

Banque PT 2026 - Mathématiques C

Une proposition de solution par Frédéric Gaunard (Lycée Voltaire, Paris 11ème).

Pour toute remarque, correction, suggestion, merci de me contacter : frederic@gaunard.com

Préambule

Dans ce qui suit, t_0 désigne un réel strictement positif.

1. Soient f et g les fonctions qui, à tout réel $t \neq t_0$, associent respectivement :

$$f(t) = \frac{t}{t_0 - t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t_0}{t_0 - t}$$

Donner le domaine de dérivabilité de f et g et montrer que, pour tout réel t de ce domaine, les dérivées de f et g coïncident. Il est demandé d'explicitier ces dérivées.

Solution. La fonction $t \mapsto t_0 - t$ est affine (donc dérivable sur $\mathbb{R}$) et ne s'annule pas sur $] -\infty, t_0[$ ni sur $]t_0, +\infty[$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto t_0$ sont respectivement affine et constante donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Par quotient, les fonctions f et g sont dérivables sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$. De plus, pour tout $t \neq t_0$, on a

$$f'(t) = \frac{t_0 - t + t}{(t_0 - t)^2} = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2} = g'(t)$$

et donc les dérivées de f et g coïncident. □

2. Donner le tableau de variations de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, en précisant les limites aux bornes.

Solution. Pour tout $t \neq t_0$, $(t_0 - t)^2 > 0$ et donc f et g sont strictement croissantes sur chacun des deux intervalles ci-dessus. De plus

$$f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{t}{-t} = -1 \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} -1, \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0^-} +\infty, \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0^+} -\infty$$

et

$$f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{t_0}{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0, \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0^-} +\infty, \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0^+} -\infty$$

ce qui permet de dresser les tableaux de variations ci-dessous :

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
f	-1	$+\infty$	-1
g	0	$+\infty$	0

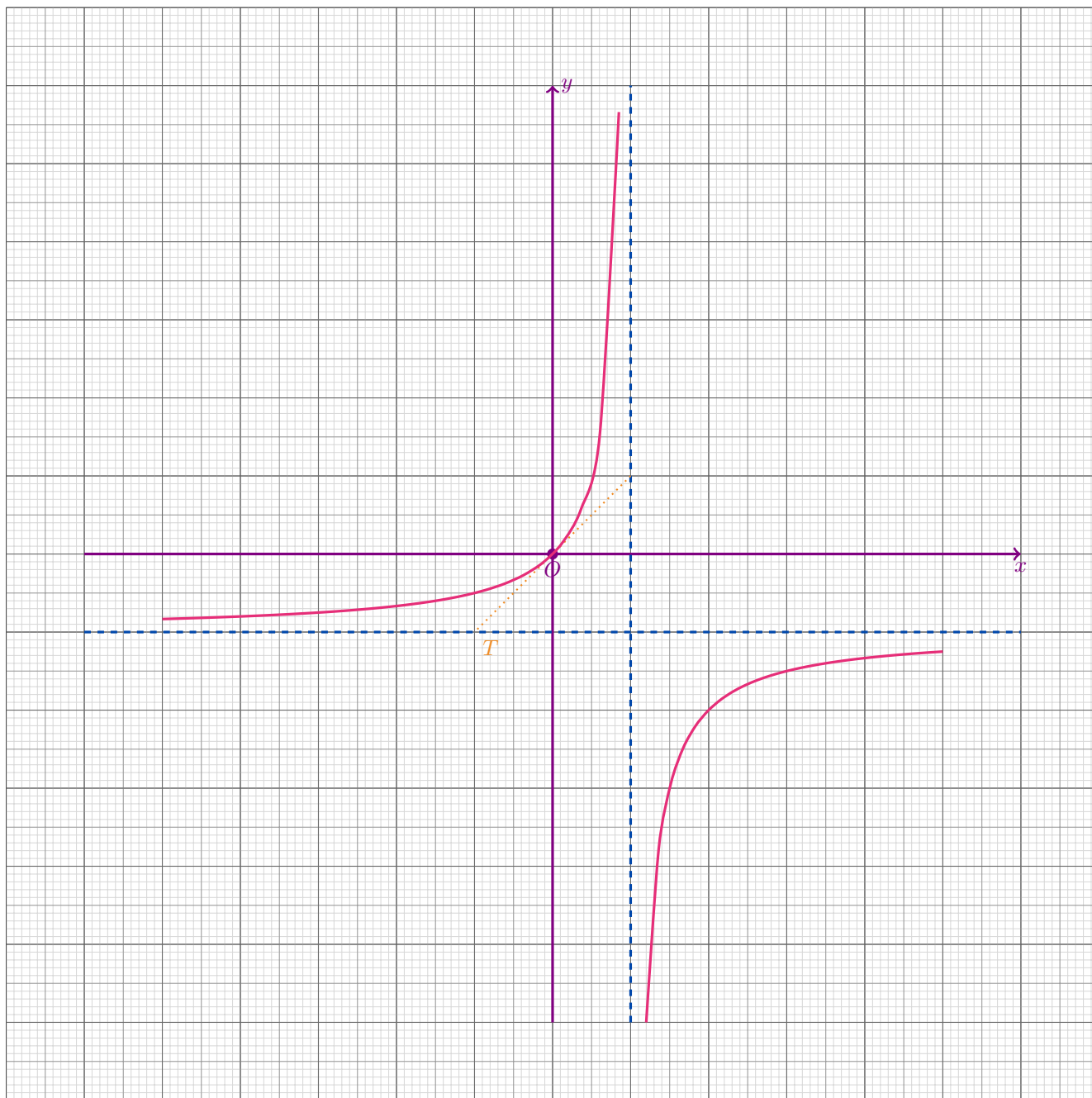
□

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0.

Solution. La tangente à la courbe en 0 a pour équation $y = f'(0)x + f(0) = \frac{1}{t_0}x$. □

4. Tracer, sur la feuille de papier millimétrée fournie, la tangente T et l'allure du graphe de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, pour la valeur $t_0 = 1$, à l'échelle : une unité pour un cm.

Solution. Le dessin demandé est le suivant, la tangente a pour équation $y = x$ avec cette valeur de t_0 .



□

5. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que la fonction f est n fois dérivable sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, et donner, à l'aide d'une démonstration par récurrence, l'expression de sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$, sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

Solution. Pour les mêmes raisons que f est dérivable sur chacun des intervalles considérés (à savoir quotient de fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas), f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun de ces intervalles et donc n fois dérivable. On commence par calculer quelques dérivées successives pour conjecturer une formule. Pour $t \neq t_0$,

$$f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}; \quad f''(t) = \frac{2t_0}{(t_0 - t)^3}, \quad f^{(3)}(t) = \frac{6t_0}{(t_0 - t)^4}$$

ce qui mène à la conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \neq t_0$, $f^{(n)}(t) = \frac{n!t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$.

Il n'y a pas besoin d'initialiser la récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $t \neq t_0$, on ait $f^{(n)}(t) = \frac{n!t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$.

Alors,

$$f^{(n+1)}(t) = \left(f^{(n)}\right)'(t) = (n+1)n! \frac{t_0}{(t_0 - t)^{n+2}} = \frac{(n+1)!t_0}{(t_0 - t)^{n+2}},$$

ce qui est bien la formule au rang $n + 1$ et termine cette (très courte et facile) récurrence. $\square$

6. Déterminer une primitive G de g sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, puis une primitive F de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

Solution. Une primitive G de g , sur chacun des intervalles ci-dessus, est par exemple donnée par $G(t) = t_0 \ln |t_0 - t|$. Observant que, pour tout $t \neq t_0$, $f(t) = \frac{t - t_0 + t_0}{t_0 - t} - 1 + g(t)$, une primitive F de f , sur les mêmes intervalles, est alors donnée par $F(t) = t_0 \ln |t_0 - t| - t$. $\square$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de x_0 pour une fonction ψ définie sur I (on précisera dans la réponse les conditions de régularité vérifiées par ψ).

Solution. On rappelle, comme demandé, le résultat du cours :

Théorème .

Formule de Taylor Young

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Si ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors elle admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Plus précisément, on peut écrire, pour x voisin de x_0

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\psi^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^k).$$

$\square$

8. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, dont on aura, au préalable, appelé le domaine de définition. Il est demandé de détailler la réponse.

Solution. Cette fonction correspond à la fonction g avec $t_0 = 1$. On a calculé les dérivées successives de f précédemment et celles-ci correspondent avec celles de f d'après la première question. Comme g est bien de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, elle admet en effet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. On a, pour t voisin de 0,

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n) = \sum_{k=0}^n t^k + o(t^n).$$

$\square$

9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1 - t)$, dont on aura aussi, au préalable, appelé le domaine de définition.

Solution. La fonction $t \mapsto \ln(1 - t)$ est définie (et de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $] -1, +\infty[$ et c'est la primitive de la fonction $-g$ (de la question précédente - avec $t_0 = 1$) qui s'annule en 0. D'après Taylor-Young, son développement limité d'ordre n , au voisinage de 0, est alors

$$\ln(1 - t) = - \sum_{k=1}^n \frac{g^{(k-1)}(0)}{k!} t^k + o(t^n) = - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + o(t^n).$$

$\square$

Partie I

1. Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive H de la fonction h telle que, pour tout réel strictement positif t :

$$h(t) = \frac{1}{t + t^2}.$$

Solution. Il s'agit de faire une décomposition en éléments simples. En effet, on observe que, pour tout $t > 0$, on a $h(t) = \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ et une primitive H de h est alors donnée par

$$\forall t > 0, \quad H(t) = \ln(t) - \ln(t+1) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

$\square$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, étudier la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2}$, puis la calculer.

Solution. Soit $n \geq 2$. Il est clair que $\frac{1}{t+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ et on sait que l'intégrale de Riemann $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente. Par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on peut donc affirmer que l'intégrale $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$ converge. Soit alors $A > n$. On a

$$\int_n^A \frac{dt}{t+t^2} = [H(t)]_n^A = H(A) - H(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{A}\right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

car $1/A \rightarrow 0$ et $\ln(1) = 0$. On peut donc écrire

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

□

3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = -n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)dt}{n + \cos(nt)} + \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Solution. Il suffit de calculer la première intégrale (qui est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment). Sans difficulté, on primitive à vue pour écrire

$$-n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)dt}{n + \cos(nt)} = [\ln|n + \cos(nt)|]_0^\pi = \ln(n + (-1)^n) - \ln(n + 1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - \ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Avec le calcul de la question précédente, on peut donc conclure que

$$u_n = -n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)dt}{n + \cos(nt)} + \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2} = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

□

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

Solution. Par théorème des gendarmes, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 2}$ a pour limite 0. Par continuité du log, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(1) = 0.$$

□

5. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, et λ un réel. Montrer que $\sum (a_n + \lambda b_n)$ est une série convergente.

Solution. Il suffit de montrer que la suite des sommes partielles a une limite finie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^n (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \lambda \sum_{k=0}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

et la série est bien convergente.

□

6. Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ (où, pour tout entier naturel $n \geq 2$, u_n a été introduit à la Question 3.).

Indication : on pourra poser, lorsque l'entier n tend vers l'infini : $h = \frac{1}{n}$, et utiliser un développement limité en h .

Solution. Comme la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 2}$ a pour limite 0, on peut utiliser le développement limité de $\ln(1-t)$ à l'ordre

2 avec $t = \frac{(-1)^n}{n}$, obtenu à la Question 9. du Préambule. On a, pour n assez grand

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = -\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^{2(n+1)}}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Supposons que $\sum u_n$ soit absolument convergente. Alors

$$\frac{1}{n} = \left| -\frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \left| u_n + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \leq |u_n| + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et par un critère de comparaison par équivalent il en est de même de la série de terme général $\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, le terme général $\frac{1}{n}$ s'écrit comme combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes ce qui implique (par la Question 5.) que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qu'on sait être faux. Ainsi, la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. $\square$

7. Pour tout entier naturel $N \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=2}^N u_k$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$S_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N}$$

Solution. Soit $N \geq 1$. On fait une sommation par paquet, selon la parité de l'indice de sommation :

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{k=2}^{2N} u_k = \sum_{j=1}^N u_{2j} + \sum_{j=1}^{N-1} u_{2j+1} \\ &= \sum_{j=1}^N \ln \left(1 + \frac{1}{2j}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} \ln \left(1 - \frac{1}{2j+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{2j+1}{2j}\right) + \sum_{j=1}^{N-1} \ln \left(\frac{2j}{2j+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^N (\ln(2j+1) - \ln(2j)) + \sum_{j=1}^{N-1} (\ln(2j) - \ln(2j+1)) = \ln(2N+1) - \ln(2N) \\ &= \ln \frac{2N+1}{2N}, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu. $\square$

b. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, comparer u_{2n+1} et u_{2n} .

Solution. Pour $n \geq 1$, on a $u_{2n+1} = \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \ln(2n) - \ln(2n+1) = -\ln \left(\frac{2n+1}{2n}\right) = -u_{2n}$. $\square$

c. En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$, S_{2N-1} .

Solution. D'après la question précédente, la somme de deux termes consécutifs est nulle. Pour $N \geq 1$,

$$S_{2N-1} = (u_2 + u_3) + \dots + ((u_{2(N-1)} + u_{2(N-1)+1})) = 0.$$

$\square$

d. Calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$$

Solution. Les deux suites (S_{2N}) et (S_{2N-1}) sont convergentes vers 0 d'après les deux questions précédentes. Il suit qu'il en est de même pour la suite (S_N) ce qui veut dire que la série $\sum$ converge et que sa somme est nulle,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0.$$

$\square$

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n , et tout réel $x > 1$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt.$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel non nul n . Étudier, pour tout réel $x > 1$, la convergence de l'intégrale $G_n(x)$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Posons, pour $x > 1$ et $t \geq 0$, $\varphi_n(x, t) = x^{-nt} t^n = t^n \exp(-n \ln(x)t)$.

Considérons $x > 1$ fixé. La fonction $t \mapsto \varphi_n(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrale définissant $G_n(x)$ est donc impropre en $+\infty$. Par croissance comparée (car $n \ln(x) > 0$), on a $\varphi_n(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, un argument de comparaison permet d'affirmer que l'intégrale définissant $G_n(x)$ est également convergente. $\square$

2. Soit $a > 1$. L'entier naturel non nul n est à nouveau fixé. Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$.

Solution. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- ✕ Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \varphi_n(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$ comme composée de fonctions usuelles continues.
- ✕ Pour tout $x \geq a$, la fonction $t \mapsto \varphi_n(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (produit de composée de fonctions continues usuelles).
- ✕ Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a

$$|\varphi_n(x, t)| \leq t^n \exp(-n \ln(a)t).$$

La fonction $t \mapsto t^n \exp(-n \ln(a)t)$ est indépendante de x et intégrable (par un argument de comparaison à $1/t^2$ par croissance comparée, comme à la question précédente), ce qui permet de voir que φ_n satisfait l'hypothèse de domination sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$.

Par théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, on peut conclure que G_n est continue sur $[a, +\infty[$. $\square$

3. Soit $a > 1$. L'entier naturel non nul n est à nouveau fixé.

Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, puis exprimer, pour tout $x \geq a$, $G'_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Solution. On utilise ici le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

- ✕ Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \varphi_n(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ comme composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut écrire

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x, t) = -\frac{nt}{x} \varphi_n(x, t).$$

- ✕ Pour tout $x \geq a$, la fonction $t \mapsto \varphi_n(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par ce qui précède dans les deux questions précédentes.
- ✕ Pour tout $x \geq a$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- ✕ Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a

$$\left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}(x, t) \right| \leq nt^{n+1} \exp(-n \ln(a)t).$$

car $1/x \leq 1/a \leq 1$.

La fonction $t \mapsto nt^{n+1} \exp(-n \ln(a)t)$ est indépendante de x et intégrable (par un argument de comparaison à $1/t^2$ par croissance comparée, comme à la question précédente), ce qui permet de voir que $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$ satisfait l'hypothèse de domination sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$.

Par théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres, on peut conclure que G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc dérivable) sur $[a, +\infty[$ et que, pour tout $x \geq a$,

$$G'_n(x) = -n \int_0^{+\infty} x^{-nt-1} t^{n+1} dt.$$

$\square$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x > 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

(On pourra commencer par utiliser le changement de variable $u = \frac{(n+1)t}{n}$.)

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ fixés. Le changement de variable $u = \frac{(n+1)t}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Il est donc licite et préserve la nature de l'intégrale. On

$$du = \frac{n+1}{n} dt$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} x^{-(n+1)t} dt = \frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} u^{n+1} x^{-nu} du \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \int_0^{+\infty} u^{n+1} \exp(-n \ln(x)u) du \end{aligned}$$

On continue à l'aide d'une intégration par parties en définissant deux fonctions g et h en posant

$$\begin{cases} h'(u) = \exp(-n \ln(x)u) \\ g(u) = u^{n+1} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} h(u) = -\frac{1}{n \ln(x)} \exp(-n \ln(x)u) \\ g'(u) = (n+1)u^n \end{cases}$$

Les deux fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et le crocher $[h(u)g(u)]_0^{+\infty}$ est convergent (l'évaluation en 0 est nulle et la limite en $+\infty$ aussi par croissance comparée). Le théorème d'intégration par partie généralisée permet d'écrire que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \int_0^{+\infty} u^{n+1} \exp(-n \ln(x)u) du = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \frac{n+1}{n \ln(x)} \int_0^{+\infty} u^n x^{-nu} du = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x),$$

ce qu'on voulait. $\square$

5. Soit $x > 1$. Que vaut $G_1(x)$?

Solution. Par définition (puis par IPP généralisée)

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \int_0^{+\infty} x^{-t} t dt = \int_0^{+\infty} t e^{-\ln(x)t} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{t e^{-\ln(x)t}}{\ln(x)} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\ln(x)} \int_0^{+\infty} e^{-\ln(x)t} dt \\ &= \frac{1}{\ln(x)} \left[\frac{e^{-\ln(x)t}}{\ln(x)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\ln^2(x)}. \end{aligned}$$

$\square$

6. Exprimer, pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel non nul n , $G_n(x)$ en fonction de n . On pensera à faire intervenir des produits successifs (aussi appelés *en cascade*). Une preuve faisant intervenir explicitement une récurrence est attendue.

Solution. Commençons par écrire la formule obtenue à la Question 4. *en cascade*

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n G_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{\ln^2(x)} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1} G_{n-2}(x) \\ &= \frac{1}{\ln^{n-1}(x)} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1} \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 G_1(x) \end{aligned}$$

On va donc montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x > 1, G_n(x) = \frac{1}{\ln^{n+1}(x)} \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$$

✕ Initialisation. Pour $n = 1$, le produit est vide, il est égal à 1. On retrouve bien, pour tout $x > 1$, $G_1(x) = \frac{1}{\ln^2(x)}$ et la formule est vraie.

✕ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $x > 1$, on ait $G_n(x) = \frac{1}{\ln^{n+1}(x)} \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$. Alors

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x) \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{1}{\ln(x)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{\ln^{n+1}(x)} \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \\ &= \frac{1}{\ln^{n+2}(x)} \prod_{k=2}^{n+1} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k, \end{aligned}$$

ce qui termine cette récurrence.

Il reste à simplifier ce produit. On calcule les premiers termes pour conjecturer une formule. On voit que

$$\prod_{k=2}^2 \left(\frac{k-1}{k} \right)^k = \frac{1}{2^2}, \quad \prod_{k=2}^3 \left(\frac{k-1}{k} \right)^k = \frac{1 \times 2}{3^3}, \quad \prod_{k=2}^4 \left(\frac{k-1}{k} \right)^k = \frac{1 \times 2 \times 3}{4^4},$$

ce qui permet de conjecturer que; pour tout $n \geq 2$, $\prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k} \right)^k = \frac{(n-1)!}{n^n}$, ce qu'on démontrera par une autre récurrence (dont on ne montre que le caractère héréditaire). On notera que la formule s'étend à $n = 1$: les deux termes sont bien égaux à 1.

Soit $n \geq 1$. Si la formule est vraie, alors

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(\frac{k-1}{k} \right)^k = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \times \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{n \times n^n}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{(n-1)!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

ce qui termine cette récurrence.

Bilan : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > 1$

$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{n^n \ln^{n+1}(x)}.$$

□

7. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$, puis, lorsque cette condition est vérifiée, calculer sa somme $S(x)$.

Solution. D'après la question précédente, une simplification du quotient immédiate permet de voir que la série de terme général $\frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$ est exactement la série géométrique de terme général $\left(\frac{1}{\ln(x)} \right)^{n+1}$. Cette série est convergente si et seulement si

$$\left| \frac{1}{\ln(x)} \right| < 1.$$

Or, $x > 1$, on a donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!} \text{ converge } \iff x > e.$$

Auquel cas

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^{n+1}(x)} = \sum_{j=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln(x)} \right)^j = \frac{1}{\ln^2(x)} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{\ln(x)(\ln(x) - 1)}.$$

□

8. Soit $N \geq 2$. On pose:

$$\Pi_N = e \prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

Calculer :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N).$$

Solution. On imagine que n est un entier fixé. Par la Question 6. et en reprenant les notations de la fin de la **Partie 1**, on a

$$\begin{aligned} G_n(\Pi_N) &= \frac{(n-1)!}{n^n} \times \frac{1}{\ln^{n+1} \left(e \prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) \right)} \\ &= \frac{(n-1)!}{n^n} \times \frac{1}{\left(1 + \sum_{k=2}^{2N} \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) \right)^{n+1}} = \frac{(n-1)!}{n^n} \times \frac{1}{(1 + S_{2N})^{n+1}} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} \end{aligned}$$

car $S_{2N} \rightarrow 0$.

□

Partie III

Pour tout couple (x, y) de réels distincts, on pose :

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \ln|x - y|.$$

1. Exprimer, pour tout couple (x, y) de réels distincts, la hessienne de la fonction φ .

Solution. Ce n'est pas demandé mais justifions que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ et qu'elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2.

✕ La fonction $(x; y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur $\mathcal{U}$;

✕ La fonction $(x; y) \mapsto x - y$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur $\mathcal{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$;

✕ La fonction $t \mapsto \ln|t|$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition de telles fonctions.

Par composition puis par somme, φ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$.

De plus, pour tout (x, y) dans $\mathcal{U}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2x - \frac{1}{x - y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{1}{y - x}$$

puis (par le lemme de Schwarz les dérivées partielles $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ sont égales)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = 2 + \frac{1}{(x - y)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{1}{(x - y)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = 2 + \frac{1}{(x - y)^2}$$

et on peut écrire

$$H_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(x - y)^2} & \frac{-1}{(x - y)^2} \\ \frac{-1}{(x - y)^2} & 2 + \frac{1}{(x - y)^2} \end{pmatrix}.$$

□

2. Montrer que la fonction φ admet un point critique en (x_0, y_0) si

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}.$$

Solution. Par définition

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) \text{ point critique de } \varphi &\iff \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_0 - \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \\ 2y_0 - \frac{1}{y_0 - x_0} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x_0 = \frac{1}{x_0 - y_0} \\ -2y_0 = \frac{1}{x_0 - y_0} \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{-y_0}{x_0 - y_0} \\ 2x_0 = \frac{1}{x_0 - y_0} \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne bien le système de conditions qu'on voulait.

□

3. Quelles sont les valeurs possibles des réels x_0 et y_0 introduits à la Question 2?

Solution. Le système donne

$$\begin{cases} x_0 = \frac{-y_0}{x_0 - y_0} \\ 2x_0 = \frac{1}{x_0 - y_0} \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{-y_0}{x_0 - y_0} \\ x_0 = \frac{1}{4x_0} \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = \pm \frac{1}{2} \\ y_0 = \mp \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc deux points critiques : $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

□

4. Montrer que, pour les valeurs possibles de x_0 et y_0 obtenues à la question précédente, la fonction φ admet un minimum local en (x_0, y_0) .

Solution. Il faut déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne de φ en ces deux points critiques. On a

$$H_\varphi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = H_\varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour valeurs propres 2 et 4 toutes deux strictement positives : φ présente donc un minimum local en chacun de ces deux points critiques. On constate que

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

qui est donc la valeur de ce minimum local.

□

5. En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \mathcal{O}(N).$$

En déduire que la minoration de la fonction φ obtenue à la Question 4. n'est pas suffisante pour étudier la convergence de la série de terme général $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$.

Solution. Cette question me pose problème. On a envie de penser, au vu du manque d'indication (ce qui va *a contrario* de tout le reste du sujet) qu'il faut utiliser uniquement le caractère local de ce minimum.

Par exemple en considérant une suite de points $M_n = (x_n, y_n)$ qui tend, coordonnée par coordonnée, vers $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ de telle sorte que, pour n assez grand, $\varphi(M_n) \geq 1/2$.

Plus précisément, observons que

$$\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \begin{cases} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), & \text{si } n \text{ pair} \\ -\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right), & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Commençons par considérer $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ et $y_n = -\frac{1}{2}$. Alors, pour n assez grand,

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = x_n^2 + y_n^2 - \varphi(M_n) \leq x_n^2 + y_n^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

De la même manière, avec $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}$ et $y_n = -\frac{1}{2}$, toujours pour n assez grand,

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = x_n^2 + y_n^2 - \varphi(M_n) \leq x_n^2 + y_n^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} \leq 2.$$

Ainsi, notant N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, $\varphi(M_n) \geq 1/2$, on a

$$\sum_{n=2}^N \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \sum_{n=2}^{N_0-1} \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| + \sum_{n=N_0}^N \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \mathcal{O}(N)$$

car la première somme est une constante et le terme général de la deuxième somme est majorée par une constante.

La série de terme général $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$ est à termes positifs; sa suite des sommes partielles est croissante et il suffit de montrer qu'elle est majorée pour conclure à la convergence. Hélas, l'estimation obtenue ci-dessus n'est pas assez précise et n'est pas suffisante pour conclure à la majoration (par une constante) nécessaire pour pouvoir conclure que la série converge.

Remarque. Cela me paraît beaucoup d'effort et difficilement accessible pour des étudiants de **PT**. Peut-être qu'une méthode plus directe s'appliquait ici à côté de laquelle je passe. Je remercie David Denoncin et Bruno Calado pour les échanges et suggestions autour de cette question. $\square$