

CONCOURS COMMUN MINES ET PONTS
SESSION 2026 FILIÈRE MP
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES II

m.laamoum2@gmail.com¹

Autour de $O_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$

Préambule

1 ▷ Le polynôme caractéristique de R_θ est :

$$\chi_{R_\theta}(\lambda) = (\lambda - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = \lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1.$$

Son discriminant est $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$.

- Sur $\mathbb{R}$:

Si $\sin(\theta) = 0$, alors $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ et $R_\theta = I_2$ ou $R_\theta = -I_2$. Donc R_θ est diagonalisable

Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, alors $\Delta < 0$, il n'y a pas de valeur propre réelle, donc R_θ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- Sur $\mathbb{C}$:

Les valeurs propres sont $\lambda = \bar{\mu} = e^{i\theta}$.

Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $\lambda \neq \mu$, donc R_θ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$: $R_\theta = \pm I_2$, donc R_θ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Conclusion, R_θ est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

2 ▷ On a $\{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \subset SO_2(\mathbb{R})$ ($\det(R_\theta) = 1$ et $R_\theta^\top R_\theta = I_2$).

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$. On a $M^\top M = I_2$ et $\det(M) = 1$.

On a donc le système :

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

De $a^2 + c^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$, $c = \sin(\theta)$.

Le système devient

$$\begin{cases} b \cos(\theta) + d \sin(\theta) = 0 \\ -b \sin(\theta) + d \cos(\theta) = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

par suite

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ 1 & \cos(\theta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}} = -\sin(\theta) \quad , \quad d = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}} = \cos(\theta)$$

Donc $M = R_\theta$ et $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi $\boxed{\text{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}}$.

3 ▷ • Compacité :

L'application $f : M \mapsto M^\top M$ est continue car elle est polynomiale, ou bien $f = \Psi \circ \Phi$ avec

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (M^\top, M) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & A.B \end{array}$$

Φ est linéaire, Ψ est bilinéaire en dimension finies, donc elles sont continues.

Donc $\text{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{\text{I}_n\})$ est fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On prend sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la norme euclidienne : $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^\top M)}$. Si $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\|M\|_2 = \sqrt{n}$.

Donc $\text{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Ainsi $\text{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc compact.

• Non connexité par arcs :

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (elle est polynomiale).

L'image de $\text{O}_n(\mathbb{R})$ par $\det$ est égal à $\{-1, 1\}$, qui n'est pas connexe par arcs.

Donc $\text{O}_n(\mathbb{R})$ est non connexe par arcs.

4 ▷ $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs:

Soit $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ et des nombres $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$ tels que

$$M = P.\text{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}, -\text{I}_q, \text{I}_p).P^\top$$

Comme $\det(M) = (-1)^q = 1$ alors q est pair, $q = 2k$ et on écrit $-\text{I}_q = \text{Diag}(R_\pi, \dots, R_\pi)$ (avec k blocs).

Par suite

$$M = P.\text{Diag}(R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_{r+k}}, \text{I}_p).P^\top$$

On définit un chemin entre M et I_n par

$$\begin{array}{ccc} \gamma_M : [0, 1] & \rightarrow & \text{SO}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & P.\text{Diag}(R_{t\theta_1}, \dots, R_{t\theta_{r+k}}, \text{I}_p).P^\top \end{array}$$

L'application $t \mapsto \text{Diag}(R_{t\theta_1}, \dots, R_{t\theta_{r+k}}, \text{I}_p)$ est continue de $[0, 1]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application linéaire $A \mapsto P.A.P^{-1}$ est continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc l'application γ_M est continue, de $[0, 1]$ dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ et on a $\gamma_M(0) = \text{I}_n$ et $\gamma_M(1) = M$.

Pour $M, N \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, on définit un chemin entre M et N par :

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [0, 1] & \rightarrow & \text{SO}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{cases} \gamma_M(1 - 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_N(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{array}$$

γ est continue, de $[0, 1]$ dans $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ et on a $\gamma(0) = M$ et $\gamma(1) = N$. Donc $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

5 ▷ Soit H un sous-groupe multiplicatif de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $SO_n(\mathbb{R}) \subset H$.

Supposons $H \neq SO_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $M \in H$ avec $\det(M) = -1$.

Pour tout $N \in O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$, on a $\det(N) = -1$, donc $NM^{-1} \in SO_n(\mathbb{R}) \subset H$, comme $M \in H$, on obtient $N = (NM^{-1})M \in H$.

Donc $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R}) \subset H$, par suite $O_n(\mathbb{R}) \subset H$ et donc $H = O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi : $\boxed{H = SO_n(\mathbb{R}) \text{ ou } H = O_n(\mathbb{R})}$.

6 ▷ On a $Y_{i,j} \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y_{i,j}(\Omega) = \{0, 1\}$ pour tout (i, j) .

• $\mathbb{P}(Z_2 \in GL_2(\mathbb{R}))$:

On a $\det(Z_2) = Y_{1,1}Y_{2,2} - Y_{1,2}Y_{2,1} \neq 0$ ssi $(Y_{1,1}Y_{2,2}, Y_{1,2}Y_{2,1}) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$.

Donc :

$$[Z_2 \in GL_2(\mathbb{R})] = [Y_{1,1}Y_{2,2} = 1, Y_{1,2}Y_{2,1} = 0] \cup [Y_{1,1}Y_{2,2} = 0, Y_{1,2}Y_{2,1} = 1]$$

et on a

$$\begin{cases} [Y_{1,1}Y_{2,2} = 1, Y_{1,2}Y_{2,1} = 0] = [Y_{1,1}Y_{2,2} = 1] \cap \overline{[Y_{1,2}Y_{2,1} = 1]} \\ [Y_{1,1}Y_{2,2} = 0, Y_{1,2}Y_{2,1} = 1] = \overline{[Y_{1,1}Y_{2,2} = 1]} \cap [Y_{1,2}Y_{2,1} = 1] \\ [Y_{1,1}Y_{2,2} = 1] = [Y_{1,1} = 1] \cap [Y_{2,2} = 1] \text{ et } [Y_{1,2}Y_{2,1} = 1] = [Y_{1,2} = 1] \cap [Y_{2,1} = 1] \end{cases}$$

Donc, par indépendance :

$$\mathbb{P}(Y_{1,1}Y_{2,2} = 1, Y_{1,2}Y_{2,1} = 0) = \mathbb{P}(Y_{1,1}Y_{2,2} = 0, Y_{1,2}Y_{2,1} = 1) = p^2(1 - p^2)$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(Z_2 \in GL_2(\mathbb{R})) = 2p^2(1 - p^2)}$.

• $\mathbb{P}(Z_n \in O_n(\mathbb{R}))$:

Posons $Z_n = [C_1 | \dots | C_n]$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On a $Z_n \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes $C_1 \dots C_n$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Les colonnes sont à coefficients dans $\{0, 1\}$, donc :

$Z_n \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si chaque C_j est un vecteur de $\mathcal{B}$, ce qui est équivalent à :

$\exists \sigma \in S_n$ telle que $(C_1 \dots C_n) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ (cad $Z_n = P_\sigma$ matrice de permutation)

Donc

$$[Z_n \in O_n(\mathbb{R})] = \bigcup_{\sigma \in S_n} \bigcap_{1 \leq j \leq n} [C_j = e_{\sigma(j)}] \text{ et } [C_j = e_{\sigma(j)}] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [Y_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}]$$

Puisque la réunion est disjointe et les événements sont indépendants :

$$\mathbb{P}(C_j = e_{\sigma(j)}) = p(1 - p)^{n-1} \text{ et } \mathbb{P}(Z_n \in O_n(\mathbb{R})) = n! (p(1 - p)^{n-1})^n.$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(Z_n \in O_n(\mathbb{R})) = n!p^n(1 - p)^{n^2-n}}$.

(Exo: La suite de fonctions $p \mapsto \mathbb{P}(Z_n \in O_n(\mathbb{R}))$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$)

• $\mathbb{P}(Z_n \in SO_n(\mathbb{R}))$:

Comme le cas précédent : $Z_n \in SO_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\exists \sigma \in S_n$ telle que $(C_1 \dots C_n) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ et $\det(Z_n) = 1$.

Par décomposition de $\sigma \in S_n$ en produit de transpositions on a

$$\det(Z_n) = \det_{\mathcal{B}}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \text{ (signature de } \sigma)$$

Donc

$$[Z_n \in SO_n(\mathbb{R})] = \bigcup_{\substack{\sigma \in S_n \\ \varepsilon(\sigma)=1}} \bigcap_{1 \leq j \leq n} [C_j = e_{\sigma(j)}]$$

Puisque $\text{Card} \{ \sigma \in S_n, \varepsilon(\sigma) = 1 \} = \frac{n!}{2}$ alors : $\mathbb{P}(Z_n \in \text{SO}_n(\mathbb{R})) = \frac{n!}{2} p^n (1-p)^{n^2-n}$.

7 ▷ Soit $x, y \in E$ avec $\|x\| = \|y\|$.

- Si $x = y$:

On complète x par $x_2, \dots, x_n$ en une base orthonormée. On prend $A = \text{Diag}(1, \dots, 1, -1)$.

- Si $x \neq y$:

Soit $u \in E$ avec $\|u\| = 1$ et $H = \{u\}^\perp$. Par la décomposition : $E = \mathbb{R}u \oplus H$, on a pour $x \in E$:

$$S_H(x) = x - 2\langle x, u \rangle u = (\text{I}_n - 2uu^\top) \cdot x$$

Si $S_H(x) = y$ alors $x - y = 2\langle x, u \rangle u$. On a u colinéaire à $x - y$, on prend $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ et $A = \text{I}_n - 2uu^\top$.

Réciproquement : Pour $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ calculons $S_H(x)$:

$$S_H(x) = x - \frac{2\langle x-y, x \rangle}{\|x-y\|^2} (x-y) = x - \underbrace{\frac{2(\|x\|^2 - \langle x, y \rangle)}{\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2}}_{=1} (x-y) = y.$$

D'où le résultat.

Ainsi il existe une matrice de réflexion A telle que $Ax = y$.

8 ▷ Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ contenant $\text{O}_n(\mathbb{R})$.

Soit $G \in \mathcal{G}$, $x \in E$ avec $\|x\| = 1$ et $p \in \mathbb{Z}$.

- Si $p = 1$:

Posons $y = Gx$. Alors $\|y\| = \|Gx\| \neq 0$ car G est inversible.

Posons $y' = \frac{y}{\|y\|}$. Comme $\|x\| = \|y'\| = 1$, par la question Q7 il existe une réflexion $A \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$ telle que $x = Ay'$.

Posons $G_1 = AG$. Donc

$$G_1x = AGx = Ay = \|y\|Ay' = \|y\|x$$

Ainsi : $G_1x = \|Gx\|x$ et $G_1 \in \mathcal{G}$.

- Si $p \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$:

$G_p = G_1^p$ convient :

► Si $p \geq 1$: on a $G_px = G_1^p x = \|Gx\|^p x$.

► Si $p \leq 0$: on a $G_p = (G_1^{-1})^{|p|} \in \mathcal{G}$ et $G_1^{-1}x = \frac{1}{\|Gx\|}x$, donc $G_px = \|Gx\|^p x$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que : $G_px = \|Gx\|^p x$.

9 ▷ On a $\text{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$. Montrons que $\mathcal{G} \subset \text{O}_n(\mathbb{R})$.

Soit $G \in \mathcal{G}$ et x avec $\|x\| = 1$. Par la question Q8, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que $G_px = \|Gx\|^p x$.

Comme $\mathcal{G}$ est compact, la suite $(G_p)_{p \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(G_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ convergente vers $L \in \mathcal{G}$.

L'application $(A, X) \mapsto A.X$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times E$ vers E , donc $G_{\varphi(p)}x \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} Lx$.

On a $G_{\varphi(p)}x = \|Gx\|^{\varphi(p)}x$, donc :

- si $\|Gx\| > 1$, alors $\|Gx\|^{\varphi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$, contradiction avec le fait que $G_{\varphi(p)}x$ est borné.
- si $\|Gx\| < 1$, alors $\|Gx\|^{\varphi(p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, par suite $G_{\varphi(p)}x \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} Lx = 0$, ce qui donne $x = 0$, contradiction.

Nécessairement on a $\|Gx\| = 1$. Par suite pour tout z de E , $\|Gz\| = \|z\|$, donc $G \in O_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G} \subset O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{G} = O_n(\mathbb{R})$, ce qui signifie que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

II – Calcul différentiel sur $O_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$

10 $\triangleright$ $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $f = \Psi \circ \Phi$ avec

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (M^\top, M) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & A.B \end{array}$$

Φ est linéaire, Ψ est bilinéaire en dimension finies, donc elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\begin{aligned} d\Phi(M)(H) &= \Phi(H) = (H^\top, H) \\ d\Psi(A, B)(H, K) &= \Psi(A, K) + \Psi(H, B) = AK + BH \end{aligned}$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $df(M) = d\Psi(\Phi(M)) \circ d\Phi(M)$. Ainsi

$$\begin{array}{ccc} df(M) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ H & \mapsto & M^\top H + H^\top M \end{array}.$$

11 $\triangleright$ Soit T l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n .

Soit $H \in T$: il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbb{R})$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$.

Comme $\gamma(t) \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout t , on a $\gamma(t)^\top \cdot \gamma(t) = I_n$. Donc la fonction vectorielle $h : t \mapsto f(\gamma(t))$ est constante sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et elle est de dérivée nulle. On a

$$h'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \gamma(t)^\top \cdot \gamma'(t) + \gamma'(t)^\top \cdot \gamma(t) = 0$$

et en $t = 0$ on a $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$, donc $H + H^\top = 0$ et $H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

12 $\triangleright$ • Stabilité par somme :

Soient $H_1, H_2 \in T$ avec γ_1, γ_2 les arcs associés. Considérons $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$.

Comme $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in O_n(\mathbb{R})$ alors

$$\gamma(t) \in O_n(\mathbb{R}), \gamma(0) = I_n \text{ et } \gamma'(0) = \gamma'_1(0) \cdot I_n + I_n \cdot \gamma'_2(0) = H_1 + H_2.$$

Donc $H_1 + H_2 \in T$.

• Stabilité par multiplication scalaire :

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $H \in T$ avec γ l'arc associé. Soit $\delta : t \mapsto \gamma(\lambda t)$ (pour $|t|$ assez petit).

On a $\delta(0) = I_n$, et $\delta'(0) = \lambda \gamma'_1(0) = \lambda H$.

Donc $\lambda H \in T$.

On a $0 \in T$ (avec $\gamma : t \mapsto I_n$), T est stable par combinaison linéaire, donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13 $\triangleright$ D'après la question Q11, $T \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Montrons l'inclusion inverse : soit H antisymétrique. On considère l'exponentielle de matrice $\gamma(t) = \exp(tH)$.

On sait que :

- $\gamma'(t) = H \cdot \exp(tH)$ donc $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(0) = H$.
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \exp(A)^\top = \exp(A^\top)$, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ et $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si $AB = BA$.
Donc $\exp(tH)^\top \exp(tH) = \exp(tH^\top) \exp(tH) = \exp(-tH) \exp(tH) = \exp(0) = I_n$.

Par suite $\gamma(t) \in O_n(\mathbb{R})$ et $H \in T$. D'où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset T$.

Ainsi $\boxed{T = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.

14 ▷ On a $g(M) = \text{Tr}(M^\top M)$.

Considérons pour $t > 0$ la matrice $M_t = \text{Diag}(t, t^{-1}, 1, \dots, 1)$. On a $M_t \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$ et $g(M_t) = t^2 + t^{-2} + n - 2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.
Donc g est non majorée sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})$: elle n'a pas de maximum global.

15 ▷ • $g(M) = \text{Tr}(M^\top M)$ est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$. On calcule la différentielle par la définition :

$$g(M+H) - g(M) = \text{Tr}((M+H)^\top(M+H)) - \text{Tr}(M^\top M) = \text{Tr}(H^\top H) + 2\text{Tr}(M^\top H).$$

Comme $\text{Tr}(H^\top H) = \|H\|^2 = o(\|H\|)$, alors $\boxed{\text{dg}(M)(H) = 2\text{Tr}(M^\top H)}$.

On a $\text{dg}(M)(H) = \langle 2M, H \rangle$, donc $\boxed{\nabla g(M) = 2M}$.

- $\det$ est une application polynomiale en les coefficients, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soient $M, H \in M_n(\mathbb{R})$ et notons $M = [C_1 | \dots | C_n]$ et $H = [H_1 | \dots | H_n]$. Alors

$$\det(M + tH) = \det_{\mathcal{B}}(C_1 + tH_1, \dots, C_n + tH_n).$$

Par multilinéarité :

$$\det(M + tH) = \det(M) + t \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, H_j, \dots, C_n) + R(t)$$

$R(t)$ renferme les déterminants qui ont plus de deux colonnes de la forme tH_j , donc il s'écrit $t^2 Q(t)$ avec Q un polynôme.

Par suite

$$\det(M + tH) = \det(M) + t \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, H_j, \dots, C_n) + O(t^2)$$

Par la relation entre dérivée directionnelle et différentielle on a

$$\text{d}(\det)(M)(H) = \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, H_j, \dots, C_n)$$

On développe selon la j -ème colonne :

$$\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, H_j, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n H_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n H_{i,j} \text{Com}(M)_{i,j}$$

Donc

$$\text{d}(\det)(M)(H) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_{i,j} \text{Com}(M)_{i,j} = \langle \text{Com}(M), H \rangle = \text{Tr}(\text{Com}(M)^\top H)$$

Ainsi : $\boxed{\text{d}(\det)(M)(H) = \text{Tr}(\text{Com}(M)^\top H) = \langle \text{Com}(M), H \rangle \text{ et } \nabla \det(M) = \text{Com}(M)}$.

16 ▷ • On suppose que $M \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$ est un extremum local de $g|_{\text{SL}_n(\mathbb{R})}$. M est un extremum de g sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec la contrainte $h(M) = \det(M) - 1 = 0$.

Puisque $\nabla h(M) = \nabla \det(M) = \text{Com}(M) \neq 0$, alors d'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\nabla g(M) = \alpha \nabla \det(M)$. Donc : $2M = \alpha \text{Com}(M)$.

Ainsi $M = \lambda \text{Com}(M)$, avec $\lambda = \frac{\alpha}{2}$.

- Puisque $M \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on a $M \text{Com}(M)^\top = \det(M) \text{I}_n = \text{I}_n$, donc $\text{Com}(M) = (M^\top)^{-1} = (M^{-1})^\top$.
La relation $M = \lambda \text{Com}(M) = \lambda (M^{-1})^\top$ donne :

$$MM^\top = \lambda \text{I}_n.$$

Et on a $\det(M)\det(M^\top) = \lambda^n = 1$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

La matrice $MM^\top$ est symétrique définie positive :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad X^\top AX = (M^\top X)^\top (M^\top X) = \|M^\top X\|^2 > 0.$$

Donc $\lambda > 0$ et $\lambda = 1$ par suite $MM^\top = \text{I}_n$ et $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$.

Comme $M \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(M) = 1$, alors $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

17 ▷ La matrice $MM^\top$ est symétrique définie positive, donc elle s'écrit :

$$MM^\top = P \cdot \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^\top \text{ avec } P \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda_i > 0 \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

On a alors

$$\text{Tr}(MM^\top) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } \det(M) = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = 1$$

donc $\text{Tr}(MM^\top) \geq n$, avec égalité si et seulement si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$.

Ainsi, $g|_{\text{SL}_n(\mathbb{R})}$ admet le minimum global, atteint en I_n et qui vaut n .

III – Morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est un groupe multiplicatif compact, et $\varphi : (\mathbb{U}, \times) \rightarrow (\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un morphisme de groupes continu.

18 ▷ • Soit H un sous-groupe borné de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Pour tout $h \in H$, la suite $(h^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans H , donc bornée.

Si $|h| \neq 1$, alors $|h^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ou $|h^{-n}| \rightarrow +\infty$: contradiction. Donc $|h| = 1$, et $H \subset \{-1, 1\}$.

Ainsi les sous-groupes bornés de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont exactement $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$.

- Considérons $\psi = \det \circ \varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^*$.

ψ est composée de deux morphismes de groupes continus, donc c'est un morphisme de groupes continu.

Son image $\psi(\mathbb{U})$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$. Comme $\mathbb{U}$ est compact et ψ continue, alors $\psi(\mathbb{U})$ est compact, donc borné.

D'après ce qui précède, $\psi(\mathbb{U}) = \{-1, 1\}$ ou $\{1\}$. Mais $\mathbb{U}$, est le cercle unité, donc connexe par arcs et ψ est continue, donc $\psi(\mathbb{U})$ est connexe par arcs, par suite $\psi(\mathbb{U}) = \{1\}$. Donc $\psi(z) = \det(\varphi(z)) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.

Ainsi $\boxed{\varphi(\mathbb{U}) \subset \text{SL}_n(\mathbb{R})}$.

19 ▷ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée : $\|M\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|MX\|}{\|X\|}$.

Soit $z \in \mathbb{U}$ et $A = \varphi(z) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(z^n) = \varphi(z)^n \in \varphi(\mathbb{U})$.

Comme φ est continue et $\mathbb{U}$ compact, donc $\varphi(\mathbb{U})$ est compact dans $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite $\varphi(\mathbb{U})$ est borné, $\exists M \geq 0$ tel que $\|\varphi(Z)\| \leq M$ pour tout $Z \in \mathbb{U}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z))$ et v un vecteur propre associé. Donc, pour $n \in \mathbb{Z}$ on a $\varphi(z^n)v = \lambda^n v$ et

$$|\lambda|^n \|v\| = \|\varphi(z^n)v\| \leq \|\varphi(z^n)\| \|v\| \leq M \|v\|$$

Par suite $\{|\lambda|^n : n \in \mathbb{Z}\}$ est borné dans $\mathbb{R}^+$. Donc forcément $|\lambda| = 1$.

Ainsi $\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbb{U}}$.

20 $\triangleright$ Soit $\Psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(e^{ix}) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\Psi(x+y) = \varphi(e^{i(x+y)}) = \varphi(e^{ix} \cdot e^{iy}) = \varphi(e^{ix})\varphi(e^{iy}) = \Psi(x)\Psi(y)$$

Ainsi $\boxed{\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)}$.

21 $\triangleright$ Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x \Psi(t) dt \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Ψ est continue (composée de $x \mapsto e^{ix}$ et φ , qui sont continues). Donc $F(x) = \int_0^x \Psi(t) dt$ est bien défini et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = \Psi(x)$.
- $F(0) = 0$ et $F'(0) = \varphi(1) = \text{I}_n$. La formule de Taylor-MacLaurain donne $F(x) = x\text{I}_n + o(x)$.
Donc la fonction $G : x \mapsto \frac{1}{x}F(x)$ si $x \neq 0$ et $G(0) = \text{I}_n$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*image réciproque par det de l'ouvert $\mathbb{R}^*$*), donc $G^{-1}(\text{GL}_n(\mathbb{R}))$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Par suite il existe $\alpha > 0$ tel que $G([- \alpha; \alpha]) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$. On a donc $F([- \alpha; \alpha] \setminus \{0\}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x)$ est inversible pour tout $x \in [- \alpha; \alpha] \setminus \{0\}$.

22 $\triangleright$ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F(x+\alpha) - F(x) = \int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt.$$

D'après Q.20 $\Psi(t) = \Psi(x+t-x) = \Psi(x)\Psi(t-x)$, donc

$$\int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt = \Psi(x) \int_x^{x+\alpha} \Psi(t-x) dt \stackrel{u=t-x}{=} \Psi(x) F(\alpha).$$

Comme $F(\alpha) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $\boxed{\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt \right) F(\alpha)^{-1}}$.

On peut écrire ; $\Psi(x) = (F(x+\alpha) - F(x)) F(\alpha)^{-1}$, F est $\mathcal{C}^1$ donc Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

23 $\triangleright$ Posons $M = \Psi'(0)$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. En dérivant, par rapport à y , la relation $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y) = \Psi(y)\Psi(x)$ on obtient

$$\Psi'(x+y) = \Psi'(y).\Psi(x)$$

ce qui donne pour $y = 0$:

$$\Psi'(x) = \Psi'(0).\Psi(x) = M.\Psi(x)$$

Donc Ψ est solution d'une l'équation différentielle "matricielle", qui est une équation différentielle vectorielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants (on prend $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a : A \mapsto M.A$, l'équation est $X' = a(X)$).

Donc $\Psi(x) = \exp(xM).X_0$ et $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La condition $\Psi(0) = \text{I}_n$ donne $X_0 = \text{I}_n$ et $\Psi(x) = \exp(xM)$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \varphi(e^{ix}) = \exp(xM)}$.

IV – Morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$

24 ▷ Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A, B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existe alors une matrice P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P^{-1}BP.$$

donc

$$PA = BP$$

On note R, Q les parties réelle et imaginaire de P , donc

$$(R + iQ).A = B.(R + iQ) = RA + iQA = BR + iBQ$$

Par identification des parties réelles et imaginaires des composantes de ces matrices, on obtient

$$RA = BR \text{ et } QA = BQ.$$

Soit l'application $\varphi : z \mapsto \det(R + zQ)$, $z \in \mathbb{C}$. On a φ est une fonction polynomiale de degré inférieur à n , non identiquement nulle car $\varphi(i) = \det(R + iQ) = \det(P) \neq 0$. Donc φ admet au plus n racines complexes, soit

$$r = \max \{|z| \mid \varphi(z) = 0\}$$

alors pour tout z tel que $|z| > r$ on a $\varphi(z) = \det(R + zQ) \neq 0$.

Soit $\lambda > r$, la matrice $R + \lambda Q$ est inversible et réelle, on a

$$(R + \lambda Q).A = B.(R + \lambda Q) \text{ et } A = (R + \lambda Q)^{-1}.B.(R + \lambda Q)$$

ce qui prouve que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

25 ▷ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et non nulle.

Donc il existe $k \geq 1$ tel que $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$. On a

$$\mathrm{Ker}(N) \subset \mathrm{Ker}(N^2) \subset \dots \subset \mathrm{Ker}(N^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}(N^k) = E.$$

Si $\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^2)$, alors pour tout $x \in E$

$$N^k x = N^2.(N^{k-2}x) = 0$$

donc $N^{k-2}x \in \mathrm{Ker}(N^2) = \mathrm{Ker}(N)$, ce qui donne $N^{k-1}x = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(N^{k-1})$. Ainsi $N^{k-1} = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(N) \subsetneq \mathrm{Ker}(N^2)}$.

26 ▷ On a $\Psi(x) = \exp(xM)$ et $\Psi(x) = \varphi(e^{ix})$, avec φ est un morphisme de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc pour $x = 2\pi$:

$$\exp(2\pi M) = \varphi(e^{2\pi i}) = \varphi(1) = I_n.$$

On sait que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^\lambda, \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$. Donc pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ on a

$$e^{2\pi\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(2\pi M)) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(I_n) = \{1\}.$$

par suite $e^{2\pi\lambda} = 1$, ce qui implique $2\pi\lambda \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et $\lambda \in i\mathbb{Z}$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{ik, k \in \mathbb{Z}\}}$.

27 ▷ Posons $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, $\chi_M(X) = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{m_j}$ et $E_j = \text{Ker}(M - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On confondra une matrice avec son endomorphisme canoniquement associé.

D'après le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton on a $\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$.

Sur chaque E_j , la matrice $N_j = (M - \lambda_j I_n)|_{E_j}$ est nilpotente, posons $D_j = (\lambda_j I_n)|_{E_j}$. On a $N_j D_j = D_j N_j$ et $M|_{E_j} = N_j + D_j$. Soit les matrices par blocs :

$$N = \text{Diag}(N_1, \dots, N_r) \text{ et } D = \text{Diag}(D_1, \dots, D_r)$$

On a donc M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $D + N$ avec : D diagonale, N nilpotente, $DN = ND$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

28 ▷ D est diagonale avec des valeurs propres $\lambda_j = ik_j \in i\mathbb{Z}$, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Donc :

$$\exp(2\pi D) = \text{Diag}(e^{2\pi i k_1}, \dots, e^{2\pi i k_n}) = \text{Diag}(1, \dots, 1) = I_n.$$

Comme $D.N = N.D$ donc $\exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$.

De $\exp(2\pi M) = I_n$:

$$\exp(2\pi(D + N)) = \exp(2\pi D)\exp(2\pi N) = I_n \cdot \exp(2\pi N) = I_n.$$

Donc $\exp(2\pi N) = I_n$.

La matrice N est nilpotente, il existe $p \geq 1$: $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$. Donc :

$$\exp(2\pi N) = I_n + 2\pi N + \frac{(2\pi)^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{(2\pi)^{r=p-1}}{(p-1)!} N^{p-1}.$$

par suite :

$$2\pi N + \frac{(2\pi)^2}{2} N^2 + \dots + \frac{(2\pi)^{r=p-1}}{(p-1)!} N^{p-1} = 0 \quad (1)$$

On a $\text{Ker}(N) \subset \text{Ker}(N^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(N^{p-1}) \subset \text{Ker}(N^p) = E$.

Si $x \in \text{Ker}(N^2)$ alors $x \in \text{Ker}(N^j)$ pour tout $j \geq 2$.

La relation (1) donne $Nx = 0$ et $x \in \text{Ker}(N)$, donc $\text{Ker}(N^2) \subset \text{Ker}(N)$. Ainsi $\text{Ker}(N) = \text{Ker}(N^2)$.

D'après Q.25 N est nulle. Ainsi $\boxed{\exp(2\pi D) = I_n \text{ et } N = 0}$.

29 ▷ • On a $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'après les questions précédentes, $N = 0$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec

$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ et $\lambda_j = ik_j \in i\mathbb{Z}$.

Si $\lambda_j \neq 0$ alors $\overline{\lambda_j}$ est aussi valeur propre de M et de même ordre de multiplicité.

M est donc semblable à la matrice

$$\text{Diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0) \text{ avec } k_j \neq 0 \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ si v_j est vecteur propre associé à ik_j alors $\overline{v_j}$ est vecteur propre associé à $-ik_j$.

Posons $v_j = x_j + iy_j$, avec $x_j, y_j \in \mathbb{R}^2$. Les vecteurs v_j et $\overline{v_j}$ sont libres donc x_j et y_j le sont aussi et

$\text{Vect}(v_j, \overline{v_j}) = \text{Vect}(x_j, y_j)$. On a $Mv_j = ik_j v_j$ donc

$$Mx_j + iMy_j = -k_j y_j + ik_j x_j \Leftrightarrow Mx_j = -k_j y_j \text{ et } My_j = k_j x_j$$

On complète la famille $(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$, par des vecteurs de $\text{Ker}(M)$, en une base de $\mathbb{C}^n$. On écrit, dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à M , on obtient que M est semblable, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, à la matrice

$$\Delta = \text{Diag}(A_{k_1}, \dots, A_{k_p}, 0, \dots, 0)$$

avec $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$. De Q.24 les matrices M et Δ sont réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_p$ dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tels que : $M = Q\Delta Q^{-1}$.

- Calcul de $\exp(xA_k)$.

On a $xA_k = xkR_{\frac{\pi}{2}}$, donc

$$(xA_k)^j = (xk)^j R_{j\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} (-1)^p (xk)^{2p} I_2 & \text{si } j = 2p \\ (-1)^p (xk)^{2p+1} R_{\frac{\pi}{2}} & \text{si } j = 2p+1 \end{cases}$$

par suite

$$\exp(xA_k) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(xk)^{2p}}{(2p)!} I_2 + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(xk)^{2p+1}}{(2p+1)!} R_{\frac{\pi}{2}} = \cos(xk) I_2 + R_{\frac{\pi}{2}} \sin(xk)$$

Ainsi $\boxed{\exp(xA_k) = R_{xk}}$.

- On a donc $\exp(x\Delta) = \text{Diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1)$ et $\Psi(x) = \exp(xM) = Q \cdot \text{Diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) \cdot Q^{-1}$.

Ainsi $\exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\exists k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = Q \left(\begin{array}{ccccccc} R_{xk_1} & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & \\ & & R_{xk_p} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ (0) & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \end{array} \right) Q^{-1}.$

30 ▷ Posons $\Psi(x) = Q \cdot \text{Diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) \cdot Q^{-1}$ avec $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. Vérifions que c'est un morphisme de groupes.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \Psi(x+y) &= Q \cdot \text{Diag}(R_{(x+y)k_1}, \dots, R_{(x+y)k_p}, 1, \dots, 1) \cdot Q^{-1} \\ &= Q \cdot \text{Diag}(R_{xk_1} R_{yk_1}, \dots, R_{xk_p} R_{yk_p}, 1, \dots, 1) \cdot Q^{-1} \\ &= Q \cdot \text{Diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot \text{Diag}(R_{yk_1}, \dots, R_{yk_p}, 1, \dots, 1) \cdot Q^{-1} \end{aligned}$$

Donc : $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$ et Ψ est bien un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\text{GL}_n, \times)$.