

Concours Commun Mines-Ponts 2026
Épreuve de mathématiques I, MP trois heures
(Un corrigé¹)

Le Calcul des Variations : Fondements Théoriques et Applications aux
Problèmes d'Optimisation Physique

I. Lemme fondamental du calcul variationnel

1. La fonction est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction φ est la composée de deux fonctions $u : x \mapsto -\frac{1}{x}$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\exp : x \mapsto e^x$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Par composition, φ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}$$

- Pour $n = 0$, on a pour $x > 0$, $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x) = 1 \cdot e^{\frac{-1}{x}}$. En posant $P_0(X) = 1$ (polynôme constant), la propriété est donc vraie.
- Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geq 0$. On a :

$$\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}$$

Par dérivation de cette expression par rapport à x on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right] e^{\frac{-1}{x}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx} \left[e^{\frac{-1}{x}} \right] \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \right) e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \left[\frac{1}{x^2} \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right] e^{\frac{-1}{x}} \end{aligned}$$

En posant $X = \frac{1}{x}$, on définit le polynôme d'indice $n + 1$:

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X)).$$

Comme P_n est un polynôme, P_{n+1} est également un polynôme. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. Sur $] -\infty, 0]$, φ est identiquement nulle, donc toutes ses dérivées à gauche en 0 existent et sont nulles. Sur $]0, +\infty[$, nous avons établi que $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}$. Par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{(n)}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) e^{-t} = 0.$$

1. M.TARQI medtarqi@yahoo.fr

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que φ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

- Pour $n = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0 = \varphi(0)$. φ est donc continue en 0.

- Supposons φ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbf{R}$. $\varphi^{(n)}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$. D'après les calculs précédents, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(n+1)}(x) = 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, $\varphi^{(n)}$ est dérivable en 0 et $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$. Ainsi $\varphi^{(n+1)}$ est continue en 0.

Par récurrence, φ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n , elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

3. On pose, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi_{c,d}(x) = \varphi(x - c) \times \varphi(d - x)$$

Par composition et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, $\psi_{c,d}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

- Soit $x \in]c, d[$. Alors $x - c > 0$ et $d - x > 0$. D'après la définition de φ , on a $\varphi(x - c) > 0$ et $\varphi(d - x) > 0$. Donc le produit est donc strictement positif.

- Si $x \leq c$, alors $x - c \leq 0$ donc $\varphi(x - c) = 0$. De même, si $x \geq d$, alors $d - x \leq 0$ donc $\varphi(d - x) = 0$. Dans les deux cas, le produit est nul. Ainsi, $\psi_{c,d}$ s'annule sur $\mathbf{R} \setminus]c, d[$.

4. Supposons qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Supposons, par exemple, que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f , il existe un intervalle $]c, d[\subset]a, b[$ tel que :

$$\forall x \in]c, d[, \quad f(x) > 0$$

Posons $h = \psi_{c,d}$ la fonction construite à la question **I.3**. On a h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et s'annule en dehors de $]c, d[$, donc $h(a) = h(b) = 0$. D'où :

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = \int_c^d f(x)\psi_{c,d}(x)dx$$

Or, sur l'intervalle $]c, d[$, la fonction $x \mapsto f(x)\psi_{c,d}(x)$ est une fonction continue et strictement positive. Donc :

$$\int_a^b f(x)h(x)dx > 0$$

Ce résultat contredit l'hypothèse $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$. Par conséquent, la supposition est fausse : f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

II. Équation d'Euler-Lagrange

5. Soit $y \in \mathcal{C}$. Pour justifier l'existence de $T(y)$, il suffit de montrer que la fonction intégrée est continue sur le segment $[x_A, x_B]$.

Par définition de $\mathcal{C}$, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$. Ainsi, y et y' sont des fonctions continues sur ce segment. On peut alors définir l'application :

$$\Phi : \begin{cases} [x_A, x_B] \rightarrow [x_A, x_B] \times U \times V \\ x \mapsto (x, y(x), y'(x)) \end{cases}$$

Cette application est continue car chacune de ses composantes l'est.

Par hypothèse la fonction f est continue sur l'ensemble $[x_A, x_B] \times U \times V$. Donc, la fonction $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$, qui est la composée f de Φ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$. Par conséquent, elle est intégrable sur ce segment, ce qui assure l'existence de $T(y)$ pour tout $y \in \mathcal{C}$.

6. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, y_ε est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_A, x_B]$ et $y_\varepsilon(x_A) = y_0$ et $y_\varepsilon(x_B) = y_1$ (car $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$). Donc pour montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, la fonction $y_\varepsilon = z_0 + \varepsilon\eta \in \mathcal{C}$, il suffit de montrer que $\forall x \in [x_A, x_B], (y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \in U \times V$.

Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$ tel que $y_\varepsilon \notin \mathcal{C}$. Ainsi, pour $\alpha = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), on peut trouver $\varepsilon_n \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ et $x_n \in [x_A, x_B]$ tels que $y_{\varepsilon_n}(x_n) \notin U$.

$(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite d'éléments du segment $[x_A, x_B]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers un réel $l \in [x_A, x_B]$.

Par construction, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{\sigma(n)} = 0$, de plus, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad y_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)}) = z_0(x_{\sigma(n)}) + \varepsilon_{\sigma(n)}\eta(x_{\sigma(n)}).$$

Par continuité de z_0 et η : $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)}) = z_0(l)$.

Comme $z_0 \in \mathcal{C}$, on sait que $z_0(l) \in U$. Mais U est un ouvert, donc il existe donc un voisinage de $z_0(l)$ inclus dans U . Ainsi, à partir d'un certain rang, $y_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(n)}) \in U$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Il existe donc $\alpha_1 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$, $y_\varepsilon \in \mathcal{C}$.

Le raisonnement est identique pour $y'_\varepsilon(x) \in V$ (car V est ouvert et z'_0 est continue), ce qui donne un $\alpha_2 > 0$. On prend alors $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$.

7. Considérons la fonction $g : (x, \varepsilon) \mapsto f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$ définie sur $[x_A, x_B] \times]-\alpha, \alpha[$. Appliquons le théorème de dérivation sous-signe intégrale :

- La fonction $g : (x, \varepsilon) \mapsto f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$ est continue sur $[x_A, x_B] \times]-\alpha, \alpha[$ par composition de fonctions continues.
- g admet une dérivée partielle par rapport à ε continue sur $[x_A, x_B] \times]-\alpha, \alpha[$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$$

- Le domaine d'intégration $[x_A, x_B]$ étant un segment et la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}$ étant continue, elle est bornée sur tout compact $[x_A, x_B] \times]-\alpha_0, \alpha_0[$ (avec $\alpha_0 < \alpha$). Il existe donc $M > 0$ tel que $\left| \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \right| \leq M$, où la fonction constante M est intégrable sur $[x_A, x_B]$.

Par conséquent, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on peut intervertir les symboles $\frac{d}{d\varepsilon}$ et $\int$. Par application du théorème de Leibniz, φ est dérivable et :

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) dx = \int_{x_A}^{x_B} \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right] dx$$

8. Par hypothèse, z_0 est un extremum local de f . Par conséquent, φ admet un extremum en $\varepsilon = 0$, et comme φ étant dérivable sur $] -\alpha, \alpha[$, on a nécessairement $\varphi'(0) = 0$, soit :

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right] dx = 0$$

Cette relation est vérifiée pour toute fonction test η s'annulant aux bornes. Cette relation s'écrit aussi :

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) dx + \int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) dx = 0$$

Effectuons une intégration par parties sur le second terme en posant $u(x) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$ et $v'(x) = \eta'(x)$:

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) dx = \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) dx$$

Comme $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, l'équation devient :

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right] dx = 0 \quad (1)$$

9. L'égalité (1) étant vérifiée pour toute fonction η de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]x_A, x_B[$, le lemme de la question **I.4** assure que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) = 0$$

C'est l'équation différentielle d'Euler-Lagrange satisfaite par l'extremum z_0 .

10. On suppose que $f(x, y, z) = f(y, z)$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Considérons la fonction $H(x) = f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y'}(x, z_0(x), z'_0(x))$. Dérivons-la par rapport à la variable x :

$$\frac{dH}{dx}(x) = \frac{d}{dx}[f(x, z_0(x), z'_0(x))] - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right)$$

Puisque f ne dépend pas explicitement de x , la dérivée par rapport à x de f est :

$$\frac{d}{dx}[f(z_0(x), z'_0(x))] = z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$$

En remplaçant cette expression dans le calcul précédent, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx}(x) &= z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \\ &= z'_0(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right] \end{aligned}$$

Or, z_0 vérifie l'équation d'Euler-Lagrange (établie en **II.8**), donc le terme entre crochets est nul. Ainsi, $\frac{dH}{dx} = 0$, ce qui prouve que la fonction $x \mapsto f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x))$ est constante sur $]x_A, x_B[$:

$$\exists C \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in]x_A, x_B[, \quad f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) = C.$$

III. Le chemin le plus court est la ligne droite

11. On considère ici la fonction f définie par $f(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$. On observe que f ne dépend pas explicitement de y . Donc on peut utiliser l'identité de Beltrami. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

Donc il existe une constante $C \in]-1, 1[$ telle que :

$$\frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + y'_0(x)^2}} = C.$$

En isolant $y'_0(x)$, on trouve :

$$y'_0(x)^2 = \frac{C^2}{1 - C^2} \implies y'_0(x) = \text{Cste}$$

La dérivée de y_0 est constante, donc y_0 est une fonction affine :

$$y_0(x) = ax + b$$

Les constantes a et b sont déterminées par les conditions aux limites $y_0(x_A) = y_A$ et $y_0(x_B) = y_B$. Le chemin minimal est donc le segment de droite reliant les deux points.

IV. Le chemin le plus rapide est la cycloïde

- 12.** On considère l'application $T(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x), y'(x)) dx$ avec $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{y}}$. La fonction f ne dépend pas explicitement de x ($\frac{\partial f}{\partial x} = 0$). D'après la question **10.**, il existe une constante C_0 telle que :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x)) = C_0$$

Calculons la dérivée partielle de f par rapport à sa troisième variable z , $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. L'identité de Beltrami devient :

$$\sqrt{\frac{1+y_0'^2}{y_0}} - \frac{y_0'^2}{\sqrt{y_0(1+y_0'^2)}} = C_0$$

D'où, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{(1+y_0'^2) - y_0'^2}{\sqrt{y_0(1+y_0'^2)}} = C_0 \implies \frac{1}{\sqrt{y_0(1+y_0'^2)}} = C_0,$$

où encore :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y_0(x)(1+y_0'(x)^2) = C \tag{2}$$

avec $C = \frac{1}{C_0^2}$.

- 13.** La fonction cotan : $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $\sin x \neq 0$, d'où :

$$\mathcal{D}_{\cotan} = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Notons g la restriction de cotan à $]0, \pi[$. La fonction g est dérivable et

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad g'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cotan^2 x).$$

$g' < 0$ sur $]0, \pi[$, donc g est strictement décroissante. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = -\infty$.

Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $\mathbf{R}$. Sa réciproque est notée arccotan. La fonction arccotan est dérivable sur $\mathbf{R}$ (car $g'(x) \neq 0$, pour tout $x \in]0, \pi[$) et :

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad \text{arccotan}'(y) = \frac{1}{g'(\text{arccotan} y)} = \frac{1}{-(1+y^2)}$$

D'où :

$$\text{arccotan}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

- 14.** Par définition, $\theta(x) = 2 \text{arccotan}(y'_0(x))$ pour tout $x \in [x_A, x_B]$, ce qui est équivalent à :

$$y'_0(x) = \cotan\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle (2), on obtient :

$$y_0(x) = \frac{2}{1 + \cotan^2\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)}$$

En utilisant l'identité trigonométrique $1 + \cotan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, il vient :

$$y_0(x) = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta(x)}{2} \right)$$

D'après la formule $\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$, on obtient :

$$y_0(x) = 2 \left(\frac{1 - \cos(\theta(x))}{2} \right) = 1 - \cos(\theta(x))$$

15. Nous avons $y'_0 = \frac{dy_0}{dx} = \cotan \left(\frac{\theta}{2} \right)$, d'où :

$$dx = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) dy_0$$

D'après la question 14., $y_0 = 1 - \cos \theta$, ce qui donne par différentiation :

$$dy_0 = \sin \theta d\theta = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta$$

Par conséquent :

$$dx = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \cdot 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) d\theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = (1 - \cos \theta) d\theta$$

Par intégration directe, il existe une constante réelle c telle que :

$$x = \theta - \sin \theta + c$$

On retrouve bien le paramétrage classique d'une cycloïde :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta - \sin \theta + c \\ y_0(\theta) = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

V. Une application à une structure optimale : la caténoïde

16. La fonction sous-signe intégrale $f(x, y, z) = 2\pi y \sqrt{1 + z^2}$ ne dépend pas explicitement de x . D'après l'identité de Beltrami (question 10.), il existe une constante $k \in \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x, y_0(x), y'_0(x)) - y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_0(x), y'_0(x)) = k \quad (3)$$

On a $\frac{\partial f}{\partial z} = 2\pi y \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$. En injectant dans l'identité (3)

$$2\pi y_0 \sqrt{1 + y_0'^2} - \frac{2\pi y_0 y_0'^2}{\sqrt{1 + y_0'^2}} = k$$

D'où, après simplification :

$$\frac{2\pi y_0}{\sqrt{1 + y_0'^2}} = k$$

En posant $c = \frac{2\pi}{k}$ (constante non nulle car y_0 n'est pas identiquement nulle), on en déduit :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \sqrt{1 + y_0'(x)^2} = c y_0(x)$$

Ou encore :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 1 + y_0'(x)^2 = c^2 y_0(x)^2.$$

17. La fonction $\cosh : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\cosh' = \sinh$. Pour $x > 0$, $\sinh(x) > 0$. La fonction $\cosh$ est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Comme $\cosh(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty$, $\cosh$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $y > 1$, on a :

$$\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{argch} y)}$$

En utilisant la relation $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ et le fait que $\sinh x \geq 0$ pour $x \geq 0$, on a $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$. Avec $x = \operatorname{argch} y$, il vient :

$$\forall y \in]1, +\infty[, \quad \operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

18. D'après la question 16., la fonction y_0 vérifie $y_0'^2 = c^2 y_0^2 - 1$. Sous l'hypothèse $c^2 y_0^2 > 1$, on peut écrire :

$$\frac{y_0'}{\sqrt{c^2 y_0^2 - 1}} = 1$$

Multiplions par c pour faire apparaître la forme de la dérivée de argch :

$$\frac{cy_0'}{\sqrt{(cy_0)^2 - 1}} = c$$

En intégrant par rapport à x , il existe une constante $d \in \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \operatorname{argch}(cy_0(x)) = cx + d$$

En appliquant la fonction inverse $\cosh$, on obtient $cy_0(x) = \cosh(cx + d)$ ou encore :

$$\forall x \in [0, 1], \quad y_0(x) = \frac{1}{c} \cosh(cx + d)$$

La forme de la surface minimale (film de savon) est donc une **caténoïde**, dont la section est une chaînette.

• • • • •