

CCMP – Mathématiques 1 MP 2026

Corrigé écrit par F. Denizet – M.P. Fénelon Paris VI

1▷

- φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et de $\exp$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrons maintenant par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme réel P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x}$.

Au rang 0 : la propriété est vraie avec $P_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x}$.

Posons $\boxed{P_{n+1} = -X^2 P_n' + X^2 P_n}$, on a $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-1/x} = P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x};$$

ce qui achève la récurrence.

2▷

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $\varphi^{(n)}(x) = 0$.

φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(\frac{1}{x^k} e^{-1/x} \right) = 0$ ce qui assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (\varphi^{(n)}(x)) = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} (\varphi^{(n)}(x)) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} (\varphi^{(n)}(x)) = 0$.

On peut alors appliquer de manière itérée le théorème "limite dérivée" qui assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est n fois dérivable en 0.

En conclusion, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3▷

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\psi_{c,d}(x) = \varphi(x-c)\varphi(d-x)}$ qui vérifie toutes les conditions demandées.

4▷

Supposons par l'absurde que f est non nulle sur $[a, b]$.

Par continuité de f , il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) \neq 0$, quitte à remplacer f par $-f$ on suppose $f(\alpha) > 0$.

Par continuité de f , il existe c tel que $a < c < \alpha$ et d tel que $\alpha < d < b$ pour lesquels on a, pour tout $x \in [c, d]$, $f(x) > 0$.

On considère alors $\psi_{c,d}$ définie à la question précédente, on a $0 = \int_a^b f(x)\psi_{c,d}(x)dx = \int_c^d f(x)\psi_{c,d}(x)dx$.

Or la fonction $f\psi_{c,d}$ est continue et positive sur $[c, d]$, on en déduit donc que, pour tout $x \in [c, d]$, $f(x)\psi_{c,d}(x) = 0$ ce qui est contradictoire et achève la démonstration par l'absurde puisque l'on sait que pour tout $x \in]c, d[$, $f(x)\psi_{c,d}(x) > 0$.

5▷

Soit $y \in \mathcal{C}$, la fonction $x \mapsto (x, y(x), y'(x))$ est continue de $[x_A, x_B]$ dans $[x_A, x_B] \times U \times V$, par composition avec f continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$, la fonction $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$ et par conséquent elle est intégrable sur ce segment $[x_A, x_B]$, ce qui assure l'existence de $T(y)$.

6▷

Conformément à l'indication de l'énoncé supposons par l'absurde qu'il n'existe pas un tel α .

On suppose donc : $\forall \alpha > 0, \exists \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec " $\alpha = \frac{1}{n}$ ", on peut poser $\varepsilon_n \in]-1/n, 1/n[$, tel que $y_{\varepsilon_n} \notin \mathcal{C}$; on peut alors poser $x_n \in [x_A, x_B]$ tel $y_n(x_n) \notin U$ ou $y'_n(x_n) \notin V$ (*).

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à valeurs dans le compact $[x_A, x_B]$, on peut en extraire une suite $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers $a \in [x_A, x_B]$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) = z_0(x_{\psi(n)}) + \varepsilon_{\psi(n)}\eta(x_{\psi(n)})$ et $y'_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) = z'_0(x_{\psi(n)}) + \varepsilon_{\psi(n)}\eta'(x_{\psi(n)})$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varepsilon_{\psi(n)}) = 0$ et z_0, η, z'_0 et η' sont continues en a ce qui assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_{\psi(n)}(x_{\psi(n)})) = z_0(a)$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y'_{\psi(n)}(x_{\psi(n)})) = z'_0(a).$$

Or $z_0(a) \in U$ et $z'_0(a) \in V$ et toute suite convergente vers un élément d'un ouvert est, à partir d'un certain rang, à valeurs dans cet ouvert. Il existe donc un rang à partir duquel on a $y_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) \in U$ et $y'_{\psi(n)}(x_{\psi(n)}) \in V$ ce qui contredit (*) et achève la démonstration par l'absurde.

7▷

Les hypothèses faites sur la fonction f ne permettent pas d'assurer le résultat demandé nous allons donc supposer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B] \times U \times V$; par ailleurs les notations $\frac{\partial}{\partial y}$ et

$\frac{\partial}{\partial y}$ n'ayant aucun sens rigoureux, nous nous abstiendrons de les utiliser .

On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, pour cela on pose la fonction g définie, pour tout $(x, \varepsilon) \in [x_A, x_B] \times]-\alpha, \alpha[$ par $g(x, \varepsilon) = f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$.

Vérifions les hypothèses requises.

- i. Pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, la fonction $x \mapsto g(x, \varepsilon)$ est continue par morceaux et donc intégrable sur le segment $[x_A, x_B]$.
- ii. Pour tout $x \in [x_A, x_B]$, la fonction $\varepsilon \mapsto g(x, \varepsilon)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\alpha, \alpha[$ et, par règle de la chaîne, pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $\partial_2 g(x, \varepsilon) = \eta(x)\partial_2 f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x)\partial_3 f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$.
- iii. Pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, la fonction $x \mapsto \partial_2 g(x, \varepsilon)$ est continue par morceaux sur le segment $[x_A, x_B]$.
- iv. Soit $\gamma \in]0, \alpha[$, alors la fonction $\partial_2 g$ est continue sur le compact $[x_A, x_B] \times [-\gamma, \gamma]$ et est donc bornée sur ce compact par théorème des bornes atteintes. On peut poser $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(x, \varepsilon) \in [x_A, x_B] \times [-\gamma, \gamma]$, $|\partial_2 g(x, \varepsilon)| \leq M$. La fonction $x \mapsto M$ étant intégrable sur $[x_A, x_B]$, l'hypothèse de domination est assurée.

En conclusion, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\alpha, \alpha[$ et, pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, on a :

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} (\eta(x)\partial_2 f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x)\partial_3 f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))) dx.$$

8▷

Puisque T admet un extremum local en z_0 , la fonction φ admet un extremum local en 0 qui est intérieur à $] -\alpha, \alpha[$ et puisque φ est dérivable en 0 on a $\varphi'(0) = 0$.

$$\text{On a donc } 0 = \int_{x_A}^{x_B} (\eta(x)\partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) + \eta'(x)\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x))) dx.$$

Par intégration par parties on a :

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x)\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x)) dx = \underbrace{[\eta(x)\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x))]_{x_A}^{x_B}}_{=0} - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \frac{d}{dx} (\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x))) dx.$$

On en déduit donc que :

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \left(\partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} (\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x))) \right) dx = 0.$$

9▷

Il suffit ici d'appliquer le lemme démontré à la partie I dont toutes les hypothèses sont satisfaites puisque $x \mapsto \partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} (\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x)))$ est continue sur $[x_A, x_B]$ et que η peut être égale à toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_A, x_B]$ telle que $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$.

On en déduit donc que pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $\boxed{\partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} (\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x))) = 0}$.

10▷

Supposons que $\partial_1 f$ est nulle sur $[x_A, x_B] \times U \times V$.

Posons, pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $h(x) = f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x))$.

La fonction h est dérivable sur $[x_A, x_B]$ et, pour tout $x \in [x_A, x_B]$:

$$h'(x) = \partial_1 f(x, z_0(x), z'_0(x)) + z'_0(x) \partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) + z''_0(x) \partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} (\partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x))) = z'_0(x) \partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} (\partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x))).$$

D'après la question précédente $\partial_2 f(x, z_0(x), z'_0(x)) = \frac{d}{dx} (\partial_3 f(x, z_0(x), z'_0(x)))$, on en déduit $h'(x) = 0$.

La fonction h est constante sur $[x_A, x_B]$ ce qui assure le résultat voulu.

11▷

Posons $U = V = \mathbb{R}$ et $f : (x, y, z) \in [x_A, x_B] \times U \times V \mapsto \sqrt{1 + z^2}$.

Cette fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B] \times U \times V$ on peut appliquer la partie II qui assure que y_0 vérifie l'identité de Beltrami.

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \partial_3 f(x, y_0(x), y'_0(x)) = C$.

Avec la fonction f ici définie on a donc successivement, pour tout $x \in [x_A, x_B]$:

$$\sqrt{1 + (y'_0(x))^2} - y'_0(x) \frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + (y'_0(x))^2}} = C \text{ puis } 1 + (y'_0(x))^2 - (y'_0(x))^2 = C \sqrt{1 + (y'_0(x))^2}$$

ce qui donne en élevant au carré : $\boxed{1 + (y'_0(x))^2 = \frac{1}{C^2}}$.

La fonction $(y'_0)^2$ est constante sur $[x_A, x_B]$ donc la fonction $|y'_0|$ est constante sur $[x_A, x_B]$, or y'_0 est continue sur $[x_A, x_B]$ elle est donc constante sur $[x_A, x_B]$ (immédiat si la constante est nulle, et sinon puisque y'_0 ne s'annule pas elle garde un signe constant par théorème des valeurs intermédiaires).

On a donc y'_0 constante sur $[x_A, x_B]$ ce qui assure $\boxed{y_0 \text{ affine sur } [x_A, x_B]}$.

12▷

On procède de même qu'à la question 11 avec : $U = \mathbb{R}_+^*$, $V = \mathbb{R}_-^*$ et $f : (x, y, z) \in [x_A, x_B] \times U \times V \mapsto \sqrt{\frac{1 + z^2}{y}}$.

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [x_A, x_B]$:

$$\sqrt{\frac{1 + (y'_0(x))^2}{y_0(x)}} - y'_0(x) \frac{y'_0(x)}{\sqrt{y_0(x)} \sqrt{1 + (y'_0(x))^2}} = C \text{ puis } 1 = C \sqrt{y_0(x)} \sqrt{1 + (y'_0(x))^2};$$

en élevant au carré : $\boxed{y_0(x) (1 + (y'_0(x))^2) = c}$ où on a posé $c = \frac{1}{C^2}$.

13▷

La fonction cotan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et y est dérivable.

Pour tout $x \in]0, \pi[$, $\cotan'(x) = -1 - \cotan^2(x) < 0$ donc cotan est strictement décroissante et continue sur $]0, \pi[$ avec $-\infty$ pour limite en 0 et $+\infty$ pour limite en π , ce qui assure que cotan réalise une bijection de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\operatorname{arccotan}'(x) = \frac{1}{\cotan'(\operatorname{arccotan}(x))} = -\frac{1}{1 + x^2}}$.

14▷

Soit $x \in [x_A, x_B]$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(\theta(x)) &= \cos(2\operatorname{arccotan}(y'_0(x))) = 1 - 2\sin^2(\operatorname{arccotan}(y'_0(x))) \\ &= 1 - \frac{2}{1 + \cotan^2(\operatorname{arccotan}(y'_0(x)))} = 1 - \frac{C}{1 + y'_0(x)^2} = 1 - y_0(x); \end{aligned}$$

on a donc $\boxed{y_0(x) = 1 - \cos(\theta(x))}$.

15▷

Posons, pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $h(x) = \theta(x) - \sin(\theta(x))$, alors pour tout $x \in [x_A, x_B]$:

$$h'(x) = \theta'(x) - \theta'(x) \cos(\theta(x)) = \theta'(x)y_0(x) = -\frac{2y''_0(x)}{1 + y'_0(x)^2}y_0(x) = -y''_0(x)y_0(x)^2.$$

Or en dérivant l'égalité $y_0(1 + (y'_0)^2) = c$ on a : $y'_0(1 + (y'_0)^2) + 2y''_0y_0 = 0$;

puisque y'_0 ne s'annule pas, on a : $2y''_0y_0 = -(1 + (y'_0)^2) = -\frac{2}{y_0}$;

filament on a $y''_0y_0^2 = -1$ et donc $h' = 1$.

Il existe donc une constante d telle que, pour tout $x \in [x_A, x_B]$, $h(x) = x - d$, i.e. $\boxed{x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + d}$.

16▷

On applique de nouveau la partie II avec cette fois :

$U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}$, $x_A = 0$, $x_B = 1$ et $f : (x, y, z) \in [x_A, x_B] \times U \times V \mapsto y\sqrt{1 + z^2}$.

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$y_0(x)\sqrt{1 + (y'_0(x))^2} - y'_0(x)\frac{y_0(x)}{\sqrt{1 + (y'_0(x))^2}} = C \text{ puis } y_0(x) = C\sqrt{1 + (y'_0(x))^2};$$

en élevant au carré et en posant $c = \frac{1}{C}$ on a donc, pour tout $x \in [0, 1]$: $\boxed{1 + y'_0(x)^2 = c^2 y_0(x)^2}$.

17▷

La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch}(x)) = +\infty$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

$$\text{On a, pour tout } x \in]1, +\infty[, \boxed{\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}.$$

18▷

L'énoncé est farfelu puisqu'il est demandé de déterminer une fonction y_0 vérifiant $y_0(0) = y_0(1)$ et $y'_0 > 0$... La fonction y_0 recherchée doit effectivement vérifier $y_0(0) = y_0(1) = 1$, elle ne peut pas être monotone si elle n'est pas constante, il faut donc d'ôter l'hypothèse " $y'_0 > 0$ et $c^2 y_0^2 > 1$ ". En revanche pour éliminer la solution constante, on précise que y_0 ne doit être constante au voisinage d'aucun point.

On a $1 + y_0'^2 = c^2 y_0^2$ donc en dérivant $y'_0 y''_0 = c^2 y'_0 y_0$.

L'ensemble $(y'_0)^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide, sinon y'_0 serait nulle sur un intervalle non trivial et y_0 serait constante sur cet intervalle. L'ensemble $[0, 1] \setminus (y'_0)^{-1}(\{0\})$ est donc dense dans $[0, 1]$ or sur cet ensemble, $y''_0 = c^2 y_0$. Par continuité on a donc $y''_0 = c^2 y_0$ sur $[0, 1]$.

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $y_0(x) = \lambda e^{cx} + \mu e^{-cx}$.

Les conditions $y_0(0) = y_0(1) = 1$ donnent $\lambda = \frac{1}{1 + e^c}$ et $\mu = \frac{e^c}{1 + e^c}$.

On a donc, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$y_0(x) = \frac{1}{1 + e^c} (e^{cx} + e^c e^{-cx}) = \frac{e^{c/2}}{1 + e^c} (e^{cx-c/2} + e^{c/2-cx}) = \frac{e^{cx-c/2} + e^{c/2-cx}}{e^{-c/2} + e^{c/2}} = \frac{\operatorname{ch}(c(x - 1/2))}{\operatorname{ch}(c/2)}.$$

La condition $1 + y'_0(0)^2 = c^2 y_0(0)^2 = c^2$ donne alors que $1 + c^2 \operatorname{th}^2(c/2) = c^2$ et donc $c^2 = \operatorname{ch}^2(c/2)$ i.e. (on

a $c > 0$) $c = \operatorname{ch}(c/2)$. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, $\boxed{y_0(x) = \frac{1}{c} \operatorname{ch}(c(x - 1/2))}$ où $c = \operatorname{ch}(c/2)$ (cette dernière condition donne deux valeurs positives possibles pour c).