $M_3 u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3u$

$$M_3 u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3u \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 2 + 3x \\ x + y = 1 + 3y \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y = 1$$

En particulier le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

La famille $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$ et dans cette base la matrice de f_3 est bien $T_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

On s'intéresse désormais aux matrices $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

5. A quelle condition nécessaire et suffisante les matrices $M(a, b)$ sont-elles inversibles ?

$M(a, b)$ est inversible si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b \neq 0$

6. Calculer le discriminant, $\Delta(a, b)$ du polynôme caractéristique de $M(a, b)$.

$$\chi_{M(a,b)}(X) = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -1 & X - 1 \end{vmatrix} = (X - a)(X - 1) - b = X^2 - (a + 1)X + a - b$$

Donc $\Delta(a, b) = (a + 1)^2 - 4(a - b) = (a - 1)^2 + 4b$

7.

- a) Justifier que si $\Delta(a, b) = 0$ alors $M(a, b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Lorsque $\Delta(a, b) = 0$ alors $\chi_{M(a,b)}$ possède une unique valeur propre λ . La seule façon que $M(a, b)$ soit diagonalisable soit que $f_{(a,b)}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $M(a, b)$ soit proportionnel à l'identité (une homothétie de rapport λ). Donc que $M(a, b)$ soit déjà diagonale ce qui est impossible. Donc si $\Delta(a, b) = 0$ alors $M(a, b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

- b) Lorsque $\Delta(a, b) \neq 0$, $M(a, b)$ est-elle diagonalisable ? On précisera si c'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et/ou $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Lorsque $\Delta(a, b) \neq 0$ alors de deux choses l'une :

- Si $\Delta(a, b) = (a - 1)^2 + 4b > 0$: Alors $\chi_{M(a,b)}(X)$ est scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$ puisqu'il possède deux racines réelles distinctes donc $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- Si $\Delta(a, b) = (a - 1)^2 + 4b < 0$: Alors $\chi_{M(a,b)}(X)$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ puisqu'il possède deux racines complexes distinctes donc $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En conclusion Si $\Delta(a, b) \neq 0$, alors $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ uniquement si $\Delta(a, b) > 0$

8. Représenter sur la feuille de papier millimétré fournie :

- L'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $M(a, b)$ est non inversible;

$M(a, b)$ est non inversible $\Leftrightarrow a = b$: c'est la première bissectrice

- L'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

Il s'agit de l'ensemble des points situés *strictement au dessus* de la parabole :

$$y > -\frac{1}{4}(x-1)^2$$

de sommet $S(1; 0)$, d'axe vertical $x = 1$ et tournée vers les ordonnées infiniment négatives

- L'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $M(a, b)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

Il s'agit de l'ensemble des points situés *strictement* sous la parabole :

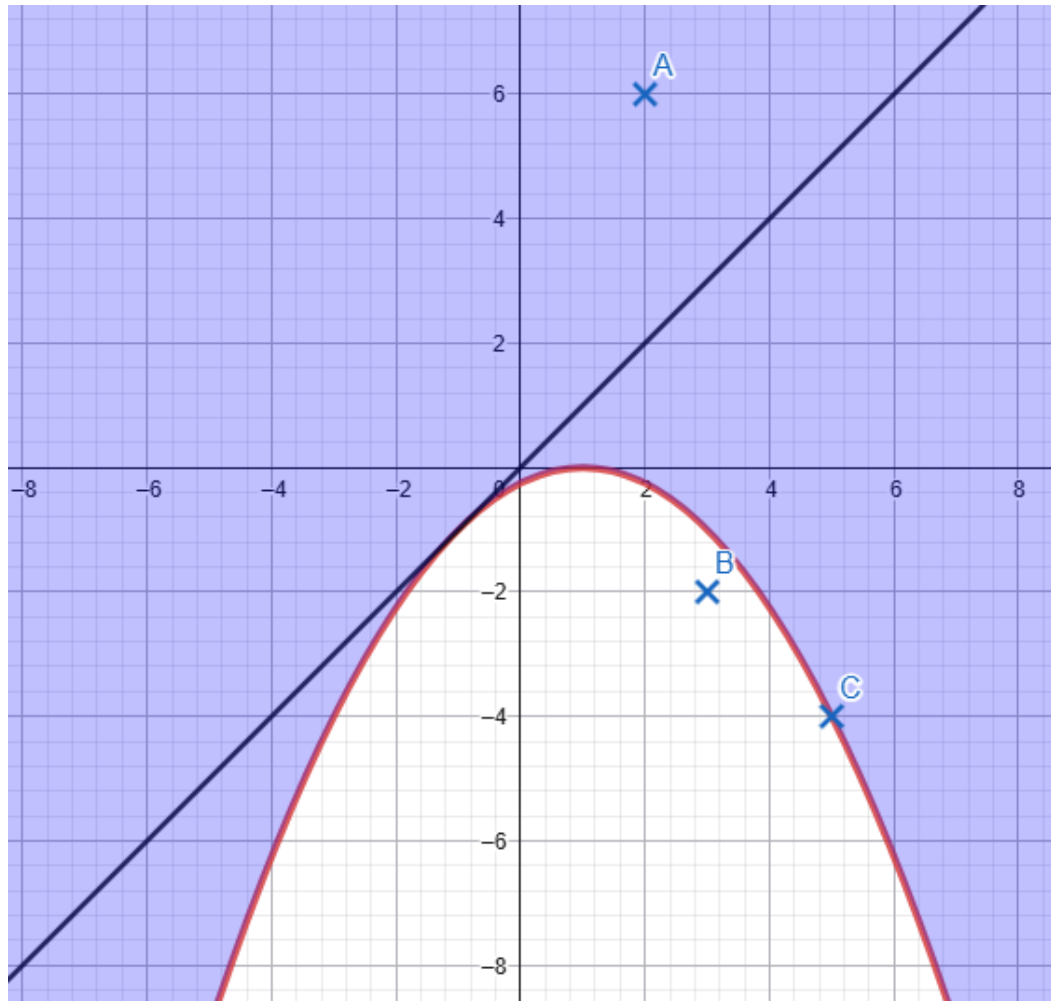
$$y < -\frac{1}{4}(x-1)^2$$

- L'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $M(a, b)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$;

Il s'agit exactement de la parabole d'équation

$$y = -\frac{1}{4}(x-1)^2$$

- Les 3 points correspondant aux matrices M_1, M_2 et M_3 définies en début de cette partie.



Partie B : Un couple de variables aléatoires

Dans cette partie, on considère la matrice $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3\}$ avec $x_1 = -1, x_2 = 0$ et $x_3 = 1$.
- $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall j \in \{1, 2, 3\}, P(X = x_i, Y = x_j) = c_{i,j}$.

On note U le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et V le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

On convient de confondre une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec son unique coefficient.

1.

- a) Justifier soigneusement que le produit CU permet d'obtenir la loi de X puis déterminer cette loi.

On sait que la loi conjointe permet d'obtenir la loi marginale de X en effectuant les sommes, pour tout $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^3 P(X = x_i, Y = x_j)$$

Vérifions que cette somme correspond bien au produit de la matrice C par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\text{On calcule } CU = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

On obtient donc la loi marginale de X :

$$\begin{aligned} P(X = x_1) &= \frac{1}{3} \\ P(X = x_2) &= \frac{5}{12} \\ P(X = x_3) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- b) Vérifier que l'espérance de X , notée $E(X)$, est égale à $V^T CU$ puis la calculer.

On sait que la loi marginale de X est donnée par

$$CU = \begin{pmatrix} P(X = x_1) \\ P(X = x_2) \\ P(X = x_3) \end{pmatrix}$$

Et $V^T = (x_1, x_2, x_3)$ donc on a bien

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i) = V^T C U = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

Donner, sans justification, les produits matriciels qui permettent d'obtenir la loi marginale de Y et l'espérance $E(Y)$ de Y puis effectuer ces produits.

La loi marginale de Y est déterminée par $U^T C$, l'espérance $E(Y) = U^T C V$

$$U^T C = (P(Y = y_1) \quad P(Y = y_2) \quad P(Y = y_3)) = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$$

Donc Y suit une loi uniforme et $E(Y) = U^T C V = 0$

2. Que représente le produit $V^T C V$ pour le couple (X, Y) ? Une justification est attendue. Calculer ce produit.

On a

$$V^T C V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i c_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j P(x = x_i; y = y_j) = E(XY)$$

$$E(XY) = V^T C V = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}$$

Donc

$$E(XY) = -\frac{1}{12}$$

3. Calculer la covariance de X et Y .

On sait que Y suit une loi uniforme donc $E(Y) = 0$. On en déduit :

$$\text{Cov}(X; Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) = -\frac{1}{12}$$

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? On donnera deux justifications différentes.

1^{ère} justification : $E(XY) = -\frac{1}{12} \neq E(X)E(Y) = 0$ puisque $E(Y) = 0$

2^{ème} justification : on compare $P(x = x_1; y = x_1) = c_{11} = \frac{1}{12}$

et $P(x = x_1)P(y = x_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ donc $P(x = x_1; y = x_1) \neq P(x = x_1)P(y = x_1)$

Dans les deux cas X et Y ne sont pas indépendantes

5. Que représente la trace de C pour le couple (X, Y) ? La calculer.

On a

$$\text{Tr}(C) = \frac{1}{3} = \sum_{i=1}^3 c_{i,i} = \sum_{i=1}^3 P(x = x_i; y = x_i) = P(X = Y)$$

Partie C : Des variables aléatoires dans une matrice.

Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires A et B ainsi que la matrice $M(A, B) = \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires A et B sont égales respectivement aux variables aléatoires X et Y définies par la partie B.
 - a) Déterminer la probabilité que $M(A, B)$ soit inversible.

D'après la partie la probabilité que $M(A, B)$ soit inversible est identique à la probabilité que $A \neq B$. Donc

$$P(M(A, B) \text{ est inversible}) = 1 - P(X = Y) = 1 - \text{Tr}(C) = \frac{2}{3}$$

- b) Calculer la probabilité que $M(A, B)$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

D'après les résultats de la partie A, la probabilité que $M(A, B)$ ne soit ni diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vaut :

$$P\left(Y = -\frac{1}{4}(X-1)^2\right)$$

Or $X \in \{-1; 0; +1\}$ donc $Y \in \{-1; -\frac{1}{4}; 0\}$. Ainsi :

$$P\left(Y = -\frac{1}{4}(X-1)^2\right) = P(X = -1; Y = -1) + P\left(X = 0; Y = -\frac{1}{4}\right) + P(X = 1; Y = 0)$$

$$\text{avec } P\left(X = 0; Y = -\frac{1}{4}\right) = 0$$

Donc

$$P\left(Y = -\frac{1}{4}(X-1)^2\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Donc la probabilité que $M(A, B)$ ne soit ni diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vaut $\frac{1}{6}$

On suppose désormais et jusqu'à la fin de cette partie que A et B sont deux variables aléatoires indépendantes.

2. On suppose que A et B sont à valeurs dans une partie H de $\mathbb{N}$.
Etablir soigneusement que

$$P(A = B) = \sum_{k \in H} P(A = k)P(B = k).$$

L'évènement

$$(A = B) = \bigcup_{k \in H} (A = k) \cap (B = k)$$

Est une réunion d'évènements tous disjoints donc

$$P(A = B) = \sum_{k \in H} P(A = k; B = k) = \sum_{k \in H} P((A = k) \cap (B = k))$$

A et B sont deux variables aléatoires indépendantes donc

$$P((A = k) \cap (B = k)) = P(A = k)P(B = k)$$

D'où

$$P(A = B) = \sum_{k \in H} P(A = k)P(B = k)$$

3. On suppose dans cette question que A suit la loi binomiale de paramètres n et p où n est un entier naturel non nul et p est un réel appartenant à $]0; 1[$ et B suit la loi géométrique de paramètre r où r est un réel appartenant à $]0; 1[$.

- a) Rappeler l'univers-image $A(\Omega)$ de A ainsi que les probabilités $P(A = k)$ pour $k \in A(\Omega)$.

On a $A(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(A = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

- b) Rappeler l'univers-image $B(\Omega)$ de B ainsi que les probabilités $P(B = k)$ pour $k \in B(\Omega)$.

On a $B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(B = k) = r(1-r)^{k-1}$

- c) Démontrer que la probabilité que $M(A, B)$ ne soit pas inversible est égale à

$$\frac{r}{1-r} [(1-pr)^n - (1-p)^n]$$

La probabilité que $M(A, B)$ ne soit pas inversible est égale à $P(A = B)$

Les deux variables aléatoires sont indépendantes, donc :

$$P(A = B) = \sum_{k=1}^n P(A = k)P(B = k)$$

Donc

$$P(A = B) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} r(1-r)^{k-1} = \frac{r}{1-r} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (p(1-r))^k$$

Donc

$$P(A = B) = \frac{r}{1-r} [(p(1-r) + 1-p)^n - (1-p)^n]$$

Finalement

$$P(A = B) = \frac{r}{1-r} [(1-pr)^n - (1-p)^n]$$

4. On suppose dans cette question que A suit la loi de Poisson de paramètre λ et que $C = -B$ suit la loi de Poisson de paramètre μ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

- a) Rappeler l'univers-image $A(\Omega)$ de A ainsi que les probabilités $P(A = k)$ pour $k \in A(\Omega)$.

$$A(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } P(A = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- b) Démontrer que $A + C$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. On pourra utiliser les fonctions génératrices.

$$(A + C)(\Omega) = \mathbb{N}$$

Les deux variables aléatoires sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned}
 P(A + C = n) &= \sum_{k=0}^n P(A = k; C = n - k) = \sum_{k=0}^n P(A = k)P(C = n - k) \\
 &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}
 \end{aligned}$$

c) En déduire la probabilité que $M(A, B)$ soit inversible.

$$P(M(A, B) \text{ est inversible}) = 1 - P(A + C = 0) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)}$$

On suppose désormais jusqu'à la fin de cette partie que A suit la loi de Poisson de paramètre λ et B suit la loi de Poisson de paramètre μ où λ et μ sont deux réels strictement positifs.

5. Démontrer que la probabilité que $M(A, B)$ soit non inversible est égale à

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}$$

$$P(M(A, B) \text{ non inversible}) = P(A = B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A = n; B = n)$$

Donc, les deux variables aléatoires étant indépendantes, on obtient

$$P(M(A, B) \text{ non inversible}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}$$

6. L'objectif des questions suivantes est de déterminer une valeur approchée de I .
Une première option : Pour tout $n \geq 0$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} e^{-(\lambda+\mu)}$$

a) Démontrer que

$$\forall n \geq 0, |R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}$$

On a facilement

$$\forall k \geq n+1, (n+1)! \leq k!$$

Donc, par passage à l'inverse

$$\begin{aligned}
 \forall n \geq 0, |R_n| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k! (n+1)!} e^{-(\lambda+\mu)} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!} \leq \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \geq 0, |R_n| \leq \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{(n+1)!} e^{\lambda\mu}$$

- b) Ecrire en langage Python une fonction `val_app` de paramètre un réel strictement positif `eps`, qui calcule et renvoie la valeur d'une somme partielle de I représentant une valeur approchée de I à $\text{eps} > 0$ près.

On supposera que les valeurs de λ et de μ sont stockées respectivement dans les variables globales `la` et `mu` et que les fonctions exponentielle et factorielle sont disponibles grâce à la commande :

`from math import exp, factorial`

Il n'est pas demandé la documentation des fonctions mais il est possible et même recommandé de commenter les lignes de code.

On utilise la majoration du reste précédente

```
from math import exp, factorial

def val_app(eps):
    n = 0
    while exp(la * mu - (la + mu)) / factorial(n + 1) > eps:
        n = n + 1

    s = 0
    for k in range(n + 1):
        s = s + ((la * mu) ** k) / (factorial(k) ** 2)
    return exp(-(la + mu)) * s
```

- c) Quelle instruction doit-on rajouter pour afficher une valeur approchée de I à 10^{-5} près?

L'instruction à rajouter est : `print(val_app(10**(-5)))`

7. Une deuxième option : Soit N un entier naturel non nul. On simule N fois de façon indépendante les variables aléatoires A et B .

Pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on note J_i la variable aléatoire égale à 1 si la matrice $M(A, B)$ est non inversible lors de la i -ème simulation et égale à 0 sinon.

On note également $K_N = \sum_{k=1}^N J_i$ et $\overline{K_N} = \frac{1}{N} K_N$.

- a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire J_i pour $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. On donnera son nom ainsi que son ou ses paramètres.

On a une succession indépendante de événements de type succès/échec, donc La variable aléatoire J_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A = B) = I$

- b) Quelle est la loi de K_N ? On donnera son nom ainsi que son ou ses paramètres. Une justification est attendue.

La variable aléatoire K_N est la somme de N variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = P(A = B) = I$.

K_N suit donc une loi binomiale de paramètres N et $p = P(A = B) = I$.

- c) En déduire l'espérance et la variance de $\overline{K_N}$.

L'espérance de la loi binomiale K_N est donnée par $E(K_N) = NI$. Donc, par linéarité de l'espérance, $E(\overline{K_N}) = I$

La variance de la loi binomiale K_N est donnée par $V(K_N) = NI(1 - I)$
Et

$$V(\overline{K_N}) = V\left(\frac{1}{N} K_N\right) = \frac{1}{N^2} V(K_N) = \frac{I(1 - I)}{N}$$

d) Démontrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire finie $\overline{K_N}$ permet d'affirmer que,

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{K_N} - E(\overline{K_N})| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{K_N})}{\varepsilon^2}$$

soit

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon) \leq \frac{I(1 - I)}{N\varepsilon^2}$$

Considérons la fonction $x \mapsto x(1 - x)$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Cette fonction admet un maximum qui vaut $\frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$

On en déduit

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

e) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, P(I \in [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$.

D'après ce qui précède on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

Donc, par passage au complémentaire

$$\forall \varepsilon > 0, P(|\overline{K_N} - I| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

Or $|\overline{K_N} - I| < \varepsilon \Leftrightarrow I \in]\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon[$ et $]\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon[\subset [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]$

Donc

$$P(I \in [\overline{K_N} - \varepsilon; \overline{K_N} + \varepsilon]) \geq P(|\overline{K_N} - I| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

Qui est bien le résultat annoncé

f) Pour $\lambda = 1$ et $\mu = 2$, on effectue $N = 100000$ simulations. La matrice $M(A, B)$ a été non inversible à 21357 reprises. Quelle information concernant la valeur de I , l'inégalité précédente donne-t-elle si on prend $\varepsilon = 10^{-2}$? Puis $\varepsilon = 10^{-3}$?

On a $N = 100000, K_N = 21357$ donc $\overline{K_N} = 21357/100000 = 0,21357$.

- Pour $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\frac{1}{4N\varepsilon^2} = 0,025$$

$$\text{Donc } P(I \in [0,20357; 0,22357]) \geq 0,975$$

- Pour $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\frac{1}{4N\varepsilon^2} = 2,5$$

Donc $P(I \in [0,21257 ; 0,21457]) \geq -1,5$

Ici, pour $\varepsilon = 10^{-3}$, l'inégalité ne donne aucune information exploitable

Partie D : Un deuxième couple de variables aléatoires.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

On note $Q = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, q_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

1. On suppose que X et Y sont indépendantes et que $\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, P(X = x_i) \neq 0$.
 - a. Justifier que le rang de la matrice Q est égal à 1.

Les variables aléatoires sont indépendantes donc

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, q_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

Chaque vecteur colonne C_j de la matrice Q s'écrit $C_j = P(Y = y_j) \begin{pmatrix} P(X = x_1) \\ P(X = x_2) \\ \vdots \\ P(X = x_n) \end{pmatrix}$

Toutes les colonnes de la matrice Q sont donc proportionnelles au même vecteur

Donc $\text{rg}(Q) = 1$

- b. Que peut-on en déduire concernant les éventuelles valeurs propres (réelles) de Q ainsi que leur multiplicité ?

Une matrice de rang 1 ne possède que deux valeurs propres : 0 et la trace.

Ces deux valeurs propres sont de multiplicités respectives $n - 1$ et 1.

Ici

$$\text{Tr}(Q) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i)P(Y = y_i) > 0$$

Car, on sait par hypothèse sur X que $\forall i \in \llbracket 1;n \rrbracket, P(X = x_i) \neq 0$ et $\exists j, P(Y = y_j) \neq 0$

- c. Démontrer que Q est diagonalisable.
 $\text{rg}(Q) = 1$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } Q = n - 1$.

$$\text{On pose } U = \begin{pmatrix} P(X = x_1) \\ P(X = x_2) \\ \vdots \\ P(X = x_n) \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} P(Y = y_1) \\ P(Y = y_2) \\ \vdots \\ P(Y = y_n) \end{pmatrix} \text{ On a } Q = UV^T$$

Donc

Or
$$QU = UV^T U = U(V^T U)^T$$

$$V^T U = \sum_{i=1}^n P(Y = y_i)P(X = x_i) = \text{Tr}(Q)$$

Donc

$$QU = \text{Tr}(Q)U$$

Donc U est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre $\text{Tr}(Q)$

Comme $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X = x_i) \neq 0$, on est sûr que le sous espace propre de Q associé à la valeur propre $\text{Tr}(Q)$ n'est pas réduit au vecteur nul et que sa dimension est égale à 1. La somme des dimensions des sous espaces propres étant égale à n , on en déduit que :

Q est diagonalisable

- d. Lorsque $n = 4$, donner un exemple où Q n'est pas diagonalisable si on enlève l'hypothèse $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X = x_i) \neq 0$.
Les deux variables aléatoires X et Y devront être non constantes.

Il suffit de considérer

$$Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N'est pas diagonalisable

2. On suppose que le rang de Q est égal à 1.
Démontrer que X et Y sont indépendantes.
On pourra, si nécessaire, généraliser sans démonstration certains résultats vus dans la partie B.

Par définition de la loi marginale

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n P(X = x_i; Y = y_j)$$

Or la matrice est de rang 1 donc chaque colonne C_j est proportionnelle à un même vecteur

colonne $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ donc $\forall j, \exists k_j \in \mathbb{R}, C_j = k_j \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$

Ainsi, pour chaque ligne $i, \forall j, P(X = x_i; Y = y_j) = k_j p_i$

Et

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k_j p_i = 1 = \left(\sum_{j=1}^n k_j \right) \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)$$

On obtient

$$P(X = x_i)P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^n P(X = x_i; Y = y_j) \sum_{i=1}^n P(X = x_i; Y = y_j) = \sum_{j=1}^n k_j p_i \sum_{i=1}^n k_j p_i$$

Donc

$$P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i k_j \sum_{j=1}^n k_j \sum_{i=1}^n p_i = p_i k_j = P(X = x_i; Y = y_j)$$

En conclusion, si le rang de Q est égal à 1, alors les variables aléatoires sont indépendantes

FIN