

Partie A

1. Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
2. La matrice M_1 admet pour polynôme caractéristique :

$$\chi_1(X) = X^2 - 3X - 4 = (X + 1)(X - 4)$$

(le calcul des racines de χ_1 étant direct). On en déduit que $sp(M_1) = \{-1, 4\}$. Les valeurs propres de M_1 sont simples. Donc M_1 est diagonalisable (dans $M_2(\mathbb{R})$ et donc dans $M_2(\mathbb{C})$). Calculons ses sous-espaces propres :

— Pour E_{-1} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_1 + I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

Un vecteur propre pour la valeur propre -1 est donc donné par $(-2, 1)$.

— Pour E_4 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_1 - 4I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 3y = 0$$

Un vecteur propre pour la valeur propre 4 est donc donné par $(3, 1)$.

Ainsi,

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$$

3. La matrice M_2 admet pour polynôme caractéristique :

$$\chi_2(X) = X^2 - 4X + 5 \text{ de discriminant } \Delta = -4$$

Ainsi, χ_2 n'a pas de valeur propre réelle et n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Par contre, χ_2 admet deux valeurs propres complexes conjuguées : $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. On en déduit que $sp_{\mathbb{C}}(M_2) = \{2 + i, 2 - i\}$. Les valeurs propres (complexes) de M_2 sont simples. Donc M_2 est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$. Calculons ses sous-espaces propres :

— Pour E_{2+i} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_2 - (2+i)I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)x - 2y = 0 \\ x - (1+i)y = 0 \end{cases}$$

On remarque que $L_1 = (1-i)L_2$ et que les deux équations sont en fait identiques. Un vecteur propre pour la valeur propre $2+i$ est donc donné par $(1+i, 1)$.

— Pour E_{2-i} : un passage au conjugué nous dit que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_2 - (2-i)I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\overline{M_2 - (2-i)I_2}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_2 - (2+i)I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in \text{Vect}((1+i, 1))$$

Un vecteur propre pour la valeur propre $2-i$ est donc donné par $(1-i, 1)$.

Ainsi,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

4. (a) De même que précédemment, le polynôme caractéristique de M_3 est $X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$. La matrice M_3 admet une unique valeur propre égale à 3 mais n'est pas égale à $3I_2$. Donc M_3 n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique étant scindé, elle est cependant trigonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Le sous espace propre associé à la valeur propre 3 est donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_3 - 3I_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

Un vecteur propre de M_3 est donc donné par $e_1 = (2, 1)$.

Ensuite, on cherche un vecteur $e_2 = (x, y) \neq (0, 0)$ tel que $Me_2 = 3e_2 + e_1$, soit

$$(M - 3I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Ces équations étant identiques, le système a une infinité de solutions, par exemple $e_2 = (3, 1)$.

La famille $\mathcal{B}(e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (elle est libre car e_1 et e_2 sont non colinéaires et de cardinal 2) et la matrice de f_3 dans $\mathcal{B}$ est bien T_3 .

5. $M(a, b)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul si et seulement si $a - b \neq 0$ (ou $a \neq b$).
 6. Le polynôme caractéristique de $M(a, b)$ est $\chi_{a,b} = X^2 - (a + 1)X + (a - b)$. Son discriminant vaut

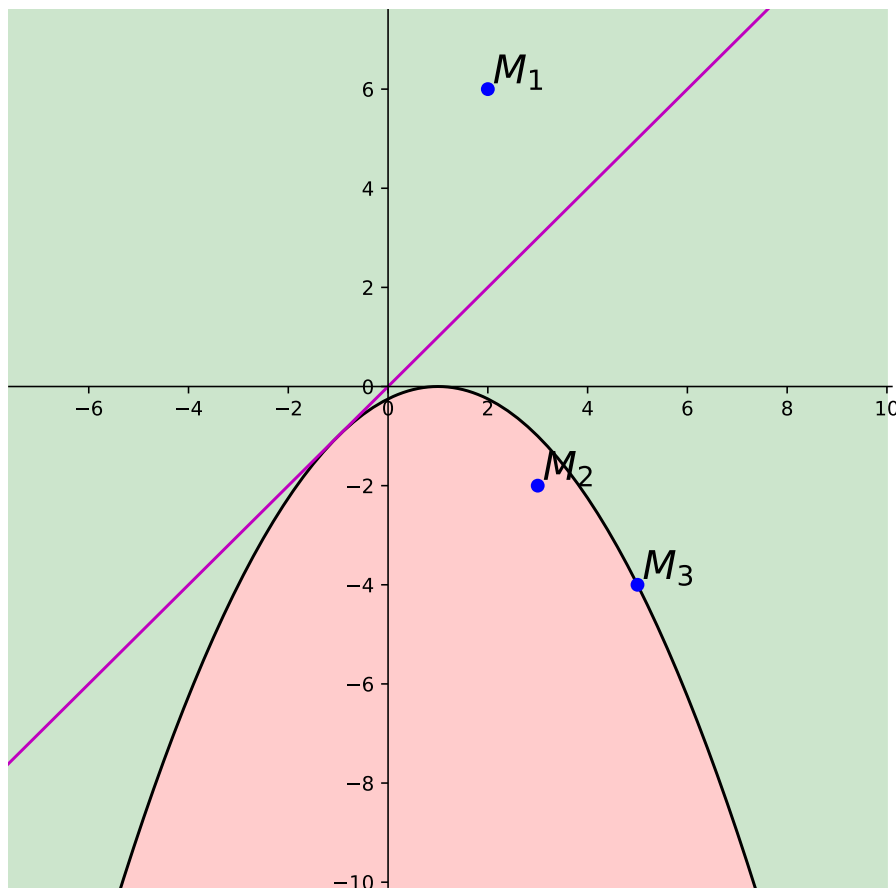
$$\Delta(a, b) = (a + 1)^2 - 4a + 4b = a^2 - 2a + 4b + 1 = (a - 1)^2 + 4b$$

7. (a) Si $\Delta(a, b) = 0$, alors $\chi_{a,b}$ admet une racine double et $\text{sp}(M(a, b))$ ne contient qu'un seul élément. $M(a, b)$ est alors diagonalisable si et seulement si c'est un multiple de l'identité ce qui n'est pas le cas (le coefficient en bas à gauche étant non nul). Donc $M(a, b)$ n'est pas diagonalisable.
 (b) Si $\Delta(a, b) \neq 0$, alors $\chi_{a,b}$ admet deux racines distinctes. Plus précisément :
 — Si $\Delta(a, b) > 0$ les racines de $\chi_{a,b}$ sont réelles et $M(a, b)$ admet deux valeurs propres simples réelles. Dans ce cas, $M(a, b)$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
 — Si $\Delta(a, b) < 0$ les racines de $\chi_{a,b}$ sont complexes non réelles et $M(a, b)$ admet deux valeurs propres complexes non réelles. Dans ce cas, $M(a, b)$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $M_2(\mathbb{R})$ (puisque $\text{sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$).
 8. La courbe d'équation $\Delta(a, b) = 0$ est une parabole, c'est la parabole d'équation

$$b = -\frac{(a - 1)^2}{4}$$

C'est l'ensemble des points (a, b) tels que $M(a, b)$ ne soit pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$.

- Au dessus de cette parabole (dans la zone verte), on est dans la zone des points (a, b) où $M(a, b)$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.
- En dessous de cette parabole (dans la zone rouge), on est dans la zone des points (a, b) où $M(a, b)$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ mais pas $M_2(\mathbb{R})$.
- Par ailleurs la droite d'équation $b = a$ est l'ensemble des points où $M(a, b)$ est non inversible (elle est représentée en violet ci-dessous).



Partie B

1. (a) La loi marginale X est obtenue en sommant les probabilités jointes avec Y (vu que $(\{Y = x_j\}_{j \in \llbracket 1,2,3 \rrbracket})$ est un système complet d'événements) :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^3 \mathbb{P}(X = x_i, Y = x_j) = \sum_{j=1}^3 c_{i,j}$$

Or, la ligne i du produit CU donne exactement $\sum_{j=1}^3 c_{i,j}$ (et donc $\mathbb{P}(X = x_i)$). Donc

$$P(X = -1) = \frac{1}{12}(1 + 1 + 2) = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{12}(2 + 2 + 1) = \frac{5}{12}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{12}(1 + 1 + 1) = \frac{1}{4}$$

Remarque : en soi les coefficients $(c_{i,j})_{i \leq 3, j \leq 3}$ forment bien une loi de probabilité conjointe puisqu'ils se somment à 1.

- (b) D'une part,

$$E(X) = x_1 \mathbb{P}(X = x_1) + x_2 \mathbb{P}(X = x_2) + x_3 \mathbb{P}(X = x_3)$$

D'autre part,

$$V^T CU = V^T(CU) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \mathbb{P}(X = x_2) \\ \mathbb{P}(X = x_3) \end{pmatrix}$$

Il y a bien égalité des deux quantités. Enfin,

$$E(X) = -\mathbb{P}(X = x_1) + \mathbb{P}(X = x_3) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}.$$

2. On obtient la loi de Y en effectuant le produit $U^T C$ (les probas élémentaires de Y étant donnée par chaque coefficient du vecteur ligne) et $E(Y) = U^T C V$:

$$(\mathbb{P}(Y = -1) \quad \mathbb{P}(Y = 0) \quad \mathbb{P}(Y = 1)) = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \text{ et } E(Y) = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Un calcul direct montre que le produit matriciel est

$$V^T C V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i c_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = E(XY)$$

Application numérique :

$$V^T C V = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}.$$

4. On en déduit que $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{12}$.
 5. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes puisque leur covariance est non nulle.
 On aurait également pu le voir en remarquant que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{5}{12}, \quad \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \text{ mais } \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6} \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0).$$

6. Par définition,

$$\text{Tr}(C) = \sum_{k=1}^3 c_{k,k} = \sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(X = x_k, Y = x_k) = \mathbb{P}(X = Y)$$

Cette probabilité vaut $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{3}$.

Partie C

1. (a) $M(A, B)$ n'est pas inversible si et seulement si $A = B$ (cf. partie A). Donc (en se rappelant que $A = X$ et $B = Y$),

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ non inversible}) = \mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{3}.$$

et donc

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ inversible}) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = \frac{2}{3}.$$

- (b) La matrice $M(A, B)$ n'est diagonalisable ni dans $M_2(\mathbb{R})$ ni dans $M_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $4B + (A-1)^2 = 0$ (cf. partie A). Pour que cela arrive, il faut que $B \leq 0$.

— Si $B = 0$, alors $A = 1$

— Si $B = -1$, alors $A = -1$

Donc

$$\mathbb{P}(M(A, B) \text{ non diagonalisable dans } M_2(\mathbb{C})) = \mathbb{P}(A = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(A = -1, Y = -1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

2. L'événement $A = B$ se décompose en une union disjointe

$$A = B = \bigcup_{k \in H} (A = k, B = k).$$

Donc, l'union étant disjointe,

$$\mathbb{P}(A = B) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k, B = k) = \sum_{k \in H} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k)$$

(la dernière égalité venant de l'indépendance de A et B).

Remarque : la somme (potentiellement) infinie est bien convergente car son terme général est positif et inférieur à $\mathbb{P}(A = k)$ (qui est bien le terme général d'une série convergente).

3. (a) $A(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(A = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
 (b) $B(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(K = k) = r(1-r)^{k-1}$.
 (c) $M(A, B)$ n'est pas inversible si et seulement si $A = B$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \text{ non inversible}) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} r(1-r)^{k-1} = \frac{r}{1-r} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (p(1-r))^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{r}{1-r} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p(1-r))^k (1-p)^{n-k} - (1-p)^n \right) \\ &= \frac{r}{1-r} ((p - pr + 1 - p)^n - (1-p)^n) = \frac{r}{1-r} ((1-pr)^n - (1-p)^n). \end{aligned}$$

4. (a) $A(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
 (b) Suivons l'indication : la fonction génératrice de A est

$$G_A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{\lambda(t-1)}$$

Donc, comme A et C sont indépendantes,

$$G_{A+C}(t) = G_A(t) G_C(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

La fonction génératrice de $A + C$ est celle d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Donc $A + C$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

- (c) $M(A, B)$ n'est pas inversible si et seulement si $A = B = -C$ si et seulement si $A + C = 0$. Donc

$$\mathbb{P}(M \text{ non inversible}) = \mathbb{P}(A + C = 0) = e^{-\lambda-\mu} \text{ et } \mathbb{P}(M \text{ inversible}) = 1 - e^{-\lambda-\mu}$$

5. La probabilité que M soit non inversible, d'après la question 2 est égale à

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A = k) \mathbb{P}(B = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2} = I$$

6. (a) En minorant l'un des $k!$ par $(n+1)!$, et en remarquant que tous les termes de la somme sont positifs,

$$0 \leq R_n \leq e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!}$$

La reste de la série étant inférieur à la somme, on en déduit que

$$|R_n| \leq \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{k!} = \frac{e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}}{(n+1)!}$$

- (b) Le code suit la logique suivante : tant que $\frac{e^{\lambda\mu - (\lambda+\mu)}}{(k+1)!}$ est supérieur à ε , on rajoute le k^e terme dans la somme (compteur k que l'on a initialisé à 0 et incrémenté de 1 à chaque itération) :

```

1  def val_app(eps):
2      S = 0
3      cste = exp(la*mu - (la+mu))
4      k=0
5      while cste/factorial(k+1) > eps :
6          S += (la*mu)**k / factorial(k)**2 * exp(-la-mu)
7          k += 1
8      return S

```

- (c) Il faut rajouter `eps = 1E-5`, puis appeler la fonction via `val_app(eps)`.

7. Petite coquille : $K_N = \sum_{i=1}^n J_i$

- (a) La variable J_i suit une loi de Bernoulli de paramètre I avec I la probabilité que $M(a, b)$ soit non inversible.
- (b) La variable K_N est une somme de N variable aléatoires de Bernoulli de paramètre I . La variable K_N suit donc une loi binomiale de paramètres N et I . En effet, en passant par les fonctions génératrices,

$$G_{K_N}(t) = \prod_{i=1}^N G_{J_i}(t) = G_{J_1}(t)^N = ((1-p) + pt)^N = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} p^i t^i (1-p)^{N-i}$$

qui est la fonction génératrice d'une loi binomiale.

- (c) Donc $E(K_N) = NI$ et $Var(K_N) = N(I - I^2)$. On en déduit que

$$E(\overline{K_N}) = I \text{ et } Var(\overline{K_N}) = \frac{I - I^2}{N}.$$

- (d) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|\overline{K_N} - E(\overline{K_N})| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(K_N)}{\varepsilon^2}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|\overline{K_N} - I| \geq \varepsilon) \leq \frac{I - I^2}{N\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

En effet, la fonction $I \rightarrow I - I^2 = \frac{1}{4} - (I - \frac{1}{2})^2$ atteint son maximum en $I = \frac{1}{2}$, maximum qui vaut $\frac{1}{4}$.

- (e) Soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(I \in [K_n - \varepsilon, K_n + \varepsilon]) = \mathbb{P}(|\overline{K_N} - I| \leq \varepsilon) \geq \mathbb{P}(|\overline{K_N} - I| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}.$$

- (f) Dans ce cas, $\overline{K_N} = 0.21357$.

- La valeur de I est dans $[0.20357, 0.22357]$ avec probabilité au moins $\frac{39}{40} = 97,5\%$.
- Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\frac{1}{4N\varepsilon^2} = \frac{10^6}{4 \cdot 10^5} = 2.5 > 1$. On n'a pas d'information sur la valeur de I .

Partie D

1. (a) Par indépendance de X et Y , matrice Q a pour coefficients $\mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$. Notons $C = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$. Les colonnes de Q sont donc

$$Q = (\mathbb{P}(Y = y_1)C | \cdots | \mathbb{P}(Y = y_n)C).$$

Les colonnes de Q sont toutes proportionnelles à C et Q est une matrice non nulle (puisque tous les coefficients de C sont non nuls et qu'au moins une probabilité élémentaire $\mathbb{P}(Y = y_j)$ est non nulle). Donc $rg(Q) = 1$.

- (b) On en déduit que, comme $\text{Ker}(Q)$ est de dimension $n - 1$, 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$. Sa dernière valeur propre est égale à la trace de Q soit

$$\text{Tr}(Q) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = x_k) \mathbb{P}(Y = y_k)$$

- (c) Il existe un indice i_0 tel que $\mathbb{P}(Y = y_{i_0}) > 0$ et $\mathbb{P}(X = x_{i_0}) > 0$ (par hypothèse). Donc $\text{Tr}(Q) > 0$ et la dernière valeur propre de Q est non nulle. On en déduit que

- 0 est une valeur propre de Q de multiplicité $n - 1$ et $\dim(\text{Ker}(Q)) = n - 1$,
- $\text{Tr}(Q)$ est une valeur propre de Q simple.

On en déduit que Q est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propre étant égale à n .

- (d) Supposons que

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \mathbb{P}(X = x_2) = 0, \quad \mathbb{P}(X = x_3) = \mathbb{P}(X = x_4) = \frac{1}{2}$$

et

$$\mathbb{P}(Y = y_1) = \mathbb{P}(Y = y_2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Y = y_3) = \mathbb{P}(Y = y_4) = 0$$

Donc $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, $\text{sp}(Q) = \{0\}$ et Q est non nulle, donc non diagonalisable.

2. Si $\text{rg}(Q) = 1$, alors toutes les colonnes de Q sont proportionnelles à une même colonne C . On peut donc écrire

$$Q = (\alpha_1 C | \dots | \alpha_n C) \text{ avec } \alpha_i \geq 0.$$

Quitte à multiplier C par $\sum_{j=1}^n \alpha_j$, on peut supposer que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. D'après la partie B, le produit $U^T Q$ donne

$$U^T Q = (\mathbb{P}(Y = y_1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(Y = y_n))$$

Donc

$$(\mathbb{P}(Y = y_1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(Y = y_n)) = (\alpha_1 U^T C \quad \dots \quad \alpha_n U^T C) = U^T C (\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n)$$

Or, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{i,j} = 1$ (car les coefficients de Q sont une loi de proba) On en déduit que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_j C_i = 1 \text{ donc } \sum_{i=1}^n C_i = U^T C = 1$$

Donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$.

Enfin, si $i \leq n$,

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j C_i = C_i$$

Au final,

$$q_{ij} = \alpha_j C_i \text{ soit } \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Les variables X et Y sont indépendantes.