

Remarque : Ce corrigé a été produit avec l'assistance de l'IA gemini ce qui a permis un gain de temps considérable. Cependant toutes les réponses ont été scrupuleusement vérifiées et reprises "à la main". Seule la réponse à la dernière question a été laissée en l'état : j'avoue ne pas avoir trouvé comment "en déduire" de φ cette domination. (Domination totalement évidente par ailleurs et bien inutile vu la question I.6...

Préambule

Dans ce qui suit, t_0 désigne un réel strictement positif.

1. Soient f et g les fonctions qui, à tout réel $t \neq t_0$, associent respectivement :

$$f(t) = \frac{t}{t_0 - t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t_0}{t_0 - t}$$

Donner le domaine de dérivabilité de f et g et montrer que, pour tout réel t de ce domaine, les dérivées de f et g coïncident. Il est demandé d'explicitier ces dérivées.

Correction :

Les fonctions f et g sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule qu'en t_0 . Leur domaine de dérivabilité est donc $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$.

Pour tout $t \neq t_0$:

$$f'(t) = \frac{1 \cdot (t_0 - t) - t \cdot (-1)}{(t_0 - t)^2} = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$$

$$g'(t) = t_0 \frac{-(-1)}{(t_0 - t)^2} = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$$

On constate bien que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f'(t) = g'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$.

Remarque : on aurait pu constater dès le départ que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, g(t) - f(t) = 1$

2. Donner le tableau de variations de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$ en précisant les limites aux bornes.

Correction :

Puisque $t_0 > 0$, la dérivée $f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$ est strictement positive sur tout son domaine. f est donc strictement croissante sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

Limites :

- En $\pm\infty$: $f(t) \sim \frac{t}{-t} = -1$, donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = -1$.
- En t_0^- : le numérateur tend vers $t_0 > 0$, et $(t_0 - t) \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = +\infty$.
- En t_0^+ : le numérateur tend vers $t_0 > 0$, et $(t_0 - t) \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = -\infty$.

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	+		+
Variations de f	$-1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -1$

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0.

Correction :

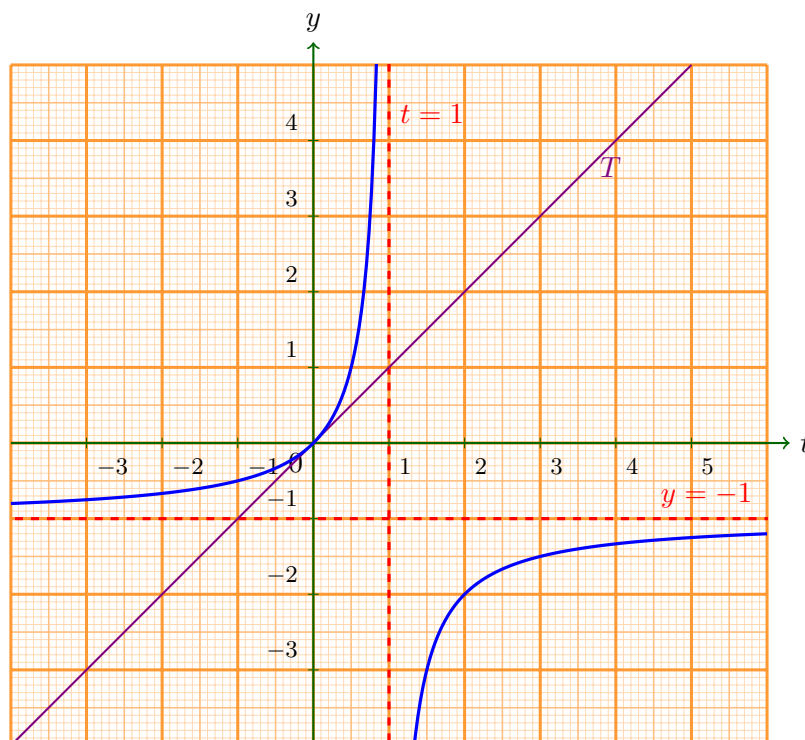
On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{t_0}{t_0^2} = \frac{1}{t_0}$. L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)(t - 0) + f(0)$, soit :

$$y = \frac{t}{t_0}$$

4 Tracer, sur la feuille de papier millimétrée fournie, la tangente T et l'allure du graphe de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$ pour la valeur $t_0 = 1$, à l'échelle une unité pour un cm.

Correction :

Pour $t_0 = 1$, l'équation de la tangente T en 0 est $y = t$. La courbe possède une asymptote verticale d'équation $t = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$. La fonction est strictement croissante sur ses deux intervalles de définition.



5. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que la fonction f est n fois dérivable sur $] - \infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, et donner, à l'aide d'une démonstration par récurrence, l'expression de sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^{(n)}$, sur $] - \infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

Correction :

Soit t un réel dans l'un des deux intervalles précédents.

Remarquons que $f(t) = \frac{t - t_0 + t_0}{t_0 - t} = -1 + g(t) = -1 + \frac{t_0}{t_0 - t}$. La fonction f est indéfiniment dérivable comme fonction rationnelle.

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(t) = \frac{n!t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$, ce qui correspond bien à la formule pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons la propriété vraie au rang n .

$$f^{(n+1)}(t) = \left(f^{(n)}(t)\right)' = n!t_0 \left(-(n+1)(-1) \frac{1}{(t_0 - t)^{n+2}} \right) = \frac{(n+1)!t_0}{(t_0 - t)^{n+2}}$$

Ce qui est bien la propriété au rang $n + 1$. *Conclusion :* La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Ainsi : f est indéfiniment dérivable et $\forall t \in] - \infty, t_0[\cup]t_0, +\infty[, \forall n \geq 1, f^{(n)}(t) = \frac{n!t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$

6. Déterminer une primitive G de g sur $] - \infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, puis une primitive F de f sur $] - \infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

Correction :

On a $g(t) = \frac{t_0}{t_0 - t} = -t_0 \frac{-1}{t_0 - t}$. Une primitive G sur chaque intervalle est donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, G(t) = -t_0 \ln |t_0 - t|$$

Puisque $f = -1 + g$, une primitive F de f s'obtient par linéarité :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, F(t) = -t - t_0 \ln |t_0 - t|$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de x_0 pour une fonction ψ définie sur I (on précisera dans la réponse les conditions de régularité vérifiées par ψ).

Correction :

Soit f une fonction définie sur I et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors, au voisinage de x_0 , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

8. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ dont on aura, au préalable, rappelé le domaine de définition. Il est demandé de détailler la réponse.

Correction :

Il s'agit de g lorsque $t_0 = 1$, donc le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Au voisinage de 0, on a le développement limité usuel :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + o(t^n) = \sum_{k=0}^n t^k + o(t^n)$$

Pour démontrer ceci, on se sert de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison t . Pour tout $t \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^n t^k = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

En décomposant la fraction du membre de droite, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

Ce qui nous permet d'isoler la fonction étudiée :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

Étudions maintenant ce terme de reste au voisinage de 0. On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{t^{n+1}}{1-t} = t^n \underbrace{\left(\frac{t}{1-t} \right)}_{=\varepsilon(t)}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1-t} = 0$, on a bien $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Par définition, ce reste s'écrit donc $o(t^n)$. On en déduit le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$\boxed{\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + o(t^n) = \sum_{k=0}^n t^k + o(t^n)}$$

9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$, dont on aura aussi, au préalable, rappelé le domaine de définition.

Correction :

Le domaine de définition est $] -\infty, 1[$. En intégrant le développement limité précédent, sachant qu'une primitive de $t \mapsto \frac{-1}{1-t}$ est $t \mapsto \ln(1-t)$ et s'annule en 0 :

$$-\ln(1-t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+1}}{k+1} + o(t^n)$$

Ce qui donne :

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + o(t^n)$$

Partie I

1. Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$ une primitive H de la fonction h telle que, pour tout réel strictement positif t :

$$h(t) = \frac{1}{t+t^2}$$

Correction :

h est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\forall t > 0, h(t) = \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1+t-t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Une primitive H sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :

$$H : t \mapsto \ln(t) - \ln(t+1) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

Ainsi :

$$\forall t > 0, H(t) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, étudier la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$, puis la calculer.

Correction :

Remarque : On pourrait étudier la convergence à part :

En $+\infty$, $h(t) \sim \frac{1}{t^2}$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de référence intégrable en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), donc d'après le critère d'équivalence, h est intégrable en $+\infty$ et l'intégrale converge. C'est cependant inutile car l'intégrale se calcule directement par primitivation de h ;

Soit x un réel strictement positif :

$$\begin{aligned} \int_n^x \frac{dt}{t+t^2} &= \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) \right]_n^x \\ &= \ln\left(\frac{1}{1+1/x}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$ est convergente et

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = -n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)dt}{n + \cos(nt)} + \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

Correction :

Soit $n \geq 2$, calculons la première intégrale :

En posant le changement de variable usuel affine $u = nt$, $du = n dt$:

$$\begin{aligned} -n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n + \cos(nt)} dt &= - \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{n + \cos u} du \\ &= [\ln(n + \cos u)]_0^{n\pi} \\ &= \ln(n + \cos(n\pi)) - \ln(n + \cos(0)) \\ &= \ln(n + (-1)^n) - \ln(n + 1) \end{aligned}$$

car $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

En ajoutant la deuxième intégrale trouvée à la question 2 :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n + (-1)^n) - \ln(n + 1) + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= \ln(n + (-1)^n) - \ln(n) \\ &= \ln \left(\frac{n + (-1)^n}{n} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \geq 2, u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

Correction :

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0.

Par continuité de la fonction logarithme en 1, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(1 + 0) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

5. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, et λ un réel. Montrer que $\sum (a_n + \lambda b_n)$ est une série convergente.

Correction :

Soient $A_N = \sum_{k=0}^N a_k$ et $B_N = \sum_{k=0}^N b_k$ les sommes partielles. Puisque les deux séries convergent, les suites (A_N) et (B_N) admettent des limites finies A et B .

La somme partielle de la combinaison linéaire est $S_N = \sum_{k=0}^N (a_k + \lambda b_k) = A_N + \lambda B_N$. Par opérations sur les limites, (S_N) converge vers $A + \lambda B$.

La série de terme général $(a_n + \lambda b_n)$ est donc convergente.

6. Étudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$. (où, pour tout entier naturel $n \geq 2$, u_n a été introduit à la question I.3.)

Indication : on pourra poser, lorsque l'entier n tend vers l'infini : $h = \frac{1}{n}$, et utiliser un développement limité en h .

Correction :

Au voisinage de $+\infty$, on effectue un DL de u_n :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le C.S.S.A. (Série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant en valeur absolue). La série $\sum \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$ est de signe constant (négatif) à partir d'un certain rang et équivalente à $-\frac{1}{2n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). D'après la question 5, la somme de ces deux séries converge, donc $\sum u_n$ converge.

Cependant, $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ en $+\infty$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique),

donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

Remarque : Pour justifier que $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ on remarque que $nu_n = (-1)^n + o(1)$ et donc $n|u_n| = |1 + o(1)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

7. Pour tout entier naturel $N \geq 2$, on pose :

$$S_N = \sum_{k=2}^N u_k$$

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$S_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N}$$

Correction :

Rappelons que pour tout $n \geq 2$, $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

Commençons par calculer la somme de deux termes consécutifs u_{2p} et u_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{2p} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{2p+1} \right)$$

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \ln \left(\frac{2p+1}{2p} \right) + \ln \left(\frac{2p}{2p+1} \right)$$

En utilisant la propriété $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$, on obtient :

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \ln \left(\frac{2p+1}{2p} \times \frac{2p}{2p+1} \right) = \ln(1) = 0$$

Exprimons maintenant S_{2N} à l'aide de ces paires. Par associativité de la somme :

$$S_{2N} = \sum_{k=2}^{2N} u_k = \left(\sum_{p=1}^{N-1} (u_{2p} + u_{2p+1}) \right) + u_{2N}$$

D'après le calcul précédent, chaque terme $(u_{2p} + u_{2p+1})$ est nul. La somme de gauche est donc nulle, et il reste :

$$S_{2N} = 0 + u_{2N} = \ln \left(1 + \frac{1}{2N} \right)$$

Ce qui nous donne le résultat final :

$$S_{2N} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right)$$

(b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, comparer u_{2n+1} et u_{2n} .

Correction :

On a montré en 7.(a) que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} + u_{2p+1} = 0$, donc :

$$\forall n \geq 1, u_{2n+1} = -u_{2n}$$

(c) En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$, S_{2N-1} .

Correction :

Soit $N \geq 2$. On a obtenu en 7.(a) que $S_{2N} = 0 + u_{2N}$, or par définition de la somme partielle $S_{2N} = S_{2N-1} + u_{2N}$. Et donc

$$\forall N \geq 2, S_{2N-1} = 0$$

(d) Calculer : $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$

Correction :

Les sous-suites des sommes partielles paires et impaires admettent la même limite : $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2N} \right) = 0 \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} = 0.$$

La suite (S_N) converge donc vers 0. Ainsi, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0$.

Remarque : On peut aussi simplement dire que la série étant convergente, sa somme est la limite de ses sommes partielles, qui est la même que celle de ses suites extraites, c'est-à-dire 0.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n , et tout réel $x > 1$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel non-nul n . Étudier, pour tout réel $x > 1$ la convergence de l'intégrale $G_n(x)$.

Correction :

Soit $x > 1$ un réel fixé. La fonction $t \mapsto x^{-nt} t^n = e^{-nt \ln x} t^n$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Posons $\alpha = \frac{1}{2} n \ln x > 0$. alors $\forall t \geq 0, x^{-nt} t^n = (t^n e^{-\alpha t}) e^{-\alpha t}$

Et par croissances comparées, $t^n e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, $x^{-nt} t^n = o(e^{-\alpha t})$. Et comme $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est une fonction de référence intégrable en $+\infty$, d'après le critère de prépondérance pour les fonctions intégrables, $t \mapsto x^{-nt} t^n$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale $G_n(x)$ converge.

2. Soit $a > 1$. L'entier naturel non-nul n est à nouveau fixé. Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$.

Correction :

Commençons par énoncer le théorème utilisé :

Théorème de continuité sous l'intégrale :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si :

(H₁) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur J .

(H₂) Pour presque tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .

(H₃) (Hypothèse de domination) : Il existe une fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur I .

Appliquons le théorème précédent : ici $I = [a, +\infty[$ et $J = [0, +\infty[$, et f est la fonction intégrande g_n définie par :

$$\begin{aligned} g_n : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto x^{-nt} t^n = t^n e^{-nt \ln x} \end{aligned}$$

— **Continuité de g_n** : Justifions que g_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[\times [0, +\infty[$:

— Les fonctions $(x, t) \mapsto t$ et $(x, t) \mapsto x$ sont des fonctions polynomiales de deux variables, elles sont donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.

— Par produit et puissance, $(x, t) \mapsto t^n$ et $(x, t) \mapsto -nt$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.

— La fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction usuelle $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ (car $a > 1$). Par composition avec la projection $(x, t) \mapsto x$, la fonction $(x, t) \mapsto \ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.

— Par produit, $(x, t) \mapsto -nt \ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.

— Par composition avec la fonction usuelle $\exp$, $(x, t) \mapsto e^{-nt \ln x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.

Finalement, g_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. En particulier ses applications partielles sont toutes continues et donc :

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g_n(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc (H_1) est vérifiée.
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g_n(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$ donc (H_2) est vérifiée.
- **Hypothèse de domination** : Soit $(x, t) \in I \times J$. Puisque $x \geq a > 1$, la fonction $x \mapsto x^{-nt}$ est décroissante pour $t \geq 0$. On a donc :

$$\forall x \geq a, \quad \forall t \geq 0, \quad |g_n(x, t)| \leq g_n(a, t)$$

On introduit alors la fonction de domination φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto g_n(a, t) = a^{-nt} t^n \end{aligned}$$

Cette fonction φ est indépendante de x . De plus, d'après la question II.1, φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $a > 1$ donc (H_3) est vérifiée.

Toutes les hypothèses étant vérifiées, on en déduit que :

la fonction $G_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} g_n(x, t) dt$ est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$

3. Soit $a > 1$. L'entier naturel non-nul n est à nouveau fixé.

Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, puis exprimer, pour tout $x \geq a$, $G'_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Correction :

Soit $a > 1$. Montrons que G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.

Théorème de dérivation sous l'intégrale :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Si :

- (H_1) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur J .
- (H_2) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- (H_3) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J .
- (H_4) (Hypothèse de domination) : Il existe une fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ **intégrable** sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- **et pour tout** $x \in I : F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Appliquons ce théorème à la fonction intégrande g_n sur $I \times J = [a, +\infty[\times [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g_n : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto t^n e^{-nt \ln x} \end{aligned}$$

Comme justifié précédemment, g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et donc $\mathcal{C}^1$) sur $I \times J$ comme produit et composée de fonctions usuelles de deux variables. Cela assure immédiatement que :

- $(H_1, \text{partie continuité})$: Pour tout $x \in I$, $t \mapsto g_n(x, t)$ est continue sur J .

— (H_2) : Pour tout $t \in J$, $x \mapsto g_n(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Sa dérivée partielle est :

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} : (x, t) \mapsto -n \frac{t^{n+1}}{x} e^{-nt \ln x} = -n \frac{t^{n+1}}{x^{nt+1}}$$

— (H_3) : Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J .

Il reste à vérifier les conditions d'intégrabilité et de domination :

— **Intégrabilité (H_1)** : Pour tout $x \geq a > 1$, $t \mapsto g_n(x, t)$ est intégrable sur J d'après II.1. (H_1) est vérifiée.

— **Domination (H_4)** : Pour tout $(x, t) \in I \times J$, comme $x \geq a > 1$, la fonction $x \mapsto x^{-(nt+1)}$ est décroissante pour $t \geq 0$. On a donc :

$$\left| \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t) \right| = n \frac{t^{n+1}}{x^{nt+1}} \leq n \frac{t^{n+1}}{a^{nt+1}}$$

On pose la fonction de domination φ :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto n \frac{t^{n+1}}{a^{nt+1}} \end{aligned}$$

φ est indépendante de x , continue sur J et intégrable sur J (car $a > 1$) d'après II.1. (H_4) est vérifiée.

G_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. Par caractère local :

$$G_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[\quad \text{et} \quad G'_n : x \mapsto -n \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{x^{nt+1}} dt$$

Remarque : Il était un peu lourd de séparer dans ce cas la continuité et la dérivation puisque la dérivation implique la continuité... Mais la question 3 venant après la question 2...

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x > 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

(On pourra commencer par utiliser le changement de variable $u = \frac{(n+1)t}{n}$.)

Correction :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$. On a $G_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} x^{-(n+1)t} dt$.

1. **Changement de variable** : Effectuons le changement de variable usuel affine $u = \frac{n+1}{n}t$, soit $t = \frac{n}{n+1}u$.

La fonction $\phi : u \mapsto \frac{n}{n+1}u$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

On a $\forall u > 0, \phi'(u) = \frac{n}{n+1}$. L'intégrale $G_{n+1}(x)$ étant convergente, on a :

$$G_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}u \right)^{n+1} x^{-nu} \left(\frac{n}{n+1} \right) du = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+2} \int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du$$

2. **Intégration par parties** : Posons $I = \int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du$ et appliquons une intégration par parties généralisée :

— **Fonctions** : $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto u^{n+1}$ $u \mapsto -\frac{x^{-nu}}{n \ln x}$

— **Régularité** : f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ avec $f'(u) = (n+1)u^n$ et $g'(u) = x^{-nu}$.

— **Crochet** : $f(u)g(u) = -\frac{u^{n+1}x^{-nu}}{n \ln x}$. En 0, la limite est nulle. En $+\infty$, par croissance comparée ($x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$), la limite est nulle aussi. Le crochet est donc nul.

— **Nature** : Le crochet étant fini et l'intégrale de départ convergente :

$$I = [f(u)g(u)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)u^n \left(-\frac{x^{-nu}}{n \ln x} \right) du = \frac{n+1}{n \ln x} \int_0^{+\infty} u^n x^{-nu} du$$

On reconnaît $G_n(x)$ dans l'intégrale de droite, d'où $I = \frac{n+1}{n \ln x} G_n(x)$.

3. **Conclusion** : En réinjectant l'expression de I dans celle de $G_{n+1}(x)$:

$$G_{n+1}(x) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+2} \frac{n+1}{n \ln x} G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

On obtient bien la relation demandée :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

5. Soit $x > 1$. Que vaut $G_1(x)$?

Correction :

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} t x^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t \ln x} dt$$

On intègre par parties ($u = t, v' = e^{-t \ln x}$) :

$$G_1(x) = \left[t \frac{-e^{-t \ln x}}{\ln x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\ln x} \int_0^{+\infty} e^{-t \ln x} dt = 0 + \frac{1}{\ln x} \left[\frac{-e^{-t \ln x}}{\ln x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$\text{ainsi : } \forall x > 1, G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$$

6. Exprimer, pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel non nul n , $G_n(x)$ en fonction de n . On pensera à faire intervenir des produits successifs (aussi appelés *en cascade*). Une preuve faisant intervenir explicitement une récurrence est attendue.

Correction :

Soit $x > 1$ un réel fixé pour toute la question.

1. **Établissement par substitutions successives (cascade)** :

Partons de la relation de récurrence de la question II.4 :

$$G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n G_{n-1}(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{(n-1)^n}{n^n} G_{n-1}(x)$$

En substituant $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots$ jusqu'à G_1 , on obtient la chaîne suivante :

$$\begin{aligned}
- & G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{(n-1)^n}{n^n} G_{n-1}(x) \\
- & G_{n-1}(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{(n-2)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} G_{n-2}(x) \\
- & G_{n-2}(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{(n-3)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}} G_{n-3}(x) \\
- & \dots \\
- & G_2(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{1^2}{2^2} G_1(x)
\end{aligned}$$

En injectant chaque expression dans la précédente, le terme $G_n(x)$ s'écrit :

$$G_n(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{\ln x} \right) \times \dots \times \left(\frac{1}{\ln x} \right)}_{(n-1) \text{ fois}} \times \left[\frac{(n-1)^n}{n^n} \times \frac{(n-2)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \times \dots \times \frac{1^2}{2^2} \right] \times G_1(x)$$

On observe des simplifications dans le crochet. Pour chaque entier $k \in \{2, \dots, n-1\}$, le terme k apparaît à la puissance $k+1$ au numérateur et à la puissance k au dénominateur, laissant un facteur k au numérateur :

$$\frac{(n-1)^n}{(n-1)^{n-1}} = (n-1), \quad \frac{(n-2)^{n-1}}{(n-2)^{n-2}} = (n-2), \quad \dots$$

Le crochet se simplifie donc en $\frac{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1^2}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^n}$.

$$\text{Ainsi : } G_n(x) = \frac{1}{(\ln x)^{n-1}} \times \frac{(n-1)!}{n^n} \times G_1(x).$$

Sachant que $G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$, on conjecture la formule :

$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{n \times (n-1)!}{n \times n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}}$$

2. Validation par récurrence :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on considère $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $G_n(x) = \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}}$.

$$- \text{ Initialisation pour } n = 1 : G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2} \text{ et } \frac{1!}{(1 \ln x)^{1+1}} = \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Alors d'après II.4

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

Et d'après hypothèse de récurrence :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n!}{n^{n+1} (\ln x)^{n+1}}$$

En simplifiant par n^{n+1} et en regroupant les termes en $\ln x$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{n!}{(n+1)^{n+1} (\ln x)^{n+2}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(n+1)$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2} (\ln x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{((n+1) \ln x)^{n+2}}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie
 et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.
 D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) = \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}}$$

7. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$, puis, lorsque cette condition est vérifiée, calculer sa somme $S(x)$.

Correction :

Le terme général est $v_n = \frac{n^n}{(n-1)!} \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{n^{n+1} (\ln x)^{n+1}} = \left(\frac{1}{\ln x} \right)^{n+1}$.

Il s'agit d'une série géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln x}$.

Condition de convergence : $|q| < 1 \iff \frac{1}{\ln x} < 1 \iff \ln x > 1 \iff x > e$
 (car on a $x > 1$ donc $\ln x > 0$)

Calcul de la somme (avec premier terme pour $n = 1$) :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\ln x} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{(\ln x)^2} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{\ln x (\ln x - 1)}$$

8. Soit $N \geq 2$. On pose :

$$\Pi_N = e \prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$$

Calculer :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N)$$

Correction :

En passant au logarithme, on retrouve la somme S_{2N} de la **Partie I** :

$$\ln(\Pi_N) = \ln(e) + \sum_{k=2}^{2N} \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) = 1 + S_{2N}$$

Or on sait que $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} = 0$. Par continuité de la fonction exponentielle, il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Pi_N = e^{1+0} = e$$

Or la fonction G_n est continue sur $]1, +\infty[$ d'après II.2. Comme $e > 1$, par continuité :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N) = G_n(e)$$

En utilisant l'expression établie en II.6, on a $G_n(e) = \frac{n!}{(n \ln e)^{n+1}}$. Sachant que $\ln e = 1$, on conclut :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N) = \frac{n!}{n^{n+1}}$$

Partie III

Pour tout couple (x, y) de réels distincts, on pose :

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \ln |x - y|$$

1. Exprimer, pour tout couple (x, y) de réels distincts, la hessienne de la fonction φ .

Correction :

φ est définie sur $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

$u \mapsto \ln |u|$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc par composition et combinaison linéaire avec des fonctions polynomiales, φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_\varphi$.

Les dérivées partielles d'ordre 1 sont (en notant que $\ln |x - y|$ a pour dérivée $1/(x - y)$ par rapport à x) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x - y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y + \frac{1}{x - y}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{(x - y)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(x - y)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x - y)^2}$$

La matrice Hessienne est donc :

$$H_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(x - y)^2} & -\frac{1}{(x - y)^2} \\ -\frac{1}{(x - y)^2} & 2 + \frac{1}{(x - y)^2} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que la fonction admet un point critique en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

Correction :

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(x_0, y_0) est un point est critique de $\varphi \iff \nabla \varphi(x_0, y_0) = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x_0 - \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \\ 2y_0 + \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} 2x_0 - \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \\ 2(x_0 + y_0) = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\iff \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)} = 0 \\ x_0 = -y_0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$(x_0, y_0) \text{ est un point est critique de } \varphi \iff x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

3. Quelles sont les valeurs possibles des réels x_0 et y_0 introduits à la question 2 ?

Correction :

On sait que $y_0 = -x_0$. Donc $x_0 - y_0 = 2x_0$.

L'équation devient $x_0 = \frac{1}{2(2x_0)} = \frac{1}{4x_0}$, d'où $4x_0^2 = 1 \implies x_0^2 = 1/4 \implies x_0 = \pm 1/2$.

Les points critiques possibles sont donc $(1/2, -1/2)$ et $(-1/2, 1/2)$.

4. Montrer que, pour les valeurs possibles de x_0 et y_0 obtenues à la question précédente, la fonction admet un minimum local en (x_0, y_0) .

Correction :

Évaluons la matrice Hessienne en ces points.

Dans les deux cas, on a $(x_0 - y_0)^2 = 1$, donc $\frac{1}{(x_0 - y_0)^2} = 1$.

La matrice Hessienne devient : $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Or $\det(H) = 9 - 1 = 8 > 0$ donc les deux valeurs propres de H sont non-nulles et de même signe. Et $\text{Tr}(H) = 6 > 0$, donc ces valeurs propres sont strictement positives.

Donc φ admet un minimum local en (x_0, y_0) .

5. En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \mathcal{O}(N)$$

En déduire que la minoration de la fonction φ obtenue à la question 4. n'est pas suffisante pour étudier la convergence de la série de terme général $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$.

Correction :

Le minimum local vaut $\varphi(1/2, -1/2) = (1/2)^2 + (-1/2)^2 - \ln(1) = 1/2$.

L'inégalité $\varphi(x, y) \geq 1/2$ (valable localement ou globalement sur un domaine) implique que

$$\ln |x - y| \leq x^2 + y^2 - 1/2 \leq x^2 + y^2$$

.

En choisissant astucieusement x et y pour que $|x - y| = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, on pourrait borner la suite

$v_n = \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$. En effet, une telle majoration assure que v_n est bornée par une constante M (puisque l'on sait que la suite est par ailleurs convergente).

Par suite, la somme partielle se majore trivialement : $\sum_{n=2}^N v_n \leq \sum_{n=2}^N M \leq M \cdot N$, ce qui est bien un $\mathcal{O}(N)$.

Cependant, savoir qu'une somme de termes positifs est un $\mathcal{O}(N)$ (donc qu'elle croît au plus linéairement) ne permet absolument pas de conclure quant à la convergence de la série. (Une série convergente est un $\mathcal{O}(1)$, tandis qu'une série divergente comme la série harmonique est un $\mathcal{O}(\ln N)$)

et donc aussi un $\mathcal{O}(N)$). Cette minoration de φ fournit une borne trop lâche pour conclure. (On a vu en I.6 que la série divergeait en l'occurrence).

Remarque : Cette réponse n'est pas vraiment satisfaisante (quel serait ce choix astucieux ???) et il est bien inutile de passer par φ pour obtenir un majorant de v_n , par ailleurs on avait déjà montré la série de terme général v_n est divergente en I.6, ce qui rend cette question totalement inutile.

Dans ce problème, un peu éclectique, on s'intéresse à divers types de convergence : de séries entières, de séries, de combinaisons linéaires de séries, d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. Un détour par des fonctions de deux variables montre que le calcul différentiel peut, aussi, être utilisé pour obtenir des estimations de sommes partielles, tout en gardant à l'esprit que cela ne permet pas toujours d'obtenir des estimations optimales.