

Préambule

Dans ce qui suit, t_0 désigne un réel strictement positif.

1. Soient f et g les fonctions qui, à tout réel $t \neq t_0$, associent respectivement :

$$f(t) = \frac{t}{t_0 - t} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t_0}{t_0 - t}$$

Donner le domaine de dérivabilité de f et g et montrer que, pour tout réel t de ce domaine, les dérivées de f et g coïncident. Il est demandé d'expliciter ces dérivées.

Les fonctions f et g sont toutes deux définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ en tant qu'inverses de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$. Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$.

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, g(t) - f(t) = 1$. Donc en dérivant cette relation pour tout $t \neq t_0$ on obtient $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f'(t) - g'(t) = 0$. Donc les deux dérivées coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$.

De plus

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2} = g'(t)$$

2. Donner le tableau de variations de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, en précisant les limites aux bornes.

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2} > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition. De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -1$ et $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = +\infty$

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f en 0.

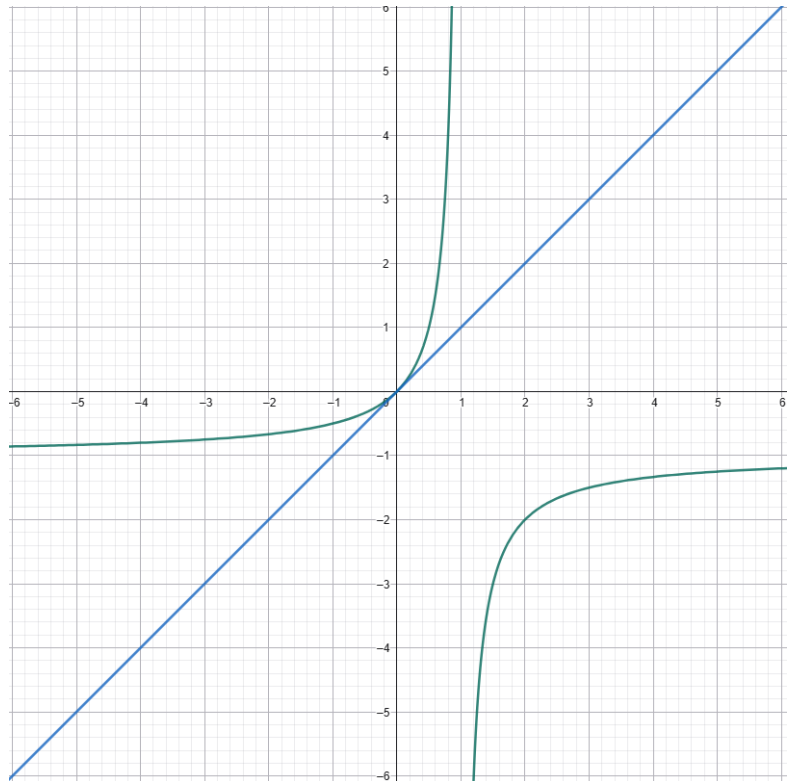
En 0, la tangente à la courbe admet pour équation cartésienne

$$T_0: y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

C'est-à-dire

$$T_0: y = \frac{1}{t_0}x$$

4. Tracer, sur la feuille de papier millimétrée fournie, la tangente T et l'allure du graphe de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, pour la valeur $t_0 = 1$, à l'échelle : une unité pour un cm.



5. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que la fonction f est n fois dérivable sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, et donner, à l'aide d'une démonstration par récurrence, l'expression de sa dérivée $n^{ième}$, $f^{(n)}$, sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

La fonction f est le quotient de deux fonctions n fois dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, et dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$. La fonction f est donc n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$

On montre par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ le résultat suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} n! \frac{t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$$

- Si $n = 1$: la propriété est avérée d'après la question 1)
- Soit $n \geq 1$. On suppose $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} n! \frac{t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$. La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ étant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$ et ne s'annulant pas sur cet ensemble et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f^{(n+1)}(t) = (-1)^{n-1} (-1) n! (n+1) t_0 (t_0 - t)^{-(n+2)}$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f^{(n+1)}(t) = (-1)^n (n+1)! \frac{t_0}{(t_0 - t)^{n+2}}$$

Donc la propriété est avérée au rang $n+1$: elle est donc héréditaire et initialisée donc vraie par récurrence sur l'entier $n \geq 1$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} n! \frac{t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$$

6. Déterminer une primitive G de g sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$, puis une primitive F de f sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

- Sur $]t_0; +\infty[$ une primitive G de g est $t \mapsto -t_0 \ln(t - t_0)$
- Sur $] -\infty; t_0[$ une primitive G de g est $t \mapsto -t_0 \ln(t_0 - t)$

On a vu que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, g(t) - f(t) = 1$ donc en primitivant cette relation on obtient :

- Sur $]t_0; +\infty[$ une primitive F de f est $t \mapsto -t - t_0 \ln(t - t_0)$
- Sur $] -\infty; t_0[$ une primitive F de f est $t \mapsto -t - t_0 \ln(t_0 - t)$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*, I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Enoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de x_0 pour une fonction ψ définie sur I (on précisera dans la réponse les conditions de régularité vérifiées par ψ).

La formule de Taylor-Young, pour une fonction n fois dérivable en $x_0 \in I$ à l'ordre n s'écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

8. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, dont on aura, au préalable, rappelé le domaine de définition. Il est demandé de détailler la réponse.

Soit un entier $n \geq 1$. En appliquant la formule de Taylor-Young précédente à la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ qui est une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc en 0, avec $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(k)}(0) = k!$, on obtient :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + o(t^n)$$

9. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$, dont on aura aussi, au préalable, rappelé le domaine de définition.

En primitivant le développement précédent de Taylor-Young en 0 à l'ordre n sur $] -\infty; 1[$ on obtient :

$$\ln(1-t) = - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + o(t^n)$$

Partie I

1. Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$ une primitive H de la fonction h telle que, pour tout réel strictement positif t :

$$h(t) = \frac{1}{t+t^2}$$

La fonction h qui, à tout réel t de $\mathcal{D}_h$, associe $h(t) = \frac{1}{t^2+t} = \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de fonctions continues sur cet ensemble donc elle y admet une primitive H donnée par

$$\forall t > 0, H(t) = \ln t - \ln(t+1) = \ln \frac{t}{t+1}$$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, étudier la convergence de l'intégrale $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$, puis la calculer.

Soit $n \geq 2$. La fonction h est continue sur $[n; +\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans cet ensemble. De plus :

$$\forall t \geq 2, 0 \leq h(t) \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$$

Est convergente. De plus

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = [H(t)]_n^{+\infty} = \left[\ln \frac{t}{t+1} \right]_n^{+\infty}$$

Or, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t+1} = 1$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{t}{t+1} = 0$ d'où

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = -\ln \frac{n}{n+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

3. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = -n \int_0^\pi \frac{\sin(nt) dt}{n + \cos(nt)} + \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2}$$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

$\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos nt \leq 1$ donc $\forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}, 0 < 1 \leq n + \cos nt$.

De plus $\forall t \in [0; \pi], (n + \cos nt)' = -n \sin nt$. Ainsi

$$\int_0^\pi \frac{\sin nt \, dt}{n + \cos nt} = -\frac{1}{n} [\ln(n + \cos nt)]_0^\pi = -\frac{1}{n} [\ln(n + (-1)^n) - \ln(n + 1)]$$

Donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin nt \, dt}{n + \cos nt} = -\frac{1}{n} \left[\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

Donc

$$-n \int_0^\pi \frac{\sin nt \, dt}{n + \cos nt} = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geq 2, u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)}$$

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

On déduit du calcul précédent que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

5. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, et λ un réel. Montrer que $\sum (a_n + \lambda b_n)$ est une série convergente.

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes alors les deux suites des sommes partielles $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ sont convergentes

Donc, par combinaison linéaire de suites convergentes, la suite

$$A_n + \lambda B_n = \sum_{k=0}^n a_k + \lambda b_k$$

est convergente. Donc $\boxed{\text{la série } \sum (a_n + \lambda b_n) \text{ est convergente}}$

6. Etudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ (où, pour tout entier naturel $n \geq 2$, u_n a été introduit à la question 3.).

Indication : on pourra poser, lorsque l'entier n tend vers l'infini : $h = \frac{1}{n}$, et utiliser un développement limité en h .

On sait que, pour n vers l'infini on a :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Or :

- La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ étant strictement positive décroissante et de limite 0 alors, d'après le critère spécial des séries alternées la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente
- la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente
- $o \left(\frac{1}{n^2} \right)$ est le terme général d'une série convergente par domination du terme général d'une série de Riemann convergente.

Donc, par somme la série $\sum u_n$ est convergente

En passant à la valeur absolue dans le développement limité précédent on montre que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n}$$

Donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente.

7. Pour tout entier naturel $N \geq 2$, on pose :

$$S_N = \sum_{k=2}^N u_k$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel $N \geq 1$:

$$S_{2N} = \ln \frac{2N+1}{2N}$$

On montre le résultat proposé par récurrence sur N

- Si $N = 1$: $S_2 = u_2 = \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$ donc la formule est avérée au rang 1
- Soit $N \geq 1$: on suppose $S_{2N} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right)$.

Alors :

$$S_{2(N+1)} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right) + u_{2N+1} + u_{2(N+1)}$$

Donc

$$S_{2(N+1)} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2(N+1)} \right)$$

Donc

$$S_{2(N+1)} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right) + \ln \left(\frac{2N}{2N+1} \right) + \ln \left(\frac{2N+3}{2(N+1)} \right)$$

Donc

$$S_{2(N+1)} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \frac{2N}{2N+1} \frac{2N+3}{2(N+1)} \right)$$

$$\text{Donc } S_{2(N+1)} = \ln \left(\frac{2N+3}{2(N+1)} \right)$$

La propriété étant héréditaire et initialisée, elle est vérifiée par récurrence

$$\boxed{\forall N \geq 1, S_{2N} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right)}$$

- b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, comparer u_{2n+1} et u_{2n} .

On a

$$\begin{aligned} u_{2n+1} - u_{2n} &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) - \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\ &= 2 \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) < 0 \end{aligned}$$

Donc $u_{2n+1} < u_{2n}$

- c) En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$, S_{2N-1} .

$$\forall N \geq 1, S_{2N-1} = S_{2N} - u_{2N} = \ln\left(\frac{2N+1}{2N}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2N}\right) = 0 \text{ donc } \boxed{\forall N \geq 1, S_{2N-1} = 0}$$

- d) Calculer :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$$

On a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2N+1}{2N}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} = 0$ et $\forall N \geq 1, S_{2N-1} = 0$. Les deux suites extraites à support disjoints (S_{2N}) et (S_{2N-1}) convergent vers 0 donc la suite (S_n) converge vers 0.

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0}$$

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n , et tout réel $x > 1$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^n dt$$

1. Dans cette question, on fixe l'entier naturel non nul n . Etudier, pour tout réel $x > 1$, la convergence de l'intégrale $G_n(x)$.

Pour tout entier n non nul et pour tout $x > 1$, la fonction $t \mapsto x^{-nt} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$.

On a $\forall x > 1, \forall t \geq 0, x^{-nt} t^{n+2} = t^2 \times t^n e^{-nt \ln x}$, donc, par croissances comparées,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \times t^n e^{-nt \ln x} = 0$$

Donc

$$\forall x > 1, x^{-nt} t^n = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Donc, par domination du terme général d'une intégrale de Riemann convergente

L'intégrale $G_n(x)$ converge pour tout $x > 1$ et pour tout entier n non nul

2. Soit $a > 1$. L'entier naturel non nul n est à nouveau fixé. Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$.

Soit $a > 1$.

- Pour tout $x > a$, la fonction $t \mapsto x^{-nt}t^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$
- Pour tout réel t positif, la fonction $x \mapsto x^{-nt}t^n$ est continue sur $[a; +\infty[$
- $\forall x > a, \forall t \geq 0, -nt \ln x < -nt \ln a$ par stricte croissance du logarithme. Donc, par stricte croissance de l'exponentielle, on a :

$$|x^{-nt}t^n| = |t^n e^{-nt \ln x}| < t^n e^{-nt \ln a}$$

Or la fonction $t \mapsto t^n e^{-nt \ln a}$ est continue positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$: en effet, de la même manière que précédemment, à l'aide de croissances comparées on montre que $t^n e^{-nt \ln a} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres on obtient que la fonction G_n est continue sur $[a; +\infty[$

3. Soit $a > 1$. L'entier naturel non nul n est à nouveau fixé. Montrer que la fonction $x \mapsto G_n(x)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, puis exprimer, pour tout $x \geq a$, $G'_n(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Soit $a > 1$.

- Pour tout $x > a$, la fonction $t \mapsto x^{-nt}t^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$
- Pour tout $x > a$, la fonction $t \mapsto x^{-nt}t^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$
- Pour tout réel t positif, la fonction $x \mapsto x^{-nt}t^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ en tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$
- $\forall x > a, \forall t \geq 0,$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^{-nt}t^n) = -nx^{-nt}t^{n+1}$$

Et

$$|-nx^{-nt}t^{n+1}| < nt^{n+1}e^{-nt \ln a}$$

De plus la fonction $t \mapsto nt^{n+1}e^{-nt \ln a}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}^+$

Comme $nt^{n+1}e^{-nt \ln a} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées, on en déduit que

$$nt^{n+1}e^{-nt \ln a} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Et la fonction $t \mapsto nt^{n+1}e^{-nt \ln a}$ est de plus intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre on en déduit que la fonction G_n est dérivable sur $[a; +\infty[$ et

$$\forall x > a, G'_n(x) = -n \int_0^{+\infty} x^{-nt} t^{n+1} dt$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x > 1$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x)$$

(On pourra commencer par utiliser le changement de variable $u = \frac{(n+1)t}{n}$.)

Soit $x > 1$. On pose $u = \frac{(n+1)t}{n}$ donc $du = \frac{(n+1)}{n} dt$. Donc

$$G_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} x^{-(n+1)t} t^{n+1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^{-nu} \left(\frac{nu}{n+1}\right)^{n+1} du$$

$$G_{n+1}(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \int_0^{+\infty} e^{-nu \ln x} u^{n+1} du$$

En intégrant par parties on a :

$$G_{n+1}(x) = \frac{-1}{n \ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \left[e^{-nu \ln x} u^{n+1} \right]_0^{+\infty} - (n+1) \int_0^{+\infty} e^{-nu \ln x} u^n du$$

Or $\left[e^{-nu \ln x} u^{n+1} \right]_0^{+\infty} = 0$

Donc

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{n \ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} (n+1) \int_0^{+\infty} e^{-nu \ln x} u^n du$$

Donc

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x)$$

5. Soit $x > 1$. Que vaut $G_1(x)$?

Soit $x > 1$

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} x^{-t} t^n du = \int_0^{+\infty} e^{-t \ln x} t du$$

En procédant par intégration par parties on obtient :

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t \ln x} t du = -\frac{1}{\ln x} [e^{-t \ln x} t]_0^{+\infty} + \frac{1}{\ln x} \int_0^{+\infty} e^{-t \ln x} du$$

Or $[e^{-t \ln x} t]_0^{+\infty} = 0$ donc

$$G_1(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} [e^{-t \ln x}]_0^{+\infty} = \frac{1}{(\ln x)^2}$$

6. Exprimer, pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel non nul n , $G_n(x)$ en fonction de n . On pensera à faire intervenir des produits successifs (aussi appelés en cascade). Une preuve faisant intervenir explicitement une récurrence est attendue.

Soit $x > 1$. On a

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \times \dots \times \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{2}\right)^2 G_1(x)$$

Ainsi :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{(\ln x)^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{(\ln x)^2}$$

Donc

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{(\ln x)^{n+2}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{n!}{(\ln x)^{n+2} (n+1)^{n+1}}$$

Donc

$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{(\ln x)^{n+1} n^n}$$

On prouve cette conjecture par récurrence sur $n \geq 1$:

- Si $n = 1$: on a $G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$ et la formule est avérée au rang 1
- Soit $n \geq 1$. On suppose

$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{(\ln x)^{n+1} n^n}$$

Or, d'après la question 4) on a :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(\ln x)^{n+1} n^n} = \frac{n!}{(\ln x)^{n+2} (n+1)^{n+1}}$$

Donc la formule est avérée au rang $n+1$.

La propriété est héréditaire et initialisée, donc, par récurrence sur $n \geq 1$:

$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{(\ln x)^{n+1} n^n}$$

7. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$, puis, lorsque cette condition est vérifiée, calculer sa somme $S(x)$.

Soit $x > 1$. On a :

$$\frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!} = \frac{1}{(\ln x)^{n+1}}$$

Donc

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!}$$

est une série géométrique de raison $\frac{1}{\ln x} > 0$ qui converge si et seulement si :

$$0 < \frac{1}{\ln x} < 1$$

Autrement dit, lorsque $\ln x > 1$ c'est-à-dire lorsque $x > e$. Ainsi

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!} \text{ converge } \Leftrightarrow x > e$$

$$\forall x > e, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n G_n(x)}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}} - 1 - \frac{1}{\ln x}$$

Donc

$$\forall x > e, S(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1} - 1 - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln^2 x - \ln x (\ln x - 1) - (\ln x - 1)}{\ln x (\ln x - 1)}$$

Donc

$$\forall x > e, S(x) = \frac{1}{\ln x (\ln x - 1)}$$

8. Soit $N \geq 2$. On pose :

$$\Pi_N = e \prod_{k=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$$

Calculer : $\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N)$

Soit $N \geq 2$. On calcule

$$\ln \Pi_N = 1 + \sum_{k=2}^{2N} u_k = 1 + S_{2N} = 1 + \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right)$$

On en déduit

$$\Pi_N = e \left(\frac{2N+1}{2N} \right) > e > 1$$

De plus,

$$\forall x > 1, G_n(x) = \frac{(n-1)!}{(\ln x)^{n+1} n^n}$$

Donc

$$G_n(\Pi_N) = \frac{(n-1)!}{(\ln \Pi_N)^{n+1} n^n} = \frac{(n-1)!}{\left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{2N}\right)\right)^{n+1} n^n}$$

Or, pour n entier naturel non nul fixé :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \ln \left(1 + \frac{1}{2N}\right)\right)^{n+1} = 1$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N) = \frac{(n-1)!}{n^n}}$$

Partie III

Pour tout couple (x, y) de réels distincts, on pose :

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - \ln |x - y|$$

1. Exprimer, pour tout couple (x, y) de réels distincts, la hessienne de la fonction φ .

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x; y) &= 2 + \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x; y) &= 2 + \frac{1}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x; y) &= -\frac{1}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

La matrice Hessienne de la fonction φ s'écrit :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} & 2 + \frac{1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}}$$

2. Montrer que la fonction φ admet un point critique en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

Pour déterminer les points critiques de φ on détermine son gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - \frac{1}{x-y} \\ 2y + \frac{1}{x-y} \end{pmatrix}$$

On résout

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{x-y} = 0 \\ 2y + \frac{1}{x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{x-y} = 2x = -2y$$

Donc la fonction φ admet un point critique en $(x_0; y_0)$ si et seulement si $\frac{1}{2(x_0 - y_0)} = x_0 = -y_0$

3. Quelles sont les valeurs possibles des réels x_0 et y_0 introduits à la question 2 ?

On résout

$$\frac{1}{2(x_0 - y_0)} = x_0 = -y_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -y_0 \\ x_0 = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x_0; y_0) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ ou } (x_0; y_0) = \left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$$

On obtient donc deux points critiques $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$

4. Montrer que, pour les valeurs possibles de x_0 et y_0 obtenues à la question précédente, la fonction φ admet un minimum local en (x_0, y_0) .

Pour chacun de ces deux points la matrice hessienne s'écrit $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Son déterminant vaut $8 > 0$ donc les valeurs propres ont le même signe qui est donné par la trace de la matrice hessienne : ici, $6 > 0$.

Les deux valeurs propres étant strictement positives on a bien des minimums locaux aux deux points considérés $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$

5. En déduire, pour tout entier naturel $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \mathcal{O}(N)$$

En déduire que la minoration de la fonction φ obtenue à la question 4. n'est pas suffisante pour étudier la convergence de la série de terme général $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$.

Soit $n \geq 2$. On pose $x = 1$ et $y_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On a $1 - \frac{(-1)^{n-1}}{n} > 0$

Donc, localement :

$$\varphi(x; y_n) = 1 + \frac{1}{n^2} - \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 + \frac{1}{n^2} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

D'où

$$u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{2}$$

Donc

$$\sum_{n=2}^N u_n \leq \sum_{n=2}^N \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}N$$

Ce qui est insuffisant pour conclure à la convergence de la série.

Ainsi la minoration de la fonction φ obtenue à la question précédente n'est pas suffisante pour conclure sur la convergence de la série de terme général $\left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$

Remarque : la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 donc est bornée par une constante C donc

$$|u_n| \leq C$$

D'où

$$\sum_{n=2}^N |u_n| \leq CN$$

Donc

$$\sum_{n=2}^N |u_n| = O(N)$$

Et cela est indépendant des résultats précédents établis dans cette partie 3...

Dans ce problème, un peu éclectique, on s'intéresse à divers types de convergence : de séries entières, de séries, de combinaisons linéaires de séries, d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. Un détour par des fonctions de deux variables montre que le calcul différentiel peut, aussi, être utilisé pour obtenir des estimations de sommes partielles, tout en gardant à l'esprit que cela ne permet pas toujours d'obtenir des estimations optimales.