

Mines-Ponts 2026 — Mathématiques 2

FILIÈRES MP – MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

Autour de $O_n(\mathbf{R})$ et de $SL_n(\mathbf{R})$

I – Quelques propriétés de $O_n(\mathbf{R})$

1 ▷ Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On calcule

$$\chi_{R_\theta} = X^2 - \operatorname{tr}(R_\theta)X + \det R_\theta = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

■ On en conclut déjà que $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$,

- $\operatorname{Sp}_{\mathbf{R}} R_\theta = \emptyset$ et R_θ n'est pas $\mathbf{R}$ -diagonalisable.
- $\operatorname{Sp}_{\mathbf{C}} R_\theta = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ contient deux nombres complexes distincts en dimension 2, donc R_θ est $\mathbf{C}$ -diagonalisable.

■ Supposons désormais que $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$. Alors $R_\theta \in \{I_2, -I_2\}$ est $\mathbf{R}$ -diagonalisable et $\mathbf{C}$ -diagonalisable.

2 ▷ ■ On vérifie déjà que toute matrice R_θ est orthogonale (ses colonnes sont orthonormales) et de déterminant 1, donc appartient à $SO_2(\mathbf{R})$.

■ Réciproquement, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{R})$, alors

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

Des deux premières équations, on tire des réels θ et ϕ tels que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \phi \\ \sin \theta & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

La troisième équation donne alors

$$0 = \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi = \sin(\theta + \phi).$$

On a donc

$$\phi \equiv -\theta \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad \phi \equiv \pi - \theta \pmod{2\pi}$$

Dans le premier cas, $M = R_\theta$ est bien de déterminant 1, tandis que dans le second cas, $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ est de déterminant -1 , ce qui est exclu.

■ On a donc bien $SO_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$.

3 ▷ ■ Comme $M_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, pour montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est compact, il suffit de montrer qu'il est fermé et borné pour n'importe quelle norme.

Or $O_n(\mathbf{R})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto M^T M$ (la bilinéarité du produit matriciel et la linéarité de la transposition sur un espace de dimension finie en assurent la continuité) et bornée car, avec la norme euclidienne $\|M\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)}$, on a $O_n(\mathbf{R}) \subset \overline{B}_2(0, \sqrt{n})$. Ou alors avec la norme $\|M\|_\infty = \max_{i,j} |m_{i,j}|$, $O_n(\mathbf{R}) \subset \overline{B}_\infty(0, 1)$ car les colonnes sont normées.

- $O_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det$ est une application continue sur $M_n(\mathbf{R})$ (elle est polynomiale en les coefficients de la matrice) et $\det(O_n(\mathbf{R})) = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs.

- 4 ▷ ■ Comme l'application $f : \theta \mapsto R_\theta$ est continue sur $\mathbf{R}$, $SO_2(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R})$ est une image continue du connexe par arcs $\mathbf{R}$ donc $SO_2(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

On aurait aussi pu relier continûment R_θ à I_2 , deux matrices de $SO_2(\mathbf{R})$, avec $g_\theta : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow SO_2(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto R_{t\theta} \end{cases}$ et conclure par transitivité.

- Traitons le cas général. Une matrice $M \in SO_n(\mathbf{R})$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont soit de la forme R_θ , soit des réels 1 ou -1 .
Comme le déterminant est positif, une telle matrice comporte un nombre pair de -1 .
En les rassemblant deux par deux, on fait apparaître des blocs R_π .
Ainsi, une forme réduite de M est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$D = \text{diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_q}, I_p).$$

Soit $P \in O_n(\mathbf{R})$ tel que $M = PDP^\top$.

Considérons l'application

$$h : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow SO_n(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto P \text{diag}(g_{\theta_1}(t), \dots, g_{\theta_q}(t), I_p) P^\top \end{cases}$$

où pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, g_{θ_k} est un chemin continu dans $SO_2(\mathbf{R})$ reliant I_2 à R_{θ_k} .

La continuité de h provient de celle des applications g_{θ_k} ainsi que de celle de $A \mapsto PAP^\top$ qui est linéaire sur un espace de dimension finie.

Ainsi, toute matrice de $SO_n(\mathbf{R})$ est reliée continûment à $I_n \in SO_n(\mathbf{R})$ donc, par transitivité, à toute autre matrice de $SO_n(\mathbf{R})$.

Finalement, $SO_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

- 5 ▷ Soit H un sous-groupe de $(O_n(\mathbf{R}), \times)$ contenant $SO_n(\mathbf{R})$.

Supposons que $H \neq SO_n(\mathbf{R})$. On a alors $M \in O_n(\mathbf{R}) \setminus SO_n(\mathbf{R})$ tel que $M \in H$.

Soit $A \in O_n(\mathbf{R}) \setminus SO_n(\mathbf{R})$.

Alors $A = (A \times M) \times M^{-1}$ avec $B = A \times M \in SO_n(\mathbf{R}) \subset H$ (il s'agit d'une matrice orthogonale de déterminant positif). Or $M \in H$ donc $A = B \times M^{-1} \in H$ car c'est un sous-groupe.

Finalement, $H = O_n(\mathbf{R})$.

On a donc deux sous-groupes de $(O_n(\mathbf{R}), \times)$ contenant $SO_n(\mathbf{R})$: $O_n(\mathbf{R})$ et $SO_n(\mathbf{R})$.

- 6 ▷ ■ Il y a exactement 6 matrices 2×2 inversibles à coefficients dans $\{0, 1\}$ parmi les 16 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Les matrices ayant 0, 3 ou 4 zéros, ou une colonne de zéros sont non inversibles.)

Or, par indépendance, si M est une de ces matrices et $k \in \{2, 3\}$ son nombre de 1, $P(Z_2 = M) = p^k(1-p)^{4-k}$.

Ainsi, $P(Z_2 \in GL_2(\mathbf{R})) = 2p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) = 2p^2(1-p)(1+p) = 2p^2(1-p^2)$.

- Comme les colonnes doivent être orthonormées, une matrice orthogonale à coefficients dans $\{0, 1\}$ est une matrice ayant dans chaque ligne et chaque colonne exactement un coefficient non nul valant 1 (appelée matrice de permutation).

Il y en a exactement $n!$ (correspondant aux nombre de permutations possibles des colonnes de I_n), et la probabilité que Z_n vaille n'importe laquelle de ces matrices est, par indépendance, $p^n(1-p)^{n^2-n}$.

Donc $P(Z_n \in O_n(\mathbf{R})) = n!p^n(1-p)^{n^2-n}$.

- Le déterminant d'une matrice obtenue par permutation des colonnes de I_n avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est sa signature $\varepsilon(\sigma)$ (c'est le caractère anti-symétrique du déterminant par rapport à ses colonnes).

Donc les matrices orthogonales positives sont celles correspondant aux permutations paires.

Or il y a le même nombre de permutations paires que de permutations impaires dans $\mathfrak{S}_n$. En effet, si on note $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires, et si τ est une transposition (cela fonctionne aussi avec n'importe quelle autre permutation impaire),

$$\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{A}_n & \longrightarrow \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n \\ \sigma & \longmapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right.$$

est une bijection de réciproque

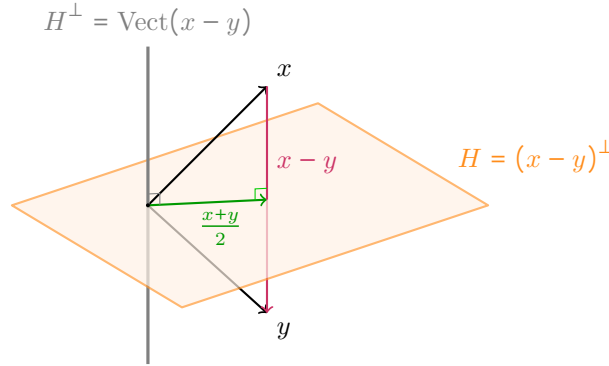
$$\left| \begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n & \longrightarrow \mathfrak{A}_n \\ \sigma & \longmapsto \sigma \circ \tau^{-1} (= \sigma \circ \tau) \end{array} \right.$$

Donc $|\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n| = \frac{n!}{2}$.

Finalement, $P(Z_n \in \text{SO}_n(\mathbf{R})) = \frac{n!}{2} p^n (1-p)^{n^2-n}$.

7 ▷ Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\|$.

- Si $x = y$, on peut considérer la réflexion s par rapport à un hyperplan contenant x et y , qui envoie x sur $x = y$.
- Sinon, faire un dessin nous encourage à introduire la réflexion s par rapport à l'hyperplan $H = (x - y)^\perp$ (autrement dit l'hyperplan médiateur de x et y).



Comme

$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$$

avec $\frac{1}{2}(x-y) \in H^\perp$ par définition de H et $\frac{1}{2}(x+y) \in H$ car $(x-y) \left| x+y \right. = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$, on a

$$s(x) = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y.$$

Dans les deux cas, il suffit de choisir pour A la matrice dans la base canonique de s .

8 ▷ Cette question n'utilise pas la compacité de $\mathcal{G}$.

- Remarquons que $G_0 = I_n \in \mathcal{G}$ convient.
- Comme $\| \|Gx\| x \| = \|Gx\|$, d'après la question précédente, on a une matrice de réflexion $A \in \text{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$ telle que $(AG)x = A(Gx) = \|Gx\| x$. On peut donc poser $G_1 = AG \in \mathcal{G}$.
- On pose alors, pour $p \in \mathbf{Z}$, $G_p = G_1^p \in \mathcal{G}$ (G_1 étant bien inversible comme membre de $\mathcal{G}$.)

Pour $p \in \mathbf{N}$, on a déjà $G_p x = \|Gx\|^p x$ pour $p \in \{0, 1\}$ et si on suppose, pour $p \geq 1$, l'identité vérifiée, alors

$$G_{p+1}x = G_1(G_p x) = \|Gx\|^p G_1 x = \|Gx\|^{p+1} x$$

ce qui établit la récurrence.

Reste à vérifier la relation pour $p < 0$. Remarquons que $\|Gx\| \neq 0$, car $x \neq 0_E$ et $G \in \mathcal{G}$ est inversible.

Or, de $G_1 x = \|Gx\| x$, on tire $G_1^{-1} x = \|Gx\|^{-1} x$ et avec une récurrence en tous points similaire à la précédente, on tire que pour tout $q > 0$, $(G_1^{-1})^q x = (\|Gx\|^{-1})^q x$.

On a donc bien pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $G_1^p x = \|Gx\|^p x$.

9 ▷ On reprend les notations de la question précédente.

On sait que $\mathcal{G}$ est compact, donc borné. Considérons $\|\cdot\|$, norme matricielle subordonnée à $\|\cdot\|$.

Alors on a $M \in \mathbf{R}^+$ tel que pour tout $g \in \mathcal{G}$, $\|g\| \leq M$. En particulier, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, comme $\|x\| = 1$,

$$\|G_p x\| \leq \|G_p\| \|x\| \leq M.$$

Ainsi,

$$M \geq \|G_p x\| = \|\|Gx\|^p x\| = \|Gx\|^p.$$

On montre que $\|Gx\| = 1$. Si ce n'était pas le cas, on aurait soit $\|Gx\| > 1$ et une contradiction en faisant $p \rightarrow +\infty$, soit $\|Gx\| < 1$ et une contradiction en faisant $p \rightarrow -\infty$.

On en déduit que

$$\|x\| = 1 \implies \|Gx\| = 1.$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, comme $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$,

$$\frac{\|Gx\|}{\|x\|} = \left\| G \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Finalement, pour tout $x \in E$ (y compris 0_E), $\|Gx\| = \|x\|$, donc G matrice d'isométrie, et donc $G \in O_n(\mathbf{R})$.

Comme G était un élément quelconque de $\mathcal{G}$ et comme $O_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}$, on conclut que $\mathcal{G} = O_n(\mathbf{R})$.

II – Calcul différentiel sur $O_n(\mathbf{R})$ et $SL_n(\mathbf{R})$

10 ▷ Comme tous les coefficients de $f(M)$ sont polynomiaux en ceux de M ,

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ (et même } \mathcal{C}^\infty \text{) sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

$T : M \mapsto M^\top$ est linéaire donc différentiable en toute matrice M et $dT(M) = T$.

Alors, par bilinéarité du produit matriciel, on retrouve la différentiabilité de f et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$df(M) : H \mapsto dT(M)(H)M + T(M)H = H^\top M + M^\top H.$$

On peut aussi le retrouver à la main en écrivant

$$(M + H)^\top (M + H) = M^\top M + M^\top H + H^\top M + H^\top H$$

avec $H \mapsto M^\top H + H^\top M$ linéaire et, en choisissant une norme sous-multiplicative (elles sont toutes équivalentes),

$$0 \leq \|H^\top H\| \leq \|H^\top\| \|H\| \text{ donc } \frac{\|H^\top H\|}{\|H\|} \rightarrow 0 \text{ et } H^\top H = o(H).$$

11 ▷ Soit $H \in T$. On a $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$.

Mais alors, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(\gamma(t)) = I_n$, donc, en dérivant en 0,

$$0 = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(I_n)(H) = H^\top + H.$$

Ainsi, $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

12 ▷ Soient, pour $i \in \{1, 2\}$, $H_i \in T$, $\varepsilon_i \in \mathbf{R}_*^+$, $\gamma_i :]-\varepsilon_i, \varepsilon_i[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$, tel que $\gamma_i(0) = I_n$ et $\gamma_i'(0) = H_i$.

Alors, si $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,

$$\gamma : \left. \begin{array}{c}]-\varepsilon, \varepsilon[\\ t \end{array} \right\} \begin{array}{c} \longrightarrow O_n(\mathbf{R}) \\ \longmapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t) \end{array}$$

est bien définie car $O_n(\mathbf{R})$ est un groupe multiplicatif, dérivable par opération en 0 et vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = \gamma_1'(0)\gamma_2(0) + \gamma_1(0)\gamma_2'(0) = H_1 + H_2$, donc $H_1 + H_2 \in T$.

Puis, si $\lambda \in \mathbf{R}^*$, $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1}{|\lambda|} > 0$,

$$\gamma_3 : \left| \begin{array}{c}] - \varepsilon_3, \varepsilon_3[\\ t \end{array} \right| \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \\ \longmapsto \gamma_1(\lambda t) \end{array}$$

est bien définie, dérivable par opération en 0 et vérifiant $\gamma_3(0) = I_n$ et $\gamma'_3(0) = \lambda \gamma'_1(0) = \lambda H_1$, donc $\lambda H_1 \in T$. Il reste à voir que $0_n \in T$ en considérant $\gamma : t \in] - 1, 1[\mapsto I_n$.

Comme, de plus, T est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, par caractérisation des sous-espaces vectoriels,

$(T, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

13 ▷ On a déjà vu que $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Montrons que l'inclusion réciproque est vraie.

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. L'idée astucieuse consiste à utiliser l'exponentielle de matrice. Considérons

$$\gamma : \left| \begin{array}{c}] - 1, 1[\\ t \end{array} \right| \begin{array}{l} \longrightarrow \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \\ \longmapsto \exp(tA) \end{array}$$

Elle est bien définie car pour tout $t \in] - 1, 1[$, en utilisant la continuité de la transposition (qui est linéaire sur un espace de dimension finie),

$$\exp(tA)^T = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right)^T = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} (A^T)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A^k = \exp(-tA) = \exp(tA)^{-1}$$

De plus, elle est dérivable en 0, avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A \exp(0 \cdot A) = A$. On en conclut que $A \in T$.

Finalement, $T = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

Remarque : on n'a pas utilisé la question précédente, mais on retrouve bien le fait que T soit un espace vectoriel.

14 ▷ Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $M_p = \text{diag}\left(p, \frac{1}{p}, 1, \dots, 1\right) \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$.

Alors $g(M_p) = \text{tr}\left(\text{diag}\left(p^2, \frac{1}{p^2}, 1, \dots, 1\right)\right) = p^2 + \frac{1}{p^2} + n - 2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$, donc g n'admet pas de maximum global.

15 ▷ ■ Comme g et $\det$ sont deux fonctions polynomiales en les coefficients de M , elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).

■ Comme pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $g(M) = \sum_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} m_{i,j}^2$, on a, avec des notations évidentes, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{\partial g}{\partial m_{i,j}}(M) = 2m_{i,j}, \text{ donc } \nabla g(M) = 2M.$$

■ On peut aussi remarquer que $g = \text{tr} \circ f$ donc pour toutes matrices $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\text{d}g(M)(H) = \text{d tr}(f(M))(\text{d}f(M)(H)) = \text{tr}(H^T M + M^T H) = 2 \text{tr}(M^T H) = \left(2M \middle| H\right)$$

en utilisant la linéarité de la trace, donc sa différentielle en tout point est elle-même, et le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Par définition, on a bien $\nabla g(M) = 2M$.

■ Pour calculer la dérivée partielle de $\det$ selon $m_{i,j}$, on utilise un développement par rapport à la ligne i :

$$\det M = \sum_{k=1}^n m_{i,k} C_{i,k} \text{ où les cofacteurs } C_{i,k} \text{ ne dépendent pas de } m_{i,j}.$$

$$\text{Il vient } \frac{\partial \det}{\partial m_{i,j}} = C_{i,j} = [\text{Com } M]_{i,j} \text{ pour tout } i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ et donc } \nabla \det(M) = \text{Com } M.$$

16 ▷ On va appliquer le théorème d'optimisation sous contrainte : les fonctions g et $h : M \mapsto \det M - 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et pour toute matrice $M \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$, $\nabla h(M) = \text{Com } M \neq 0_n$ car $\det M = 1$, donc M est inversible, et, d'après la formule de la comatrice, $\text{Com } M = (M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$ l'est aussi.

Ce théorème assure, si M est un extremum local de g , l'existence de $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\nabla g(M) = \mu \nabla h(M)$, c'est-à-dire $2M = \mu \text{Com } M$.

En posant $\lambda = \frac{\mu}{2}$, on obtient $M = \lambda \operatorname{Com} M$.

On a alors, toujours avec la formule de la comatrice, $M = \lambda (M^\top)^{-1}$, donc $MM^\top = \lambda I_n$.

En prenant le déterminant, on obtient $1 = \lambda^n$, et, comme λ est réel, $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Or, si on avait $\lambda = -1$, on aurait $g(M) = \operatorname{tr}(M^\top M) = \operatorname{tr}(MM^\top) = -n < 0$, ce qui est embêtant pour une norme au carré. C'est donc que $\lambda = 1$ et $M \in \operatorname{SO}_n(\mathbf{R})$.

17 ▷ g est une fonction positive (carré de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|_2$) sur le fermé $\operatorname{SL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ avec $\det$ continue.

Comme $g(M) = \|M\|_2^2 \xrightarrow{\|M\|_2 \rightarrow +\infty} +\infty$, on a $r \in \mathbf{R}_*^+$ tel que si $\|M\|_2 \geq A$, $g(M) \geq g(I_n)$.

Soit $R = \max(r, \|I_n\|_2) = \max(r, \sqrt{n})$.

$$K = \operatorname{SL}_n(\mathbf{R}) \cap \overline{B}_2(0_n, R)$$

est fermé et borné dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, c'est un compact. La continuité de g et le théorème des bornes atteintes assurent l'existence d'un minimum global de g sur K . Comme $I_2 \in K$ et comme, si $\|M\|_2 > g$, $g(M) \geq g(I_2)$, il s'agit d'un minimum global de g sur $\operatorname{SL}_n(\mathbf{R})$.

Or, d'après la question précédente, le seul extremum local possible pour g sur $\operatorname{SL}_n(\mathbf{R})$ est n , atteint exactement en les $M \in \operatorname{SO}_n(\mathbf{R})$ (pour une telle matrice, on a bien $g(M) = n$).

Ainsi n est le minimum global de g sur $\operatorname{SL}_n(\mathbf{R})$, atteint exactement en les $M \in \operatorname{SO}_n(\mathbf{R})$.

Remarque : on peut montrer que n est le minimum global de g sur $\operatorname{SL}_n(\mathbf{R})$ directement grâce à la très classique inégalité arithmético-géométrique.

En effet, prenons $M \in \operatorname{SL}_n(\mathbf{R})$. On a alors $\det M = 1$ et, classiquement, $M^\top M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. En effet,

- $(M^\top M)^\top = M^\top M$,
- et si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $X^\top M^\top M X = (MX)^\top MX = \|MX\|^2 > 0$ car $X \neq 0$ et M inversible.

On montre alors l'inégalité classique

$$\frac{\operatorname{tr}(M^\top M)}{n} \geq \sqrt[n]{\det(M^\top M)}.$$

Pour cela, on orthodiagonalise $M^\top M = PDP^\top$ où $P \in \operatorname{O}_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec

$$\operatorname{Sp}(M^\top M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}_*^+.$$

Alors

$$g(M) = \operatorname{tr} D = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

L'inégalité de Jensen appliquée la fonction concave $\ln$ permet de remonter l'inégalité arithmético-géométrique

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k}$$

et de conclure que

$$\frac{g(M)}{n} \geq \sqrt[n]{\det(M^\top M)} = 1$$

et finalement $g(M) \geq n$.

Ainsi n est le minimum global de g sur $\operatorname{SL}_n(\mathbf{R})$, atteint en toute $M \in \operatorname{SO}_n(\mathbf{R})$ (pour retrouver que ce minimum est atteint seulement en ces matrices, on pourrait établir le cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique).

III – Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\operatorname{GL}_n(\mathbf{R})$

18 ▷ Soit G un sous-groupe borné de $(\mathbf{R}^*, \times)$. Si $x \in G$, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $x^p \in G$.

Comme G est borné, en faisant $p \rightarrow +\infty$ ou $p \rightarrow -\infty$, comme dans 9, on conclut que $|x| = 1$.

Les sous-groupes bornés de $(\mathbf{R}^*, \times)$ sont donc $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$.

Or $\det \circ \varphi$ est un morphisme de groupe continu par composition de morphismes de groupes continus et $(\mathbf{U}, \times)$ est un groupe compact, donc $(\det \circ \varphi)(\mathbf{U})$ est un sous-groupe compact de $(\mathbf{R}^*, \times)$.

Mais le cercle unité $\mathbf{U}$ est connexe par arcs, donc, toujours par continuité, $(\det \circ \varphi)(\mathbf{U})$ l'est aussi, ce qui exclut $\{-1, 1\}$.

Finalement, $\det(\varphi(\mathbf{U})) = \{1\}$ et $\varphi(\mathbf{U}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

19 ▷ Fixons $z \in \mathbf{U}$.

Première rédaction Par théorème fondamental de l'algèbre, on peut trigonaliser $\varphi(z)$ dans $\mathbf{C}$: $\varphi(z) = PTP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et T triangulaire supérieure avec, sur la diagonale, les valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $\varphi(z)$.

Comme $\varphi(\mathbf{U})$ est borné, $P^{-1}\varphi(\mathbf{U})P$ l'est aussi (il suffit de choisir une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ pour s'en convaincre, elles sont toutes équivalentes car on travaille en dimension finie, ou d'invoquer la continuité de l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ linéaire sur un espace de dimension finie.)

Or pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $\varphi(z)^p \in \varphi(\mathbf{U})$ car c'est un groupe, donc la suite $(T^p)_{p \in \mathbf{Z}}$ est bornée.

Or les coefficients diagonaux de T^p sont les λ_k^p , ce qui empêche d'avoir $|\lambda_k| \neq 1$ quitte à faire $p \rightarrow +\infty$ ou $p \rightarrow -\infty$.

Finalement, $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}} \varphi(z) \subset \mathbf{U}$.

Deuxième rédaction En trigonalisant $\varphi(z) = PTP^{-1}$ et en choisissant comme norme (on peut, en dimension finie, elle sont toutes équivalentes) $\|M\| = \|P^{-1}MP\|_{\infty}$, la suite de matrices $(\varphi(z)^n)$ à valeurs dans le groupe compact $\varphi(\mathbf{U})$ est bornée donc pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp} \varphi(z)$, la suite numérique (λ^n) est bornée et donc, nécessairement $\lambda \in \mathbf{U}$.

Troisième rédaction On peut considérer seulement une valeur propre complexe λ de $\varphi(z)$ (nécessairement non nulle) et un vecteur propre complexe $X \neq 0$ associé. Alors $\varphi(z)X = \lambda X$ et pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $\varphi(z)^p X = \lambda^p X$.

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $\|\cdot\|$ la norme matricielle subordonnée associée, alors

$$|\lambda|^p \|X\| = \|\lambda^p X\| = \|\varphi(z)^p X\| \leq \|\varphi(z)^p\| \|X\|.$$

Comme $X \neq 0$, on peut simplifier par $\|X\| \neq 0$

$$|\lambda|^p \leq \|\varphi(z)^p\|.$$

Mais pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $\varphi(z)^p$ appartient au sous-groupe compact $\varphi(\mathbf{U})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Par équivalence des normes sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, sous-espace du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, la suite de matrices réelles $(\varphi(z)^p)_p$ est bornée pour toute norme, en particulier la restriction de $\|\cdot\|$ à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On en déduit que la suite $(|\lambda|^p)_{p \in \mathbf{Z}}$ est bornée, ce qui interdit d'avoir $|\lambda| \neq 1$ quitte à faire $p \rightarrow +\infty$ ou $p \rightarrow -\infty$.

On a donc bien $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}} \varphi(z) \subset \mathbf{U}$.

20 ▷ On a $\varphi : (\mathbf{U}, \times) \rightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$ et $\Gamma : \begin{matrix} (\mathbf{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbf{U}, \times) \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{matrix}$ des morphismes de groupes, donc, par composition, $\Psi = \varphi \circ \Gamma : (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$ est un morphisme de groupes, ce qui répond à la question.

21 ▷ Comme Ψ est continue sur $\mathbf{R}$ par composition de fonctions continues, le théorème fondamental de l'analyse nous donne directement la classe $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbf{R}$.

Considérant ensuite le cas particulier où Ψ est constamment égale à I_n , on obtient $F(x) = xI_n$, donc, pour $x \neq 0$, $\frac{F(x)}{x} = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Il est alors naturel, pour généraliser, de considérer, pour $x \neq 0$,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = \Psi(0) = I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Or $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est ouvert par continuité de $\det$ et car $\mathbf{R}^*$ est ouvert comme complémentaire du fermé $\{0\}$.

On a donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \cap \mathbf{R}^*$, $\frac{F(x)}{x} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et donc, avec $x \neq 0$, $F(x) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

22 ▷ Soit $x \in \mathbf{R}$. On calcule

$$\Psi(x)F(\alpha) = \int_0^\alpha \Psi(x)\Psi(s) \, ds = \int_0^\alpha \Psi(x+s) \, ds = \int_x^{x+\alpha} \Psi(t) \, dt$$

par le changement de variable $t = x + s$.

Ainsi, comme $F(\alpha)$ est inversible, $\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t) \, dt \right) (F(\alpha))^{-1} = (F(x+\alpha) - F(x)) (F(\alpha))^{-1}$.

Par opérations, en utilisant la question précédente, on a bien $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

23 ▷ Posons $M = \Psi'(0)$. En dérivant la relation $\Psi(x) = (F(x+\alpha) - F(x)) (F(\alpha))^{-1}$ (ce qui est licite), on trouve, pour $x \in \mathbf{R}$, en utilisant la propriété de morphisme de Ψ et le fait que F est une primitive de Ψ ,

$$\Psi'(x) = (\Psi(x+\alpha) - \Psi(x)) (F(\alpha))^{-1} = \Psi(x) \underbrace{(\Psi(\alpha) - I_n) (F(\alpha))^{-1}}_{\Psi'(0)} = \Psi(x)M$$

Donc Ψ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}, & y'(x) = y(x)M \\ y(0) = I_n \end{cases}$$

et c'est aussi le cas de $x \mapsto \exp(xM)$.

Par théorème de Cauchy linéaire, comme $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel normé de dimension finie et comme l'application $a : A \mapsto AM$ est un endomorphisme de cet espace, ce problème admet une unique solution, donc

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \exp(xM).$$

IV – Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\text{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

24 ▷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On a $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$, ce qu'on réécrit plutôt $AP = PB$.

Notons $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ les matrices des parties réelles et imaginaires des coefficients de P :

$$P = P_1 + iP_2.$$

Alors

$$\underbrace{AP_1}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} + i \underbrace{AP_2}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} = \underbrace{P_1B}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})} + i \underbrace{P_2B}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})}.$$

Par unicité des parties réelle et imaginaire, on en déduit que $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$. Malheureusement, il n'y a aucune raison pour que P_1 ou P_2 soit inversible en général.

L'idée astucieuse est de considérer la fonction polynomiale

$$\pi : x \mapsto \det(P_1 + xP_2).$$

Il s'agit d'un polynôme en x à coefficients réels qui n'admet pas i comme racine complexe car $\pi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det P \neq 0$. Il ne s'agit donc pas du polynôme nul ce qui l'empêche de s'annuler sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Bref, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $\pi(x) = \det(P_1 + xP_2) \neq 0$ donc $Q = P_1 + xP_2 \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et $AQ = QB$ soit $A = QBQ^{-1}$.

On a bien A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

25 ▷ N est une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Supposons, par l'absurde, que $\ker N = \ker N^2$.

On a alors pour tout entier $p \geq 2$, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ est tel que $N^p X = 0$, $N^{p-2} X \in \ker N^2 = \ker N$, donc

$$N^{p-1} X = N(N^{p-2} X) = 0.$$

On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}), \quad \forall p \geq 2, \quad N^p X = 0 \implies N^{p-1} X = 0.$$

Mais comme N est nilpotente, on a $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$ (par exemple $k = n$), donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $N^k X = 0$ et en itérant la propriété obtenue ci-dessus, on obtient $NX = 0$.

Cela signifie que $N = 0_n$, ce qui est contradictoire.

On a donc bien $\ker N \neq \ker N^2$.

26 ▷ On a, d'après **23**, $\exp(2\pi M) = \Psi(2\pi) = \varphi(e^{2i\pi}) = \varphi(1)$ donc $\exp(2\pi M) = I_n$ car φ est un morphisme de groupes.

Un résultat du programme dit que les valeurs propres complexes de $\exp(2\pi M)$ sont les $e^{2\pi\lambda}$ où $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

Comme ce sont les valeurs propres de I_n , elles valent toutes 1 et donc $2\pi\lambda_k \in 2i\pi\mathbf{Z}$, donc $\lambda_k \in i\mathbf{Z}$.

On a donc bien $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset i\mathbf{Z}$.

On peut éventuellement retrouver ce résultat en voyant que sur $\mathbf{C}$, $2\pi M$ est trigonalisable. On peut donc écrire $M = PTP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ et T triangulaire supérieure avec sur la diagonale les valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M comptées avec multiplicité. Alors

$$I_n = \exp(2\pi M) = P \exp(2\pi T) P^{-1} \text{ donc } \exp(2\pi T) = I_n$$

et l'égalité des coefficients diagonaux donne, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e^{2\pi\lambda_k} = 1$.

27 ▷ Il s'agit d'une conséquence de la supplémentarité des sous-espaces caractéristiques.

Un résultat du programme nous dit que, comme son polynôme caractéristique est scindé, M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à une matrice diagonale par blocs $\text{diag}(T_1, \dots, T_q)$, dont les blocs diagonaux $T_1, \dots, T_q$ sont triangulaires supérieurs avec des coefficients diagonaux égaux. De là à la décomposition de Dunford (qui elle est hors-programme), il ne manque qu'un pas.

Nécessairement, comme la matrice $\text{diag}(T_1, \dots, T_q)$ est triangulaire, ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M . Donc, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} = \lambda_k I_{p_k} + N_k \in \mathcal{M}_{p_k}(\mathbf{C}).$$

Notons $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1}, \dots, \lambda_q I_{p_q}) \in \mathcal{D}_n(\mathbf{C})$ matrice diagonale telle que $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$.

Et $N = \text{diag}(N_1, \dots, N_q)$ matrice triangulaire supérieure stricte donc nilpotente.

On a bien M semblable à $D + N$ et pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\lambda_k I_{p_k}$ et N_k commutent, donc $DN = ND$.

28 ▷ $\exp(2\pi D)$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont de la forme $e^{2\pi\lambda}$ où

$$2\pi\lambda \in 2\pi \text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = 2\pi \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset 2i\pi\mathbf{Z}$$

d'après les questions précédentes.

Ces coefficients diagonaux sont donc tous égaux à 1 et $\exp(2\pi D) = I_n$.

Comme N et D commutent, et, en introduisant $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $M = P(D + N)P^{-1}$,

$$I_n = \exp(2\pi M) = P \exp(2\pi D + 2\pi N) P^{-1} = P \exp(2\pi D) \exp(2\pi N) P^{-1} = P \exp(2\pi N) P^{-1},$$

d'où on déduit que $\exp(2\pi N) = I_n$. Or, par nilpotence, on a $p \in \mathbf{N}$ tel que

$$\exp(2\pi N) = I_n + 2\pi N + \dots + \frac{(2\pi)^p}{p!} N^p.$$

On a donc

$$2\pi N + \dots + \frac{(2\pi)^p}{p!} N^p = 0_n. \quad (*)$$

On va en déduire que $N = 0_n$ en utilisant **25**. Notons que $\ker N \subset \ker N^2$ est une inclusion vraie pour toute matrice. Prenons $X \in \ker N^2$. Alors $N^2 X = 0$ et pour tout $k \geq 2$, $N^k X = 0$.

En multipliant $(*)$ par X à droite, on tire $NX = 0$.

On a donc $\ker N = \ker N^2$, et, subséquemment, $N = 0_n$.

29 ▷ Soit $x \in \mathbf{R}$. On a alors

$$\Psi(x) = \exp(xM) = \exp(xPDP^{-1}) = P \exp(xD)P^{-1}$$

où $D = \text{diag}(ik_1, \dots, ik_n)$ avec $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$ car les valeurs propres complexes de D sont celles de M .

Sans perte de généralité, on peut supposer avoir mis les valeurs propres nulles en dernier.

Enfin, comme M est à coefficients réels, on sait que si un complexe est valeur propre de M , son conjugué est également valeur propre, avec la même multiplicité. On peut donc regrouper deux par deux les valeurs propres complexes non réelles avec leur conjugué, c'est-à-dire leur opposé vu leur forme ici. Ainsi,

$$D = \text{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0)$$

avec $k_1, \dots, k_p \in \mathbf{Z}^*$. On a alors

$$\exp(xD) = \text{diag}(e^{ixk_1}, e^{-ixk_1}, \dots, e^{ixk_p}, e^{-ixk_p}, 1, \dots, 1).$$

On pourrait alors vouloir utiliser la question 1, diagonaliser les matrices R_{xk_j} , en déduire que $\Psi(x)$ et $\text{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1)$ sont des matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et utiliser la question 24 pour en déduire qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Mais la matrice de passage à coefficients réels ainsi obtenue serait dépendante de x , ce qui est problématique.

Pour contourner le problème, on va écrire R_θ sous forme d'une exponentielle, en utilisant la diagonalisation dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ initiée en question 1. Nous avons vu que les valeurs propres de R_θ sont $e^{i\theta}$ et son conjugué $e^{-i\theta}$. Or

$$R_\theta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\beta \sin \theta &= i\alpha \sin \theta \\ \alpha \sin \theta &= i\beta \sin \theta \end{cases}$$

d'où on tire un vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ associé à $e^{i\theta}$ et comme R_θ est réelle, son conjugué $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à $e^{-i\theta}$. On peut donc écrire

$$R_\theta = \tilde{P} \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \tilde{P}^{-1}$$

avec $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ indépendant de θ . Alors

$$R_\theta = \exp(\tilde{P} \text{diag}(i\theta, -i\theta) \tilde{P}^{-1}) = \exp(\theta \tilde{P} \text{diag}(e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/2}) \tilde{P}^{-1}) = \exp(\theta J).$$

où on a noté $J = R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour simplifier.

Mais $D = \text{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0)$ avec pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\text{diag}(ik_j, -ik_j) = k_j \text{diag}(i, -i) = k_j \tilde{P}^{-1} J \tilde{P}$$

comme ci-dessus. On en déduit que $D = R \text{diag}(k_1 J, \dots, k_p J, 0, \dots, 0) R^{-1}$ avec $R = \text{diag}(\tilde{P}, \dots, \tilde{P}, 1, \dots, 1)$.

Donc, par transitivité, M est semblable à la matrice réelle $K = \text{diag}(k_1 J, \dots, k_p J, 0, \dots, 0)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, donc, d'après 24, on a $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ indépendante de x telle que $M = QKQ^{-1}$.

On en tire alors

$$\Psi(x) = Q \exp(xK) Q^{-1} = Q \text{diag}(\exp(xk_1 J), \dots, \exp(xk_p J), 1, \dots, 1) Q^{-1} = Q \text{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) Q^{-1}.$$

30 ▷ On sait que $\theta \mapsto R_\theta$ est un morphisme du groupe $(\mathbf{R}, +)$ dans le groupe $(\text{SO}_2(\mathbf{R}), \times)$ (il suffit d'interpréter R_θ comme matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ pour le retrouver). De là, et par propriétés du produit matriciel par blocs, on tire sans encombre qu'avec la forme obtenue à la question précédente, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$$

donc Ψ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\text{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$.

FIN DU CORRIGÉ