

Mines-Ponts 2026 — Mathématiques 1

FILIÈRES MP – MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

Équation d'Euler-Lagrange et quelques applications

I – Lemme fondamental du calcul variationnel

1 ▷ Comme $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_-^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$, par opérations, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_*^+$.

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, l'existence d'une fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall x > 0, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x}.$$

■ Pour $n = 0$, $P_0 : x \mapsto 1$ convient.

■ Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que l'existence d'une telle fonction P_n soit connue. Alors

$$\forall x > 0, \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-1/x},$$

donc la fonction polynomiale $P_{n+1} : x \mapsto x^2 (P_n(x) - P_n'(x))$ convient, ce qui établit la récurrence.

2 ▷ On a déjà que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ par opérations.

Montrons par applications répétées du théorème de la limite de la dérivée que pour tout $n \in \mathbf{N}$, φ est n fois dérivable en 0 et que $\varphi^{(n)}$ est continue en 0.

■ Pour $n = 0$, comme $e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$, on a bien φ continue en 0.

■ Soit $n \in \mathbf{N}$ pour lequel on suppose avoir établi que φ est n fois dérivable en 0 et $\varphi^{(n)}$ est continue en 0. Alors

H1 $\varphi^{(n)}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

H2 $\varphi^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.

H3 Pour $x > 0$, $\varphi^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées.

Pour $x < 0$, $\varphi^{(n+1)}(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$.

Ainsi, $\varphi^{(n+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

On en déduit que $\varphi^{(n)}$ est dérivable en 0, que $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$ et que $\varphi^{(n+1)}$ est continue en 0, ce qui établit la récurrence.

Ainsi, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

3 ▷ On pose $\psi_{c,d} : x \in \mathbf{R} \mapsto \varphi(x-c)\varphi(d-x)$. Alors $\psi_{c,d}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ par opérations avec 2.

De plus,

■ si $x \geq d$ ou $x \leq c$, alors $d-x \leq 0$ ou $x-c \leq 0$ donc $\psi_{c,d}(x) = 0$,

■ si $c < x < d$, alors $d-x > 0$ et $x-c > 0$ donc $\psi_{c,d}(x) > 0$.

4 ▷ Supposons que f ne soit pas nulle sur $[a, b]$.

Alors il existe au moins un point de $[a, b]$ en lequel f n'est pas nulle et, par continuité, un intervalle ouvert $]c, d[\subset [a, b]$ contenant ce point sur lequel f ne s'annule pas.

Alors $f \times \psi_{c,d}$ est continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur $[a, b]$ donc constamment nulle sur $[a, b]$.

Comme $\psi_{c,d} > 0$ sur $]c, d[$, cela implique que f est nulle sur $]c, d[$ ce qui est contradictoire.

Finalement, sur $[a, b]$, $f \equiv 0$.

II – Équation d'Euler–Lagrange

5 ▷ Soit $y \in \mathcal{C}$. Comme les fonctions y et y' sont continues sur $[x_A, x_B]$ à valeurs dans U et V respectivement, et comme la fonction f est continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$, $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$ est continue sur $[x_A, x_B]$, donc T est bien définie sur $\mathcal{C}$.

6 ▷ Supposons, par l'absurde, que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$ tel que $y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$.

Avec $\alpha = \frac{1}{2^n}$, on construit une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$.

On a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_{ε_n} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$, valant y_0 en x_A et y_1 en x_B .

Le fait que $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$ se traduit donc par l'existence de $x_n \in [x_A, x_B]$ tel que $y_{\varepsilon_n}(x_n) \notin U$ ou bien $y'_{\varepsilon_n}(x_n) \notin V$.

Il y a donc ou bien une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que $y_{\varepsilon_n}(x_n) \notin U$, ou bien une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tel que $y'_{\varepsilon_n}(x_n) \notin V$.

Plaçons-nous dans le premier cas, le deuxième se traite de la même manière.

On peut construire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en ne gardant que les indices, dans l'ordre, pour lesquels $y_{\varepsilon_n}(x_n) \in U^c$.

Mais la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle et bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstraß nous permet d'en extraire une suite (qui est aussi une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$), convergente : $x_{\psi(n)} \rightarrow \ell \in [x_A, x_B]$.

Alors, par continuité,

$$y_{\varepsilon_{\psi(n)}}(x_{\psi(n)}) = z_0(x_{\psi(n)}) + \varepsilon_{\psi(n)} \eta(x_{\psi(n)}) \rightarrow z_0(\ell).$$

Comme U^c est fermé, et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{\varepsilon_{\psi(n)}}(x_{\psi(n)}) \in U^c$, on en déduit que $z_0(\ell) \in U^c$, ce qui est contradictoire avec $z_0 \in \mathcal{C}$.

On a donc montré, par l'absurde, l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, y_\varepsilon \in \mathcal{C}$.

7 ▷ Soit $g : \begin{cases}]-\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[& \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\varepsilon, x) & \longmapsto f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \end{cases}$

On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre.

H1 Pour tout $x \in]x_A, x_B[, \varepsilon \mapsto g(\varepsilon, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_A, x_B[\times U \times V$ et $y_\varepsilon, y'_\varepsilon$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_A, x_B[$. On a, de plus,

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} : (\varepsilon, x) \mapsto \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$$

en utilisant la règle de la chaîne, avec $y_\varepsilon(x) = z_0(x) + \varepsilon \eta(x)$ et $y'_\varepsilon(x) = z'_0(x) + \varepsilon \eta'(x)$.

H2 Pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, x \mapsto g(\varepsilon, x)$ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$ donc intégrable sur $]x_A, x_B[$.

H3 Pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, x \mapsto \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} : (\varepsilon, x)$ est continue donc continue par morceaux sur $]x_A, x_B[$.

H4 (domination) Malheureusement, les hypothèses de l'énoncé ne permettent pas de dominer sereinement $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}$.

On suppose ici que $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont bornées sur $]x_A, x_B[\times U \times V$ par des constantes K_1 et K_2 .

Notons que η et η' sont continues sur le segment $[x_A, x_B]$, donc, par théorème des bornes atteintes, bornées par des constantes C et C' .

Pour tout $(\varepsilon, x) \in]-\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, x) \right| \leq |\eta(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right| + |\eta'(x)| \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right| \leq CK_1 + C'K_2 = \zeta(x).$$

La fonction constante positive ζ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$ donc intégrable sur $]x_A, x_B[$.

On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right) dx.$$

8 ▷ On sait que T admet un extremum local en $z_0 \in \mathcal{C}$.

Supposons, quitte à changer f en $-f$, qu'il s'agit d'un minimum local.

Cela signifie qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{C}$ tel $\|z - z_0\|_\infty \leq r$, $T(z) \geq T(z_0)$.

Or, si $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $\|y_\varepsilon - z_0\|_\infty = |\varepsilon| \|\eta\|_\infty$.

Comme $\varphi(\varepsilon) = T(y_\varepsilon)$, on en déduit que si $|\varepsilon| \leq \frac{r}{1 + \|\eta\|_\infty}$, $\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(0) = T(z_0)$.

Ainsi,

H1 0 est intérieur à $]-\alpha, \alpha[$,

H2 φ est dérivable sur $]-\alpha, \alpha[$,

H3 φ admet un extremum local en 0.

Par condition nécessaire d'extremum local, $\varphi'(0) = 0$.

On en déduit que

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y} (x, z_0(x), z'_0(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) \right) dx = 0.$$

Effectuons une intégration par partie dans $\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) dx$.

Supposons avoir $x_A < \alpha < \beta < x_B$. Comme η et $h : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_A, x_B[$, on peut alors écrire

$$\int_{\alpha}^{\beta} \eta'(x) h(x) dx = [\eta(x) h(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \eta(x) h'(x) dx$$

Nous avons de nouveau besoin d'une hypothèse que $h : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x))$ est bornée sur $]x_A, x_B[$ qui n'apparaît pas dans l'énoncé pour conclure que $\eta(x) h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 0$ et $\eta(x) h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \beta} 0$ car η est continue en x_A et x_B

et

$$\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0.$$

On en déduirait alors que

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) h(x) dx = - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) h'(x) dx$$

et finalement que $\int_{x_A}^{x_B} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} (x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right) \eta(x) \right) dx = 0.$

9 ▷ L'idée est bien sûr d'utiliser ici le résultat de la première partie. Malheureusement, il faudrait pour cela que

$$F : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y} (x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z} (x, z_0(x), z'_0(x)) \right)$$

se prolonge par continuité à $[x_A, x_B]$, ce qui ne fait (toujours) pas partie des hypothèses de l'énoncé.

Supposons que cela soit le cas (il suffit pour cela de supposer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B] \times U \times V$ au lieu de $]x_A, x_B[\times U \times V$, ce qui permet aussi de traiter les deux précédentes questions), et notons toujours F le prolongement par continuité.

Avec ce qui précède, on a que pour toute fonction η de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_A, x_B]$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$,

$$\int_{x_A}^{x_B} F(x) \eta(x) dx = 0.$$

Les fonctions $\psi_{c,d}$ avec $x_A \leq c < d \leq x_B$ construites à la question 3 vérifient bien la condition $\psi_{c,d}(x_A) = \psi_{c,d}(x_B) = 0$.

On conclut alors, comme dans 4, que F est nulle sur $[x_A, x_B]$.

10 ▷ Supposons que $\forall (x, y, z) \in]x_A, x_B[\times U \times V, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0$.

Posons $G : x \mapsto f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$, fonction dérivable sur $]x_A, x_B[$. On calcule, avec la règle de la chaîne,

$$G' : x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) - z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right)$$

Donc $G' \equiv 0$ par l'hypothèse faite ici et la question précédente.

Comme $]x_A, x_B[$ est un intervalle, on en déduit que G est constante sur $]x_A, x_B[$, ce qui est le résultat demandé ici.

III – Le chemin le plus court est la ligne droite !

11 ▷ On utilise la partie précédente en posant $f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{1 + z^2}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, avec $y_0 = y_A$ et $y_1 = y_B$.

L'identité de Beltrami nous dit qu'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que $\forall x \in]x_A, x_B[$,

$$C = f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x)) = \sqrt{1 + y'_0(x)^2} - y'_0(x) \frac{2y'_0(x)}{2\sqrt{1 + y'_0(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'_0(x)^2}} \neq 0$$

donc

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad 1 + y'_0(x)^2 = \frac{1}{C^2}$$

donc

$$\frac{1}{C^2} - 1 \geq 0 \text{ et } \forall x \in]x_A, x_B[, \quad y'_0(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{C^2} - 1}$$

Par continuité de y'_0 sur le segment $[x_A, x_B]$, on en déduit que y'_0 est constante sur ce segment (c'est toujours + ou toujours - et cette valeur est aussi prise aux bornes) et donc que

y_0 est une fonction affine.

IV – Le chemin le plus rapide est la cycloïde

12 ▷ On est cette fois dans les conditions de la partie II avec $U = \mathbf{R}_*^+$ et $V = \mathbf{R}_*^-$ ouvert et $f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{\frac{1 + z^2}{y}}$

de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B] \times \mathbf{R}_*^+ \times \mathbf{R}_*^-$.

L'identité de Beltrami nous donne $C_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in]x_A, x_B[$,

$$\begin{aligned} C_0 &= f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x)) \\ &= \sqrt{\frac{1 + y'_0(x)^2}{y_0(x)}} - y'_0(x) \frac{\frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + y'_0(x)^2}}}{\sqrt{y_0(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y_0(x) (1 + y'_0(x)^2)}} \neq 0, \end{aligned}$$

donc $\forall x \in]x_A, x_B[, \quad y_0(x) (1 + y'_0(x)^2) = \frac{1}{C_0^2} = C$, et c'est encore valable aux bornes x_A et x_B par continuité.

13 ▷ cotan est définie sur $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$. Elle est dérivable sur $]0, \pi[$ et

$$\cotan' = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = -1 - \cotan^2$$

donc cotan est strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Comme elle est également continue, le théorème de la bijection nous assure qu'elle induit une bijection de $]0, \pi[$ sur $\cotan(]0, \pi[) = \left] \lim_{\pi^-} \cotan, \lim_{0^+} \cotan \right[=] - \infty, \infty[= \mathbf{R}$.

Comme $\cotan' = -\frac{1}{\sin^2}$ n'est jamais nulle, arccotan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \arccotan'(x) = \frac{1}{\cotan'(\arccotan)} = \frac{1}{-1 - \cotan^2(\arccotan(x))}$$

donc $\forall x \in \mathbf{R}, \quad \arccotan'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

14 ▷ Soit $x \in [x_A, x_B]$. D'après 12, $y_0(x) = \frac{2}{1+y_0'(x)^2}$. Or

$$1 - \cos(\theta(x)) = 1 - \cos(2 \arccotan(y_0'(x))) = 2 \sin^2(\arccotan(y_0'(x))) = \frac{2}{1 + \cotan(\arccotan(y_0'(x)))^2} = \frac{2}{1 + y_0'(x)^2} = y_0(x)$$

en utilisant les deux expressions de $\cotan'$ vues dans la question précédente ce qui donne la formule $\sin^2 = \frac{1}{1 + \cotan^2}$.

Finalement, $\forall x \in [x_A, x_B], \quad y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x))$.

15 ▷

Première méthode

$\theta - \sin \circ \theta$ est dérivable sur $[x_A, x_B]$ et

$$(\theta - \sin \circ \theta)' = \theta' - \theta' \cos \circ \theta = \theta' \cdot y_0 = -\frac{2y_0''y_0}{1+y_0'^2} = -y_0''y_0^2$$

en utilisant la question précédente et la question 12.

Or, en dérivant la relation de la question 12 (ce qui est licite vu le caractère $\mathcal{C}^2$ de y_0), on obtient

$$y_0' (1 + y_0'^2) + 2y_0 y_0' y_0'' = 0.$$

Comme $y_0' < 0$, on peut réécrire

$$-y_0''y_0^2 = \frac{1}{2}y_0 (1 + y_0'^2) = 1$$

toujours par 12.

Finalement, $(\theta - \sin \circ \theta)' \equiv 1$ sur l'intervalle $[x_A, x_B]$ d'où l'existence d'une constante $c \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad \theta(x) - \sin(\theta(x)) = x - c.$$

Deuxième méthode

On dérive la relation de la question précédente, ce qui donne (on note $\sin(\theta)$ à la place de $\sin \circ \theta$)

$$y_0' = \theta' \sin(\theta).$$

Or, par définition de θ , $y_0' = \cotan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$. Ainsi,

$$\cos \frac{\theta}{2} = 2\theta' \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Comme $y_0' < 0$, $\frac{\theta}{2}$ est à valeur dans $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, donc $\cos \frac{\theta}{2}$ ne s'annule pas. Comme $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$, on en déduit que $(\theta - \sin \circ \theta)' \equiv 1$ et on conclut comme dans la première méthode.

On a résolu le très célèbre et classique problème de la brachistochrone.

<https://mathcurve.com/courbes2d/brachistochrone/brachistochrone.gif>

V – Une application à une structure optimale : la caténoïde

16 ▷ Cette fois, la fonction $f : (x, y, z) \mapsto y\sqrt{1+z^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
L'identité de Beltrami nous donne $C \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} C &= f(x, y_0(x), y_0'(x)) - y_0'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y_0'(x)) \\ &= y_0(x) \sqrt{1 + y_0'(x)^2} - y_0'(x) y_0(x) \frac{y_0'(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}} \\ &= \frac{y_0(x)}{\sqrt{1 + y_0'(x)^2}}, \end{aligned}$$

donc, par continuité, $\forall x \in [0, 1]$,

$$C^2 (1 + y_0'(x)^2) = y_0(x)^2.$$

Mais y_0 ne peut être nulle car $y_0(0) = 1$, donc $C \neq 0$ et en posant $c = \frac{1}{C} \neq 0$, $\forall x \in [0, 1], 1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2$.

17 ▷ ch est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$ donc induit une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur $\text{ch}(\mathbf{R}^+) = [1, +\infty[$.

Comme $\text{ch}' = \text{sh}$ ne s'annule qu'en 0, argch est dérivable sur $[1, +\infty[\setminus \{\text{ch}(0)\} =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,
 $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\text{ch}'(\text{argch } x)} = \frac{1}{\text{sh}(\text{argch } x)}$.

Or $\text{sh}^2(\text{argch } x) = \text{ch}^2(\text{argch } x) - 1 = x^2 - 1$ et $\text{argch } x \geq 0$ donc $\text{sh}(\text{argch } x) \geq 0$ et donc $\text{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

18 ▷ En utilisant **16** et les hypothèses $c^2 y_0^2 > 1$ et $y_0' > 0$, on obtient, sur $[0, 1]$, $\frac{c y_0'}{\sqrt{c^2 y_0^2 - 1}} = c$, ce qui se réécrit

$$(\text{argch}(c y_0))' = c.$$

Comme $[0, 1]$ est un intervalle, on a une constante $d \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\text{argch}(c y_0(x)) = cx + d$, donc

$$y_0(x) = \frac{\text{ch}(cx + d)}{c}.$$

On obtient une surface de révolution appelée caténoïde, obtenue en faisant tourner une chaînette (un cosinus hyperbolique) autour d'un axe.

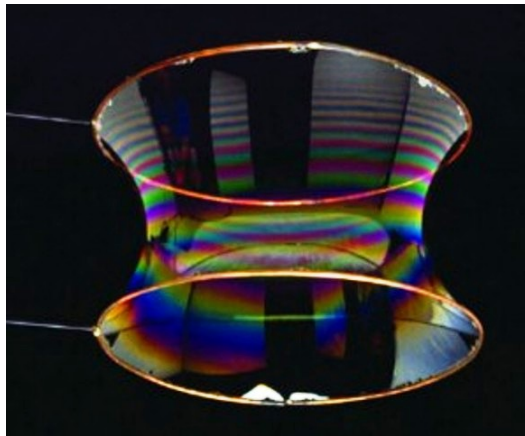


FIGURE 1 – La caténoïde comme surface minimisant l'énergie potentielle de tension superficielle.
Source : <http://www.laphyth.org>

FIN DU CORRIGÉ