

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2026

Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, trois heures
(corrigé)

I – Lemme fondamental du calcul variationnel

1. Il est clair que φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ par composition des fonctions usuellement de classe C^∞ suivantes :

- la fonction inverse (au signe près) $x \mapsto -\frac{1}{x}$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$;
- l'exponentielle, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la dérivée $\varphi^{(n)}$ est de la forme $\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ pour tout $x > 0$, où P_n est une application polynomiale.

Si $n = 0$, alors c'est clair (prendre $P = 1$).

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons le résultat vrai au rang n , et démontrons qu'il est vrai au rang $n + 1$. On a pour tout $x > 0$:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-\frac{1}{x}},$$

d'où la proposition au rang $n + 1$ en posant $P_{n+1} = -X^2 P_n' + X^2 P_n \in \mathbf{R}[X]$.

Par principe de récurrence, on a le résultat pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. La classe C^∞ est déjà établie sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle s'obtient sur $\mathbf{R}_-^*$ par le même argument. De plus, par croissances comparées, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi^{(n)}(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} P_n(u) e^{-u} = 0, \quad \text{et} : \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi^{(n)}(x) = 0. \quad (*)$$

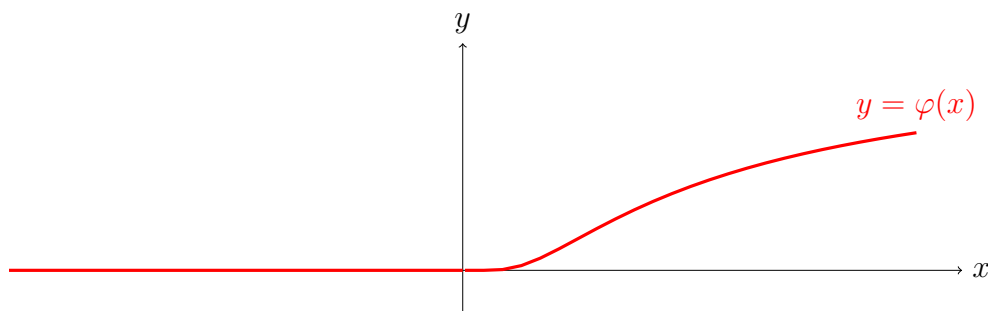
Nous allons en déduire la classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ par le théorème de la limite de la dérivée. On raisonne encore par récurrence, le prédicat étudié étant :

P_n : « l'application φ est de classe C^n sur $\mathbf{R}$. »

Le calcul (*) ci-dessus démontre la continuité de φ en 0, d'où P_0 .

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose P_n . La fonction φ est de classe C^n sur $\mathbf{R}$, de classe C^{n+1} sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, et vérifie (*). Par le théorème de la limite de la dérivée, φ est de classe C^{n+1} sur $\mathbf{R}$ et : $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$. D'où P_{n+1} .

Par le principe de récurrence, φ est de classe C^n sur $\mathbf{R}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. D'où le résultat.



Remarque. La fonction φ est dite *infinitement plate*, comme toute fonction indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées d'ordre supérieur sont nulles en un point.

3. L'application $\psi_{c,d} : x \mapsto \varphi(x - c)\varphi(d - x)$ convient.

4. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas identiquement nulle. Soit x_0 un point intérieur à $[a, b]$ tel que : $f(x_0) \neq 0$ (on peut toujours prendre un point intérieur : si par exemple $f(a) \neq 0$, alors par continuité f ne s'annule pas sur un voisinage de a dans $[a, b]$).

Par continuité, il existe un voisinage $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ inclus dans $]a, b[$ tel que : $f(x_0) \neq 0$ (et par ce même argument de continuité, f est de signe constant sur ce voisinage). Posons alors $c = x_0 - \eta$ et $d = x_0 + \eta$. La fonction $\psi_{c,d}$ construite dans la question précédente est donc nulle en a et b , en plus d'être de classe C^∞ : on peut poser $h = \psi_{c,d}$ dans la relation supposée vérifiée par f :

$$0 = \int_a^b f(x)\psi_{c,d}(x)dx = \int_c^d f(x)\psi_{c,d}(x)dx.$$

La fonction $f \cdot \psi_{c,d}$ est continue sur $[c, d]$ en tant que produit de deux fonctions continues (car f l'est sur $[a, b]$ et : $[c, d] \subseteq [a, b]$). Elle est de signe constant sur ce même intervalle. Par propriété de séparation de l'intégrale : $\forall x \in [c, d], f(x)\psi_{c,d}(x) = 0$. En particulier x_0 appartient à $[c, d]$ et $\psi_{c,d}(x_0) \neq 0$, donc cette égalité donne : $f(x_0) = 0$. Absurde par définition de x_0 .

Par l'absurde, on a démontré que f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

II – Équation d'Euler-Lagrange

Remarque importante. Les hypothèses de régularité sur f sont insuffisantes pour traiter la quasi-intégralité des questions de cette partie. Nous les résoudrons donc en ajoutant l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H) : « les dérivées partielles de f se prolongent continûment sur $[x_A, x_B] \times U \times V$. »

Le lecteur pourra observer que cette hypothèse est bien vérifiée par les fonctions des parties suivantes : elles sont toutes de classe C^∞ sur un ouvert de la forme $\mathbf{R} \times U \times V$ (elles ne dépendent même pas de x), ce qui entraîne bien la justesse de **(H)** et des hypothèses de cette partie.

5. Soit $y \in \mathcal{C}$. L'application $x \mapsto (x, y(x), y'(x))$ est continue sur $[x_A, x_B]$ composante par composante, puisque y est de classe C^2 par hypothèse, et à valeurs dans $[x_A, x_B] \times U \times V$ encore par hypothèse sur y et y' .

Par composition avec f qui est continue sur $[x_A, x_B] \times U \times V$, l'application $x \mapsto f(x, y(x), y'(x))$ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$, donc $T(y) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x), y'(x))dx$ existe bien. D'où le résultat.

6. Raisonnons par l'absurde et supposons :

$$\forall \alpha > 0, \exists \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \quad y_\varepsilon \notin \mathcal{C}.$$

Notons que par définition, y_ε est de classe C^2 pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$ (car z_0 et η le sont) et vérifie : $y_\varepsilon(x_A) = z_0(x_A) = y_0$, $y_\varepsilon(x_B) = z_0(x_B) = y_1$ (car $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$). Le fait de ne pas appartenir à $\mathcal{C}$ se traduit donc ainsi :

$$\forall \alpha > 0, \exists \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \exists x_\varepsilon \in [x_A, x_B], \quad (y_\varepsilon(x_\varepsilon), y'_\varepsilon(x_\varepsilon)) \in \mathbf{R}^2 \setminus U \times V.$$

En prenant $\alpha = \frac{1}{n}$, on obtient une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \exists \varepsilon_n \in \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[, \exists x_n \in [x_A, x_B], \quad (y_{\varepsilon_n}(x_n), y'_{\varepsilon_n}(x_n)) \in \mathbf{R}^2 \setminus U \times V. \quad (*)$$

(On note x_n plutôt que x_{ε_n} pour alléger les notations.)

En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

La suite réelle $(x_n)_{n \geq 1}$ étant bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstraß elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ convergeant vers un réel $x \in [x_A, x_B]$. Par continuité de z_0 , η et de leurs dérivées, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\frac{1}{\varphi(n)}}(x_{\varphi(n)}) = z_0(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y'_{\frac{1}{\varphi(n)}}(x_{\varphi(n)}) = z'_0(x),$$

et comme $\mathbf{R}^2 \setminus U \times V$ est fermé, par $(*)$ on a : $(z_0(x), z'_0(x)) \in \mathbf{R}^2 \setminus U \times V$. Cela contredit l'appartenance de z_0 à $\mathcal{C}$.

Par l'absurde, on a démontré : $\exists \alpha > 0, \forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, y_\varepsilon \in \mathcal{C}$.

7. Posons :

$$\forall \varepsilon \in]-\alpha, \alpha[, \forall x \in [x_A, x_B], \quad g(x, \varepsilon) = f(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) = f(x, z_0(x) + \varepsilon \eta(x), z'_0(x) + \varepsilon \eta'(x)).$$

On sait que z_0 et η sont de classe C^2 sur $[x_A, x_B]$, donc par composition avec $(\varepsilon, a, b) \mapsto a + \varepsilon b$ nous avons la classe C^2 de $(x, \varepsilon) \mapsto y_\varepsilon(x)$ sur $] -\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[$. On en déduit que $(x, \varepsilon) \mapsto (x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x))$ est de classe C^1 sur $] -\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[$ et à valeurs dans $]x_A, x_B[\times U \times V$, donc par composition g est de classe C^1 sur $] -\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[$.

Par ailleurs on a, par la règle de la chaîne :

$$\forall (\varepsilon, x) \in]-\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[, \quad \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)).$$

Ceci étant dit, démontrons que φ est de classe C^1 sur $] -\alpha, \alpha[$ grâce au théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- l'application g est de classe C^1 sur $] -\alpha, \alpha[\times]x_A, x_B[$, donc par composition avec l'application polynomiale (composante par composante) $\varepsilon \mapsto (x, \varepsilon)$ on a la classe C^1 de $\varepsilon \mapsto g(x, \varepsilon)$ pour tout $x \in]x_A, x_B[$; de plus, la dérivée $(x, \varepsilon) \mapsto \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)$ se prolonge par continuité sur $] -\alpha, \alpha[\times [x_A, x_B]$ grâce à **(H)** (hypothèse ajoutée en début de correction de cette partie);
- par un argument similaire et par **(H)**, pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$ on a la continuité (par morceaux) sur le segment $[x_A, x_B]$ de $x \mapsto g(x, \varepsilon)$ et $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon)$, ce qui par ailleurs assure leur intégrabilité sur $[x_A, x_B]$;
- soit K un compact inclus dans $] -\alpha, \alpha[$; comme $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}$ est prolongeable en une fonction continue sur le compact non vide $K \times [x_A, x_B]$ d'après **(H)** et son expression ci-dessus, par le théorème des bornes atteintes il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que :

$$\forall (\varepsilon, x) \in K \times [x_A, x_B], \quad \left| \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) \right| \leq M, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et $x \mapsto M$ est continue sur le segment $[x_A, x_B]$, donc intégrable.

Toutes les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre sont vérifiées sur une base de voisinages compacts. D'où le résultat, φ est de classe C^1 sur $] -\alpha, \alpha[$ et pour tout $\varepsilon \in]-\alpha, \alpha[$ on a :

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(x, \varepsilon) dx = \int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) \right) dx.$$

8. Comme T admet un extremum local en z_0 , l'application φ admet un extremum local en 0 sur l'ouvert $] -\alpha, \alpha[$. On a donc : $\varphi'(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) + \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) dx = 0. \quad (*)$$

Notons γ l'application $x \mapsto (x, z_0(x), z'_0(x))$, de classe C^1 sur $]x_A, x_B[$ et à valeurs dans $]x_A, x_B[\times U \times V$. La formule de l'intégration par parties (qui est licite grâce à **(H)**) donne :

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) dx = \left[\eta(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) \right) dx.$$

Comme : $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$, on en déduit :

$$\int_{x_A}^{x_B} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) dx = - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) \right) dx. \quad (\dagger)$$

En combinant $(*)$ et $(\dagger)$, on a le résultat voulu :

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right) \eta(x) dx = 0.$$

9. Une application de classe C^∞ est en particulier de classe C^2 . Les questions précédentes démontrent donc que pour toute fonction h de classe C^∞ , telle que $h(x_A) = h(x_B) = 0$, on a :

$$\int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) \right) h(x) dx = 0.$$

L'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right)$ étant continue sur $[x_A, x_B]$ d'après **(H)**, on peut appliquer le résultat de la partie I. On en déduit le résultat voulu :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0(x), z'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) \right) = 0.$$

10. Notons $\gamma : x \mapsto (x, z_0(x), z'_0(x))$ et g l'application définie sur $]x_A, x_B[$ par :

$$x \mapsto f(\gamma(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)).$$

Elle est dérivable sur $]x_A, x_B[$ et on a pour tout $x \in]x_A, x_B[$, par la règle de la chaîne :

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x)) + z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(x)) + z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) - z'_0(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) \right).$$

Par la question précédente :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x)) + z''_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(x)).$$

Par l'hypothèse de cette question, on a donc : $\forall x \in]x_A, x_B[, g'(x) = 0$. Il existe donc $C \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall x \in]x_A, x_B[, g(x) = C$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad f(x, z_0(x), z'_0(x)) - z'_0(x) \frac{\partial f}{\partial z}(x, z_0(x), z'_0(x)) = C,$$

d'où le résultat.

III – Le chemin le plus court est la ligne droite !

11. L'application $f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{1+z^2}$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^3$, en tant que composition de l'application polynomiale $(x, y, z) \mapsto 1+z^2$, de classe C^2 sur $\mathbf{R}^3$ et à valeurs dans $[1, +\infty[\subseteq \mathbf{R}_+^*$, et de la racine carrée qui est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$.

On en déduit que f vérifie les hypothèses de la partie II (avec $U = V = \mathbf{R}$, de sorte que la condition $(y_0(x), y'_0(x)) \in U \times V$ soit automatiquement vérifiée). Par l'identité de Beltrami, il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad \sqrt{1+y'_0(x)^2} - y'_0(x) \frac{y'_0(x)}{\sqrt{1+y'_0(x)^2}} = C.$$

Après multiplication par $\sqrt{1+y'_0(x)^2}$, on a :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad 1 = C\sqrt{1+y'_0(x)^2}.$$

On en déduit que C n'est pas nul, puis :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad |y'_0(x)| = \sqrt{\frac{1}{C} - 1}.$$

Or y'_0 est continue, donc $y'_0(]x_A, x_B[)$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires, inclus dans $\left\{\sqrt{\frac{1}{C}-1}, -\sqrt{\frac{1}{C}-1}\right\}$ d'après cette égalité : ce doit être un singleton. On en déduit que y'_0 est constante sur $]x_A, x_B[$ donc y_0 est affine sur $]x_A, x_B[$, et même sur $[x_A, x_B]$ par continuité : d'où le résultat.

IV – Le chemin le plus rapide est la cycloïde

12. Posons $U = \mathbf{R}_+^*$, $V = \mathbf{R}_-^*$, et considérons :

$$f : (x, y, z) \mapsto \sqrt{\frac{1+z^2}{y}},$$

qui est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times U \times V$ par composition de $(x, y, z) \mapsto \frac{1+z^2}{y}$, de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times U \times V$ (quotient d'applications polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas) et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, et de la racine carrée qui est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$. On a en outre :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R} \times U \times V, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{y}\sqrt{1+z^2}}.$$

Les hypothèses sur y_0 assurent que l'on a bien : $y_0 \in \mathcal{C}$. Par l'identité de Beltrami, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad \sqrt{\frac{1+(y'_0(x))^2}{y_0(x)}} - y'_0(x) \frac{y'_0(x)}{\sqrt{y_0(x)}\sqrt{1+(y'_0(x))^2}} = c,$$

or pour tout $x \in]x_A, x_B[$ on a :

$$\sqrt{\frac{1+(y'_0(x))^2}{y_0(x)}} - y'_0(x) \frac{y'_0(x)}{\sqrt{y_0(x)}\sqrt{1+(y'_0(x))^2}} = \frac{1+(y'_0(x))^2 - (y'_0(x))^2}{\sqrt{y_0(x)}(1+(y'_0(x))^2)} = \frac{1}{\sqrt{y_0(x)}(1+(y'_0(x))^2)}$$

d'où le résultat, en élevant au carré la relation ci-dessus et en posant $\frac{1}{c^2}$ (on a bien $c \neq 0$, puisque c'est égal à une quantité de la forme $\frac{1}{\star}$) :

$$\forall x \in]x_A, x_B[, \quad y_0(x) (1 + y'_0(x)^2) = C.$$

La continuité de chaque membre de l'égalité permet d'étendre la relation à $x \in [x_A, x_B]$.

13. La fonction cotan est définie sur $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ (on évite le lieu d'annulation du sinus). En particulier elle est dérivable sur $]0, \pi[$ en tant que quotient d'applications dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cotan'(x) = \frac{-(\sin(x))^2 - (\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} = -1 - (\cotan(x))^2 < 0.$$

On en déduit que cotan décroît strictement sur l'intervalle $]0, \pi[$. Comme elle est de plus continue, elle induit une bijection de $]0, \pi[$ dans $\left] \lim_{\pi^-} \cotan, \lim_{0^+} \cotan \right[=]-\infty, \infty[$.

Comme cotan' ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, la bijection réciproque arccotan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\operatorname{arccotan}'(x) = \frac{1}{\cotan'(\operatorname{arccotan}(x))} = -\frac{1}{1 + \cotan(\operatorname{arccotan}(x))^2} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Autre approche. On a simplement : $\forall x \in]0, \pi[, \cotan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Comme $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est une bijection de $]0, \pi[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de réciproque $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$, on a immédiatement (grâce à la relation $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$) :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \operatorname{arccotan}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Cela permet de court-circuiter toute l'étude ci-dessus, puisque les propriétés de l'arc tangente sont du cours.

14. On a pour tout $x \in [x_A, x_B]$:

$$1 - \cos(\theta(x)) = 2 \sin\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)^2 = \frac{2 \sin\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)^2} = \frac{2}{1 + \cotan\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)^2} = \frac{2}{1 + (y'_0(x))^2}$$

d'où le résultat par la question 12 (avec $C = 2$) :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad 1 - \cos(\theta(x)) = y_0(x).$$

15. Notons g l'application $x \mapsto x - (\theta(x) - \sin(\theta(x)))$. Elle est dérivable sur $[x_A, x_B]$ et on a pour tout $x \in [x_A, x_B]$:

$$g'(x) = 1 - \theta'(x)(1 - \cos(\theta(x))) \stackrel{(q.14)}{=} 1 - \theta'(x)y_0(x) \stackrel{(q.13)}{=} 1 + \frac{2y_0''(x)y_0(x)}{1 + (y_0'(x))^2}.$$

Or, en dérivant l'égalité $y_0 \cdot (1 + y_0'^2) = 2$ (question 12), on trouve :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad y_0'(x) \left((1 + y_0'(x)^2) + 2y_0(x)y_0''(x) \right) = 0,$$

et on a : $\forall x \in [x_A, x_B], y_0'(x) < 0$, donc :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad 2y_0(x)y_0''(x) = -(1 + y_0'(x)^2).$$

Ceci permet de finir le calcul de g' :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad g'(x) = 1 - 1 = 0.$$

Puisque g est continue sur $[x_A, x_B]$ et de dérivée nulle sur l'intervalle $]x_A, x_B]$, il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall x \in [x_A, x_B], g(x) = c$. D'où le résultat :

$$\forall x \in [x_A, x_B], \quad x = \theta(x) - \sin(\theta(x)) + c.$$

V – Une application à une structure optimale : la caténoïde

16. Le raisonnement de la question 12, mais avec $f : (x, y, z) \mapsto y\sqrt{1+z^2}$ et $U = V = \mathbf{R}$, donne l'existence de $C \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad y_0(x) \left(\sqrt{1 + (y'_0(x))^2} - y'_0(x) \frac{y'_0(x)}{\sqrt{1 + (y'_0(x))^2}} \right) = C,$$

et après multiplication par $\sqrt{1 + (y'_0(x))^2}$, puis élévation au carré :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad (y_0(x))^2 = C^2(1 + (y'_0(x))^2).$$

Si $C = 0$, alors y_0 est nulle sur $]0, 1[$ et donc par continuité : $y_0(0) = 0 \neq 1$. Absurde par définition de y_0 . On a donc : $C \neq 0$, puis :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad 1 + (y'_0(x))^2 = \frac{(y_0(x))^2}{C^2}.$$

Il suffit de poser $c = \frac{1}{C} \neq 0$ pour avoir le résultat (la continuité étend la relation à $x \in [0, 1]$).

17. On a : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $\cosh'(x) = \sinh(x) \geq 0$, et l'inégalité est stricte pour $x > 0$. On en déduit que $\cosh$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, or $\cosh$ est continue sur cet intervalle. Elle induit donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $\left[\cosh(0), \lim_{+\infty} \cosh \right] = [1, +\infty[$.

Comme $\cosh' = \sinh$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+^*$, la bijection réciproque $\argch$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$\argch'(x) = \frac{1}{\cosh'(\argch(x))} = \frac{1}{\sinh(\argch(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\argch(x))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Remarque. On peut expliciter $\argch$:

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

18. Par la question 16, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{c|y'_0(x)|}{\sqrt{(cy_0(x))^2 - 1}} = c.$$

Par hypothèse de l'énoncé : $\forall x \in [0, 1]$, $y'_0(x) > 0$. Cette égalité se réécrit donc :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (\argch(c \cdot y_0))'(x) = c$$

et on en déduit :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \argch(c \cdot y_0(x)) = cx + d.$$

En composant par $\cosh$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad y_0(x) = \frac{\cosh(cx + d)}{c}.$$

La condition $y_0(0) = y_0(1) = 1$ donne :

$$\cosh(d) = c, \quad \text{et} : \quad \cosh(c + d) = c.$$

Si $d \in \mathbf{R}_+$, alors on déduit de la première égalité : $d = \argch(c)$. Si $d \in \mathbf{R}_-$, alors la parité du cosinus hyperbolique permet de se ramener au cas précédent et on obtient : $d = -\argch(c)$.

La seconde égalité ne permet pas d'obtenir une expression exacte de c et on n'ira pas plus loin. Ainsi :

$$\forall x \in [0, 1], \quad y_0(x) = \frac{\cosh(cx \pm \operatorname{argch}(c))}{c}.$$

Remarque. Grâce aux formules $\cosh(a \pm b) = \cosh(a) \cosh(b) \pm \sinh(a) \sinh(b)$ et $\sinh(a) = \sqrt{\cosh(a)^2 - 1}$ (pour a positif), cette expression est un peu simplifiable :

$$\forall x \in [0, 1], \quad y_0(x) = \pm \cosh(cx) \pm \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} \sinh(cx).$$