

Remarque : Ce corrigé a été produit avec l'assistance de l'IA gemini ce qui a permis un gain de temps considérable. Cependant toutes les réponses ont été scrupuleusement vérifiées et reprises "à la main". Seule la réponse à la dernière question a été laissée en l'état : j'avoue ne pas avoir trouvé comment "en déduire" de φ cette domination. (Domination totalement évidente par ailleurs et bien inutile vu la question **I.6**...

Préambule

Dans ce qui suit, t_0 désigne un réel strictement positif.

1. Les fonctions f et g sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule qu'en t_0 . Leur domaine de dérivabilité est donc $\mathbb{R} \setminus \{t_0\}$.

Pour tout $t \neq t_0$:

$$f'(t) = \frac{1 \cdot (t_0 - t) - t \cdot (-1)}{(t_0 - t)^2} = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$$

$$g'(t) = t_0 \frac{-(-1)}{(t_0 - t)^2} = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$$

On constate bien que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, f'(t) = g'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$.

Remarque : on aurait pu constater dès le départ que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, g(t) - f(t) = 1$

2. Puisque $t_0 > 0$, la dérivée $f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$ est strictement positive sur tout son domaine. f est donc strictement croissante sur $] -\infty, t_0[$ et sur $]t_0, +\infty[$.

Limites :

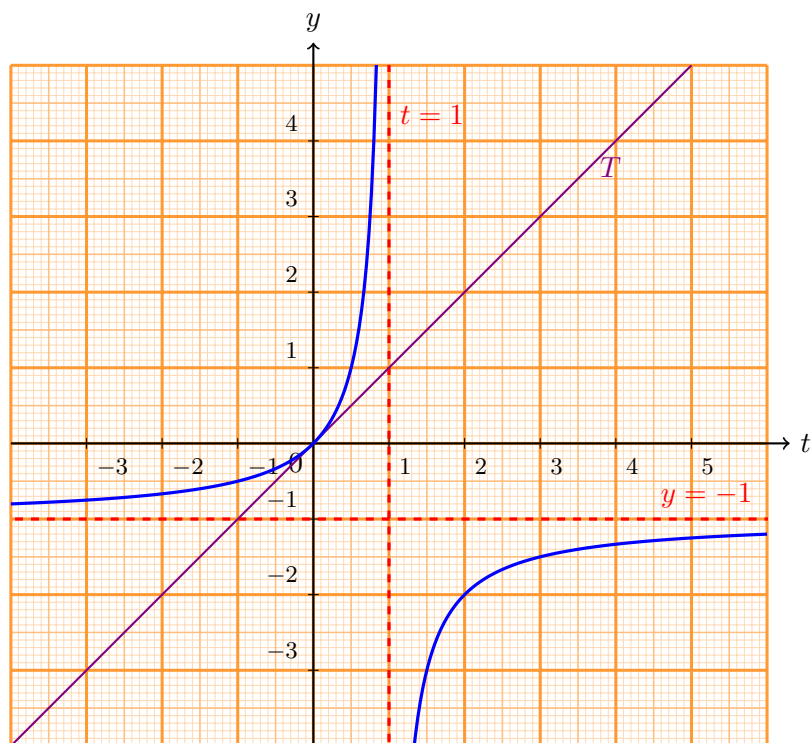
- En $\pm\infty$: $f(t) \sim \frac{t}{-t} = -1$, donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = -1$.
- En t_0^- : le numérateur tend vers $t_0 > 0$, et $(t_0 - t) \rightarrow 0^+$, donc $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = +\infty$.
- En t_0^+ : le numérateur tend vers $t_0 > 0$, et $(t_0 - t) \rightarrow 0^-$, donc $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = -\infty$.

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	+		+
Variations de f	$-1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -1$

3. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{t_0}{t_0^2} = \frac{1}{t_0}$. L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)(t - 0) + f(0)$, soit :

$$y = \frac{t}{t_0}$$

4. Pour $t_0 = 1$, l'équation de la tangente T en 0 est $y = t$. La courbe possède une asymptote verticale d'équation $t = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$. La fonction est strictement croissante sur ses deux intervalles de définition.



5. Soit t un réel dans l'un des deux intervalles précédents.

Remarquons que $f(t) = \frac{t - t_0 + t_0}{t_0 - t} = -1 + g(t) = -1 + \frac{t_0}{t_0 - t}$. La fonction f est indéfiniment dérivable comme fonction rationnelle.

Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(t) = \frac{n!t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $f'(t) = \frac{t_0}{(t_0 - t)^2}$, ce qui correspond bien à la formule pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons la propriété vraie au rang n .

$$f^{(n+1)}(t) = \left(f^{(n)}(t)\right)' = n!t_0 \left(-(n+1)(-1) \frac{1}{(t_0 - t)^{n+2}} \right) = \frac{(n+1)!t_0}{(t_0 - t)^{n+2}}$$

Ce qui est bien la propriété au rang $n + 1$. *Conclusion* : La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Ainsi : f est indéfiniment dérivable et $\forall t \in]-\infty, t_0[\cup]t_0, +\infty[, \forall n \geq 1, f^{(n)}(t) = \frac{n!t_0}{(t_0 - t)^{n+1}}$

6. On a $g(t) = \frac{t_0}{t_0 - t} = -t_0 \frac{-1}{t_0 - t}$. Une primitive G sur chaque intervalle est donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, G(t) = -t_0 \ln |t_0 - t|$$

Puisque $f = -1 + g$, une primitive F de f s'obtient par linéarité :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}, F(t) = -t - t_0 \ln |t_0 - t|$$

7. Soit f une fonction définie sur I et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors, au voisinage de x_0 , on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

8. Il s'agit de g lorsque $t_0 = 1$, donc le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 Au voisinage de 0, on a le développement limité usuel :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + o(t^n) = \sum_{k=0}^n t^k + o(t^n)$$

Pour démontrer ceci, on se sert de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison t . Pour tout $t \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^n t^k = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$$

En décomposant la fraction du membre de droite, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

Ce qui nous permet d'isoler la fonction étudiée :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

Étudions maintenant ce terme de reste au voisinage de 0. On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{t^{n+1}}{1-t} = t^n \underbrace{\left(\frac{t}{1-t} \right)}_{=\varepsilon(t)}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1-t} = 0$, on a bien $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

Par définition, ce reste s'écrit donc $o(t^n)$. On en déduit le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + o(t^n) = \sum_{k=0}^n t^k + o(t^n)$$

9. Le domaine de définition est $] -\infty, 1[$. En intégrant le développement limité précédent, sachant qu'une primitive de $t \mapsto \frac{-1}{1-t}$ est $t \mapsto \ln(1-t)$ et s'annule en 0 :

$$-\ln(1-t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+1}}{k+1} + o(t^n)$$

Ce qui donne :

$$\ln(1-t) = - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} + o(t^n)$$

Partie I

1. h est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est donc définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\forall t > 0, h(t) = \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1+t-t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Une primitive H sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc :

$$H : t \mapsto \ln(t) - \ln(t+1) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

Ainsi :

$$\forall t > 0, H(t) = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)$$

2.

Remarque : On pourrait étudier la convergence à part :

En $+\infty$, $h(t) \sim \frac{1}{t^2}$. Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de référence intégrable en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), donc d'après le critère d'équivalence, h est intégrable en $+\infty$ et l'intégrale converge. C'est cependant inutile car l'intégrale se calcule directement par primitivation de h ;

Soit x un réel strictement positif :

$$\begin{aligned} \int_n^x \frac{dt}{t+t^2} &= \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) \right]_n^x \\ &= \ln\left(\frac{1}{1+1/x}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$ est convergente et

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3. Soit $n \geq 2$, calculons la première intégrale :

En posant le changement de variable usuel affine $u = nt$, $du = ndt$:

$$\begin{aligned} -n \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n + \cos(nt)} dt &= - \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{n + \cos u} du \\ &= [\ln(n + \cos u)]_0^{n\pi} \\ &= \ln(n + \cos(n\pi)) - \ln(n + \cos(0)) \\ &= \ln(n + (-1)^n) - \ln(n + 1) \end{aligned}$$

car $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

En ajoutant la deuxième intégrale trouvée à la question 2 :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n + (-1)^n) - \ln(n + 1) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln(n + (-1)^n) - \ln(n) \\ &= \ln\left(\frac{n + (-1)^n}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geq 2, u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}$$

4. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0.

Par continuité de la fonction logarithme en 1, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(1 + 0) = 0$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

5. Soient $A_N = \sum_{k=0}^N a_k$ et $B_N = \sum_{k=0}^N b_k$ les sommes partielles. Puisque les deux séries convergent, les suites (A_N) et (B_N) admettent des limites finies A et B .

La somme partielle de la combinaison linéaire est $S_N = \sum_{k=0}^N (a_k + \lambda b_k) = A_N + \lambda B_N$. Par opérations sur les limites, (S_N) converge vers $A + \lambda B$.

La série de terme général $(a_n + \lambda b_n)$ est donc convergente.

6. Au voisinage de $+\infty$, on effectue un DL de u_n :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le C.S.S.A. (Série alternée dont le terme général tend vers 0 en décroissant en valeur absolue). La série $\sum \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ est de signe constant (négatif) à partir d'un certain rang et équivalente à $-\frac{1}{2n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). D'après la question 5, la somme de ces deux séries converge, donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Cependant, $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ en $+\infty$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique),

donc $\sum u_n$ ne converge pas absolument.

Remarque : Pour justifier que $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ on remarque que $nu_n = (-1)^n + o(1)$

et donc $n|u_n| = |1 + o(1)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

(a) Rappelons que pour tout $n \geq 2$, $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

Commençons par calculer la somme de deux termes consécutifs u_{2p} et u_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{2p} + u_{2p+1} &= \ln \left(1 + \frac{1}{2p} \right) + \ln \left(1 - \frac{1}{2p+1} \right) \\ u_{2p} + u_{2p+1} &= \ln \left(\frac{2p+1}{2p} \right) + \ln \left(\frac{2p}{2p+1} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$, on obtient :

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \ln \left(\frac{2p+1}{2p} \times \frac{2p}{2p+1} \right) = \ln(1) = 0$$

Exprimons maintenant S_{2N} à l'aide de ces paires. Par associativité de la somme :

$$S_{2N} = \sum_{k=2}^{2N} u_k = \left(\sum_{p=1}^{N-1} (u_{2p} + u_{2p+1}) \right) + u_{2N}$$

D'après le calcul précédent, chaque terme $(u_{2p} + u_{2p+1})$ est nul. La somme de gauche est donc nulle, et il reste :

$$S_{2N} = 0 + u_{2N} = \ln \left(1 + \frac{1}{2N} \right)$$

Ce qui nous donne le résultat final :

$$S_{2N} = \ln \left(\frac{2N+1}{2N} \right)$$

(b) On a montré en 7.(a) que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $u_{2p} + u_{2p+1} = 0$, donc :

$$\forall n \geq 1, u_{2n+1} = -u_{2n}$$

(c) Soit $N \geq 2$. On a obtenu en 7.(a) que $S_{2N} = 0 + u_{2N}$, or par définition de la somme partielle $S_{2N} = S_{2N-1} + u_{2N}$. Et donc

$$\forall N \geq 2, S_{2N-1} = 0$$

(d) Les sous-suites des sommes partielles paires et impaires admettent la même limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2N} \right) = 0 \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} = 0.$$

La suite (S_N) converge donc vers 0. Ainsi, $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0$.

Remarque : On peut aussi simplement dire que la série étant convergente, sa somme est la limite de ses sommes partielles, qui est la même que celle de ses suites extraites, c'est-à-dire 0.

Partie II

1. Soit $x > 1$ un réel fixé. La fonction $t \mapsto x^{-nt}t^n = e^{-nt \ln x}t^n$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Posons $\alpha = \frac{1}{2}n \ln x > 0$. alors $\forall t \geq 0, x^{-nt}t^n = (t^n e^{-\alpha t})e^{-\alpha t}$

Et par croissances comparées, $t^n e^{-\alpha t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, $x^{-nt}t^n = o(e^{-\alpha t})$. Et comme $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est une fonction de référence intégrable en $+\infty$, d'après le critère de prépondérance pour les fonctions intégrables, $t \mapsto x^{-nt}t^n$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et l'intégrale $G_n(x)$ converge.

2. Commençons par énoncer le théorème utilisé :

Théorème de continuité sous l'intégrale :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Si :

- (H₁) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur J .
- (H₂) Pour presque tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I .
- (H₃) (Hypothèse de domination) : Il existe une fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ **intégrable** sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur I .

Appliquons le théorème précédent : ici $I = [a, +\infty[$ et $J = [0, +\infty[$, et f est la fonction intégrande g_n définie par :

$$\begin{aligned} g_n : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto x^{-nt}t^n = t^n e^{-nt \ln x} \end{aligned}$$

- **Continuité de g_n** : Justifions que g_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[\times [0, +\infty[$:
 - Les fonctions $(x, t) \mapsto t$ et $(x, t) \mapsto x$ sont des fonctions polynomiales de deux variables, elles sont donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.
 - Par produit et puissance, $(x, t) \mapsto t^n$ et $(x, t) \mapsto -nt$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.
 - La fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction usuelle $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, +\infty[$ (car $a > 1$). Par composition avec la projection $(x, t) \mapsto x$, la fonction $(x, t) \mapsto \ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.
 - Par produit, $(x, t) \mapsto -nt \ln x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.
 - Par composition avec la fonction usuelle exp, $(x, t) \mapsto e^{-nt \ln x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$.
 Finalement, g_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $I \times J$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. En particulier ses applications partielles sont toutes continues et donc :
 - Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g_n(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc (H₁) est vérifiée.
 - Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g_n(x, t)$ est continue sur $[a, +\infty[$ donc (H₂) est vérifiée.
- **Hypothèse de domination** : Soit $(x, t) \in I \times J$. Puisque $x \geq a > 1$, la fonction $x \mapsto x^{-nt}$ est décroissante pour $t \geq 0$. On a donc :

$$\forall x \geq a, \quad \forall t \geq 0, \quad |g_n(x, t)| \leq g_n(a, t)$$

On introduit alors la fonction de domination φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto g_n(a, t) = a^{-nt}t^n \end{aligned}$$

Cette fonction φ est indépendante de x . De plus, d'après la question **II.1**, φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $a > 1$ donc (H₃) est vérifiée.

Toutes les hypothèses étant vérifiées, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } G_n : x \mapsto \int_0^{+\infty} g_n(x, t) dt \text{ est continue sur l'intervalle } [a, +\infty[}$$

3. Soit $a > 1$. Montrons que G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.

Théorème de dérivation sous l'intégrale :

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Si :

- (H₁) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur J .
- (H₂) Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- (H₃) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J .
- (H₄) (Hypothèse de domination) : Il existe une fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}_+$ **intégrable** sur J telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors :

- la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- **et pour tout** $x \in I : F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Appliquons ce théorème à la fonction intégrande g_n sur $I \times J = [a, +\infty[\times [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g_n : I \times J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto t^n e^{-nt \ln x} \end{aligned}$$

Comme justifié précédemment, g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et donc $\mathcal{C}^1$) sur $I \times J$ comme produit et composée de fonctions usuelles de deux variables. Cela assure immédiatement que :

- (H₁, **partie continuité**) : Pour tout $x \in I$, $t \mapsto g_n(x, t)$ est continue sur J .
- (H₂) : Pour tout $t \in J$, $x \mapsto g_n(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Sa dérivée partielle est :

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} : (x, t) \mapsto -n \frac{t^{n+1}}{x} e^{-nt \ln x} = -n \frac{t^{n+1}}{x^{nt+1}}$$

- (H₃) : Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J .

Il reste à vérifier les conditions d'intégrabilité et de domination :

- **Intégrabilité** (H₁) : Pour tout $x \geq a > 1$, $t \mapsto g_n(x, t)$ est intégrable sur J d'après **II.1.** (H₁) est vérifiée.
- **Domination** (H₄) : Pour tout $(x, t) \in I \times J$, comme $x \geq a > 1$, la fonction $x \mapsto x^{-(nt+1)}$ est décroissante pour $t \geq 0$. On a donc :

$$\left| \frac{\partial g_n}{\partial x}(x, t) \right| = n \frac{t^{n+1}}{x^{nt+1}} \leq n \frac{t^{n+1}}{a^{nt+1}}$$

On pose la fonction de domination φ :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto n \frac{t^{n+1}}{a^{nt+1}} \end{aligned}$$

φ est indépendante de x , continue sur J et intégrable sur J (car $a > 1$) d'après **II.1.** (H₄) est vérifiée.

G_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$. Par caractère local :

$$G_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[\quad \text{et} \quad G'_n : x \mapsto -n \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{x^{nt+1}} dt$$

Remarque : Il était un peu lourd de séparer dans ce cas la continuité et la dérivation puisque la dérivation implique la continuité... Mais la question 3 venant après la question 2...

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$. On a $G_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} t^{n+1} x^{-(n+1)t} dt$.

1. **Changement de variable :** Effectuons le changement de variable usuel affine $u = \frac{n+1}{n}t$, soit $t = \frac{n}{n+1}u$.

La fonction $\phi : u \mapsto \frac{n}{n+1}u$ est $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. On a $\forall u > 0, \phi'(u) = \frac{n}{n+1}$. L'intégrale $G_{n+1}(x)$ étant convergente, on a :

$$G_{n+1}(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}u\right)^{n+1} x^{-nu} \left(\frac{n}{n+1}\right) du = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du$$

2. **Intégration par parties :** Posons $I = \int_0^{+\infty} u^{n+1} x^{-nu} du$ et appliquons une intégration par parties généralisée :

— **Fonctions :** $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto u^{n+1}$ $u \mapsto -\frac{x^{-nu}}{n \ln x}$

— **Régularité :** f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ avec $f'(u) = (n+1)u^n$ et $g'(u) = x^{-nu}$.

— **Crochet :** $f(u)g(u) = -\frac{u^{n+1}x^{-nu}}{n \ln x}$. En 0, la limite est nulle. En $+\infty$, par croissance comparée ($x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$), la limite est nulle aussi. Le crochet est donc nul.

— **Nature :** Le crochet étant fini et l'intégrale de départ convergente :

$$I = [f(u)g(u)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)u^n \left(-\frac{x^{-nu}}{n \ln x}\right) du = \frac{n+1}{n \ln x} \int_0^{+\infty} u^n x^{-nu} du$$

On reconnaît $G_n(x)$ dans l'intégrale de droite, d'où $I = \frac{n+1}{n \ln x} G_n(x)$.

3. **Conclusion :** En réinjectant l'expression de I dans celle de $G_{n+1}(x)$:

$$G_{n+1}(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2} \frac{n+1}{n \ln x} G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x)$$

On obtient bien la relation demandée :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} G_n(x)$$

5.

$$G_1(x) = \int_0^{+\infty} t x^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t \ln x} dt$$

On intègre par parties ($u = t, v' = e^{-t \ln x}$) :

$$G_1(x) = \left[t \frac{-e^{-t \ln x}}{\ln x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\ln x} \int_0^{+\infty} e^{-t \ln x} dt = 0 + \frac{1}{\ln x} \left[\frac{-e^{-t \ln x}}{\ln x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$\text{ainsi : } \boxed{\forall x > 1, G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}}$$

6. Soit $x > 1$ un réel fixé pour toute la question.

1. Établissement par substitutions successives (cascade) :

Partons de la relation de récurrence de la question **II.4** :

$$G_n(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n G_{n-1}(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{(n-1)^n}{n^n} G_{n-1}(x)$$

En substituant $G_{n-1}, G_{n-2}, \dots$ jusqu'à G_1 , on obtient la chaîne suivante :

$$\begin{aligned} - G_n(x) &= \frac{1}{\ln x} \frac{(n-1)^n}{n^n} G_{n-1}(x) \\ - G_{n-1}(x) &= \frac{1}{\ln x} \frac{(n-2)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} G_{n-2}(x) \\ - G_{n-2}(x) &= \frac{1}{\ln x} \frac{(n-3)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}} G_{n-3}(x) \\ - \dots \\ - G_2(x) &= \frac{1}{\ln x} \frac{1^2}{2^2} G_1(x) \end{aligned}$$

En injectant chaque expression dans la précédente, le terme $G_n(x)$ s'écrit :

$$G_n(x) = \underbrace{\left(\frac{1}{\ln x} \right) \times \dots \times \left(\frac{1}{\ln x} \right)}_{(n-1) \text{ fois}} \times \left[\frac{(n-1)^n}{n^n} \times \frac{(n-2)^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \times \dots \times \frac{1^2}{2^2} \right] \times G_1(x)$$

On observe des simplifications dans le crochet. Pour chaque entier $k \in \{2, \dots, n-1\}$, le terme k apparaît à la puissance $k+1$ au numérateur et à la puissance k au dénominateur, laissant un facteur k au numérateur :

$$\frac{(n-1)^n}{(n-1)^{n-1}} = (n-1), \quad \frac{(n-2)^{n-1}}{(n-2)^{n-2}} = (n-2), \quad \dots$$

Le crochet se simplifie donc en $\frac{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1^2}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^n}$.

Ainsi : $G_n(x) = \frac{1}{(\ln x)^{n-1}} \times \frac{(n-1)!}{n^n} \times G_1(x)$.

Sachant que $G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$, on conjecture la formule :

$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{n \times (n-1)!}{n \times n^n (\ln x)^{n+1}} = \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}}$$

2. Validation par récurrence :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on considère $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $G_n(x) = \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}}$.

— **Initialisation pour $n = 1$:** $G_1(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$ et $\frac{1!}{(1 \ln x)^{1+1}} = \frac{1}{(\ln x)^2}$.
donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Alors d'après **II.4**

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} G_n(x)$$

Et d'après hypothèse de récurrence :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{\ln x} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n!}{n^{n+1}(\ln x)^{n+1}}$$

En simplifiant par n^{n+1} et en regroupant les termes en $\ln x$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}(\ln x)^{n+2}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $(n+1)$:

$$G_{n+1}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+2}(\ln x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{((n+1)\ln x)^{n+2}}$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie

et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$.

D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(x) = \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}}}$$

7. Le terme général est $v_n = \frac{n^n}{(n-1)!} \frac{n!}{(n \ln x)^{n+1}} = \frac{n^{n+1}}{n^{n+1}(\ln x)^{n+1}} = \left(\frac{1}{\ln x} \right)^{n+1}$.

Il s'agit d'une série géométrique de raison $q = \frac{1}{\ln x}$.

Condition de convergence : $|q| < 1 \iff \frac{1}{\ln x} < 1 \iff \ln x > 1 \iff x > e$
(car on a $x > 1$ donc $\ln x > 0$)

Calcul de la somme (avec premier terme pour $n = 1$) :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln x} \right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\ln x} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{(\ln x)^2} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{\ln x(\ln x - 1)}$$

8.

En passant au logarithme, on retrouve la somme S_{2N} de la **Partie I** :

$$\ln(\Pi_N) = \ln(e) + \sum_{k=2}^{2N} \ln \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right) = 1 + S_{2N}$$

Or on sait que $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} = 0$. Par continuité de la fonction exponentielle, il vient :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Pi_N = e^{1+0} = e$$

Or la fonction G_n est continue sur $]1, +\infty[$ d'après **II.2**. Comme $e > 1$, par continuité :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N) = G_n(e)$$

En utilisant l'expression établie en **II.6**, on a $G_n(e) = \frac{n!}{(n \ln e)^{n+1}}$. Sachant que $\ln e = 1$, on conclut :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} G_n(\Pi_N) = \frac{n!}{n^{n+1}}$$

Partie III

1. φ est définie sur $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

$u \mapsto \ln|u|$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc par composition et combinaison linéaire avec des fonctions polynomiales, φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_\varphi$.

Les dérivées partielles d'ordre 1 sont (en notant que $\ln|x-y|$ a pour dérivée $1/(x-y)$ par rapport à x) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x-y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y + \frac{1}{x-y}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 + \frac{1}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

La matrice Hessienne est donc :

$$H_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(x-y)^2} & -\frac{1}{(x-y)^2} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} & 2 + \frac{1}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(x_0, y_0) est un point critique de $\varphi \iff \nabla \varphi(x_0, y_0) = 0$

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} 2x_0 - \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \\ 2y_0 + \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \end{cases} & \iff L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \iff \begin{cases} 2x_0 - \frac{1}{x_0 - y_0} = 0 \\ 2(x_0 + y_0) = 0 \end{cases} & \iff L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ \iff \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)} = 0 \\ x_0 = -y_0 \end{cases} & \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(x_0, y_0) \text{ est un point critique de } \varphi \iff x_0 = -y_0 = \frac{1}{2(x_0 - y_0)}$$

3. On sait que $y_0 = -x_0$. Donc $x_0 - y_0 = 2x_0$.

L'équation devient $x_0 = \frac{1}{2(2x_0)} = \frac{1}{4x_0}$, d'où $4x_0^2 = 1 \implies x_0^2 = 1/4 \implies x_0 = \pm 1/2$.

Les points critiques possibles sont donc $(1/2, -1/2)$ et $(-1/2, 1/2)$.

4. Évaluons la matrice Hessienne en ces points.

Dans les deux cas, on a $(x_0 - y_0)^2 = 1$, donc $\frac{1}{(x_0 - y_0)^2} = 1$.

La matrice Hessienne devient : $H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Or $\det(H) = 9 - 1 = 8 > 0$ donc les deux valeurs propres de H sont non-nulles et de même signe. Et $\text{Tr}(H) = 6 > 0$, donc ces valeurs propres sont strictement positives.

Donc φ admet un minimum local en (x_0, y_0) .

5. Le minimum local vaut $\varphi(1/2, -1/2) = (1/2)^2 + (-1/2)^2 - \ln(1) = 1/2$.

L'inégalité $\varphi(x, y) \geq 1/2$ (valable localement ou globalement sur un domaine) implique que

$$\ln|x - y| \leq x^2 + y^2 - 1/2 \leq x^2 + y^2$$

En choisissant astucieusement x et y pour que $|x - y| = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$, on pourrait borner la suite $v_n = \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \right|$. En effet, une telle majoration assure que v_n est bornée par une constante M (puisque l'on sait que la suite est par ailleurs convergente).

Par suite, la somme partielle se majore trivialement : $\sum_{n=2}^N v_n \leq \sum_{n=2}^N M \leq M \cdot N$, ce qui est bien un $\mathcal{O}(N)$.

Cependant, savoir qu'une somme de termes positifs est un $\mathcal{O}(N)$ (donc qu'elle croît au plus linéairement) ne permet absolument pas de conclure quant à la convergence de la série. (Une série convergente est un $\mathcal{O}(1)$, tandis qu'une série divergente comme la série harmonique est un $\mathcal{O}(\ln N)$ et donc aussi un $\mathcal{O}(N)$). Cette minoration de φ fournit une borne trop lâche pour conclure. (On a vu en I.6 que la série divergeait en l'occurrence).

Remarque : Cette réponse n'est pas vraiment satisfaisante (quel serait ce choix astucieux???) et il est bien inutile de passer par φ pour obtenir un majorant de v_n , par ailleurs on avait déjà montré la série de terme général v_n est divergente en **I.6**, ce qui rend cette question totalement inutile.
