

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2026

Épreuve de mathématiques II, MP & MPI, quatre heures

(corrigé)

I. Quelques propriétés de $O_n(\mathbf{R})$ 1. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On a :

$$\chi_{R_\theta} = (X - \cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = (X - \cos(\theta) - i \sin(\theta))(X - \cos(\theta) + i \sin(\theta)) = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

Si : $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, alors $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont deux nombres complexes non réels (distincts). On en déduit que χ_{R_θ} n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$ et donc R_θ n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (critère de diagonalisation). En revanche cette matrice l'est sur $\mathbf{C}$, puisqu'elle admet deux valeurs propres distinctes.

Si : $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$, alors $R_\theta = I_n$ (cas où $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$) ou $R_\theta = -I_n$ (cas où $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$). Dans les deux cas, R_θ est diagonale donc diagonalisable, sur $\mathbf{R}$ comme sur $\mathbf{C}$.

En conclusion, R_θ est toujours diagonalisable sur $\mathbf{C}$, une matrice diagonale semblable à R_θ étant $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ si et seulement si : $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Remarque. On peut démontrer qu'une matrice de passage convenable est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \text{SO}_2(\mathbf{R}) &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in \text{O}_2(\mathbf{R}) \\ \det(M) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 & \text{(première colonne unitaire)} \\ b^2 + d^2 = 1 & \text{(deuxième colonne unitaire)} \\ ab + cd = 0 & \text{(orthogonalité des colonnes)} \\ ad - bc = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\theta, \varphi) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\varphi), d = \sin(\varphi) \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\theta, \varphi) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\varphi), d = \sin(\varphi) \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) = 0 \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\theta) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\theta, \varphi) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} a = \cos(\theta), c = \sin(\theta) \\ b = \cos(\varphi), d = \sin(\varphi) \\ \cos(\theta - \varphi) = 0 \\ \sin(\theta - \varphi) = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

or ces deux dernières égalités sont équivalentes à $\theta - \varphi \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, puis : $\varphi \equiv \theta + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
Donc : $M \in \text{SO}_2(\mathbf{R})$, si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que :

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(\theta) & \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

d'où le résultat : $\text{SO}_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbf{R}\}$.

3. On note que le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ est fermé puisque c'est l'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application $M \mapsto M^\top M$, qui est continue par continuité du produit matriciel et de la transposition (elle est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie).

Il est borné pour la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|_2$ (donc pour toute norme, par équivalence des normes) puisque :

$$\forall M \in O_n(\mathbf{R}), \quad \|M\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(M^\top M)} = \sqrt{\operatorname{tr}(I_n)} = \sqrt{n}.$$

Les fermés bornés en dimension finie sont compacts, donc $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $M_n(\mathbf{R})$.

En revanche ce n'est pas une partie connexe par arcs : en effet, le déterminant est continu sur $M_n(\mathbf{R})$ en tant qu'application polynomiale en les coefficients d'une matrice, et une application continue préserve les connexes par arcs. Or : $\det(O_n(\mathbf{R})) = \{-1, 1\}$, qui n'est pas connexe par arcs dans $\mathbf{R}$ puisque ce n'est pas un intervalle : d'où le résultat.

4. Nous allons démontrer que toute matrice peut être liée continûment à la matrice identité, qui est bien dans $SO_n(\mathbf{R})$ en tant qu'élément neutre d'un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$.

Soit $M \in SO_n(\mathbf{R})$. On sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$, des entiers naturels p, q, r et des réels $\theta_1, \dots, \theta_r$ tels que :

$$M = P \begin{pmatrix} I_p & & & & \mathbf{0} \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Comme M est de déterminant 1 et les R_{θ_i} aussi, q doit être pair (en effet : $\det(M) = \det(-I_q) = (-1)^q$, par un calcul de déterminant immédiat par blocs). Cela permet d'écrire :

$$-I_q = \begin{pmatrix} R_\pi & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & R_\pi \end{pmatrix},$$

avec $q/2$ matrices $R(\pi)$. Posons alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = P \begin{pmatrix} I_p & & & & \mathbf{0} \\ & R_{t\cdot\pi} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_{t\cdot\pi} & \\ & & & & R_{t\cdot\theta_1} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & & R_{t\cdot\theta_r} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Par ce qui précède : $\gamma(1) = M$, et : $\gamma(0) = P I_n P^{-1} = I_n$. De plus γ est bien à valeurs dans

$\text{SO}_n(\mathbf{R})$. En effet, pour tout $t \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{I}_p & & & & \mathbf{0} \\ & R_{t,\pi} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_{t,\pi} & \\ & & & & R_{t,\theta_1} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & & R_{t,\theta_r} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \text{I}_p & & & & \mathbf{0} \\ & R_{t,\pi} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_{t,\pi} & \\ & & & & R_{t,\theta_1} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & & R_{t,\theta_r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{I}_p & & & & \mathbf{0} \\ & R_{t,\pi}^\top R_{t,\pi} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_{t,\pi}^\top R_{t,\pi} & \\ & & & & R_{t,\theta_1}^\top R_{t,\theta_1} \\ & & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & & & R_{t,\theta_r}^\top R_{t,\theta_r} \end{pmatrix} \\ &= \text{I}_n, \end{aligned}$$

donc cette matrice diagonale par blocs est dans $\text{O}_n(\mathbf{R})$; comme P est aussi orthogonale, et que $\text{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe, on en déduit : $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in \text{O}_n(\mathbf{R})$. De plus :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \det(\gamma(t)) = (\det(R_{t,\pi}))^{q/2} \prod_{i=1}^r \det(R_{t,\theta_i}) = 1,$$

donc : $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$.

Enfin, γ est continue par continuité du cosinus, du sinus et du produit matriciel. On en déduit que M est liée continûment à I_n dans $\text{SO}_n(\mathbf{R})$. Ceci vaut pour toute matrice $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$, d'où le résultat : $\text{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

5. Soit H un sous-groupe multiplicatif de $\text{O}_n(\mathbf{R})$, contenant $\text{SO}_n(\mathbf{R})$. Supposons : $H \neq \text{SO}_n(\mathbf{R})$. Il existe donc une matrice M orthogonale appartenant à H et de déterminant -1 . Toute matrice de $\text{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbf{R})$ est de la forme MN avec $N \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$. En effet, comme le déterminant est multiplicatif, on a pour toute matrice $A \in \text{O}_n(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} A \in \text{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbf{R}) &\iff \det(A) = -1 \\ &\iff \det(AM^{-1}) = 1 & (\det(M) = -1) \\ &\iff AM^{-1} \in \text{O}_n(\mathbf{R}) \cap \text{SL}_n(\mathbf{R}) = \text{SO}_n(\mathbf{R}) \\ &\iff \exists N \in \text{SO}_n(\mathbf{R}), A = MN. \end{aligned}$$

Pour l'avant-dernière équivalence, on justifie l'appartenance de AM^{-1} à $\text{O}_n(\mathbf{R})$ grâce à la structure de groupe.

Ceci étant dit, comme H contient M et $\text{SO}_n(\mathbf{R})$, et est stable par produit, on a : $\forall N \in \text{SO}_n(\mathbf{R}), MN \in H$, c'est-à-dire, d'après les équivalences ci-dessus : $\forall A \in \text{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbf{R}), A \in H$. On en déduit que H contient $\text{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbf{R})$ et $\text{SO}_n(\mathbf{R})$, donc H contient $\text{O}_n(\mathbf{R})$. Or H est inclus dans $\text{O}_n(\mathbf{R})$ par hypothèse, donc :

$$H = \text{O}_n(\mathbf{R}).$$

On a bien démontré que H égale soit $\text{SO}_n(\mathbf{R})$, soit $\text{O}_n(\mathbf{R})$.

6. On a :

$$\begin{aligned} (Z_2 \notin \text{GL}_2(\mathbf{R})) &= (\det(Z_2) = 0) \\ &= (Y_{1,1}Y_{2,2} = Y_{2,1}Y_{1,2}) \\ &= (Y_{1,1}Y_{2,2} = 0, Y_{1,2}Y_{2,1} = 0) \cup (Y_{1,1}Y_{2,2} = 1, Y_{1,2}Y_{2,1} = 1). \end{aligned}$$

Or, pour tout $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^4$ tel que : $(i, j) \neq (k, \ell)$, on a :

$$Y_{i,j}Y_{k,\ell} \sim \mathcal{B}(p^2).$$

En effet, on a clairement : $(Y_{i,j}Y_{k,\ell})(\Omega) = \{0, 1\}$, et l'indépendance de $Y_{i,j}$ et de $Y_{k,\ell}$ entraîne :

$$P(Y_{i,j}Y_{k,\ell} = 1) = P((Y_{i,j} = 1) \cap (Y_{k,\ell} = 1)) = P(Y_{i,j} = 1)P(Y_{k,\ell} = 1) = p^2.$$

On en déduit, par sous-additivité et, encore, indépendance des variables aléatoires en jeu (par le lemme des coalitions) :

$$\begin{aligned} P(Z_2 \notin \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) &= P(Y_{1,1}Y_{2,2} = 0)P(Y_{1,2}Y_{2,1} = 0) + P(Y_{1,1}Y_{2,2} = 1)P(Y_{1,2}Y_{2,1} = 1) \\ &= (1 - p)^2 + p^2. \end{aligned}$$

Par passage au complémentaire :

$$P(Z_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = 1 - (1 - p)^2 - p^2.$$

Passons au calcul de $P(Z_n \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}))$ et $P(Z_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}))$. Pour cela, commençons par expliciter l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\{0, 1\}$ (que nous noterons abusivement $\mathrm{O}_n(\{0, 1\})$). Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{O}_n(\{0, 1\})$. Notons $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Comme A est orthogonale, ses colonnes $C_1, \dots, C_n$ forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le caractère unitaire implique :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

Or les $a_{i,j}^2$ sont des entiers par hypothèse sur A : s'ils sont non nuls, ils sont supérieurs ou égaux à 1. L'égalité ci-dessus est donc impossible s'il y a, dans la somme, au moins deux termes non nuls. On en déduit que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un unique indice $i_j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i_j,j}^2 = 1$ (et donc $a_{i_j,j} = 1$, vu que les coefficients de A sont positifs), tandis que $a_{i,j} = 0$ dès que $i \neq i_j$. Autrement dit : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j = a_{i_j,j}E_{i_j} = E_{i_j}$.

À présent, l'orthogonalité des colonnes implique que tous les i_j , quand j parcourt $\llbracket 1, n \rrbracket$, sont distincts. En effet, s'il existe j et k distincts tels que $i_j = i_k$, alors $\langle C_j, C_k \rangle = \|E_{i_j}\|^2 \neq 0$, ce qui est absurde.

Ainsi $(i_1, \dots, i_n)$ est une famille de n entiers distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$: il existe donc une permutation $\sigma \in S_n$ telle que : $(i_1, \dots, i_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, et donc :

$$(C_1, \dots, C_n) = (E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}).$$

Réciproquement, pour tout $\sigma \in S_n$, il est clair que la matrice $P_\sigma = M_{\mathcal{B}}\left(\left(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}\right)\right)$ est orthogonale (la famille de ses colonnes est orthonormée : ce n'est qu'un réarrangement de la base canonique). Tout ce qui précède démontre que l'application suivante :

$$\begin{cases} S_n & \rightarrow & \mathrm{O}_n(\{0, 1\}) \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma \end{cases}$$

est bien définie et bijective (la première partie de la résolution démontre la surjectivité, et l'injectivité est triviale puisque $E_i = E_j$ implique $i = j$). En particulier, en comparant les cardinaux, on a :

$$\mathrm{card}(\mathrm{O}_n(\{0, 1\})) = \mathrm{card}(S_n) = n!. \quad (*)$$

Ce calcul de cardinal servira plus tard. Pour l'heure, on utilise surtout l'égalité suivante, découlant de la description ci-dessus de $O_n(\{0, 1\})$:

$$P(Z_n \in O_n(\mathbf{R})) = \sum_{\sigma \in S_n} P(Z_n = P_\sigma),$$

or pour toute permutation σ on a, par indépendance des $Y_{i,j}$:

$$P(Z_n = P_\sigma) = P\left(\bigcap_{j=1}^n (Y_{\sigma(j),j} = 1) \cap \bigcap_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq \sigma(j)}} (Y_{i,j} = 0)\right) = p^n (1-p)^{n(n-1)}. \quad (\dagger)$$

On en déduit :

$$P(Z_n \in O_n(\mathbf{R})) = \sum_{\sigma \in S_n} p^n (1-p)^{n(n-1)} \stackrel{(*)}{=} n! p^n (1-p)^{n(n-1)}.$$

De même :

$$P(Z_n \in SO_n(\mathbf{R})) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \det(P_\sigma)=1}} P(Z_n = P_\sigma) \stackrel{(\dagger)}{=} \text{card}(\{P_\sigma \mid \det(P_\sigma) = 1\}) p^n (1-p)^{n(n-1)},$$

or il y a autant de matrices P_σ de déterminant 1 que de déterminant -1 (car $n \geq 2$). En effet, fixons une matrice de déterminant -1 , par exemple $P_{(12)}$:

$$\det(P_{(12)}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{n-2} \end{vmatrix} = -1.$$

Le même raisonnement que dans la question précédente démontre que l'application $M \mapsto P_{(12)}M$ établit une bijection de $\{P_\sigma \mid \det(P_\sigma) = 1\}$ dans $\{P_\sigma \mid \det(P_\sigma) = -1\}$ (on utilise implicitement la relation : $\forall(\sigma, \tau) \in S_n^2, P_{\sigma\tau} = P_\sigma P_\tau$, qui se démontre aisément en introduisant l'endomorphisme canoniquement associé à $P_{\sigma\tau}$, qui agit sur la base canonique en envoyant E_j sur $E_{\sigma(\tau(j))}$). On en déduit :

$$n! = \text{card}(\{P_\sigma \mid \det(P_\sigma) = 1\}) + \text{card}(\{P_\sigma \mid \det(P_\sigma) = -1\}) = 2 \text{card}(\{P_\sigma \mid \det(P_\sigma) = 1\}),$$

ce qui permet de conclure :

$$P(Z_n \in SO_n(\mathbf{R})) = \frac{n!}{2} p^n (1-p)^{n(n-1)}.$$

7. Supposons d'abord : $x \neq y$. Posons : $H = \text{Vect}(x-y)^\perp$, qui est un hyperplan de E puisque $x-y$ n'est pas nul par hypothèse (ce vecteur engendre donc une droite vectorielle). Soit s la réflexion par rapport à H . On a :

$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y),$$

avec : $\frac{1}{2}(x+y) \in H$, puisqu'en effet :

$$\left\langle \frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y) \right\rangle = \frac{1}{4} (\|x\|^2 - \|y\|^2) = 0.$$

On en déduit que la décomposition de x ci-dessus est celle dans la somme directe : $E = H \oplus H^\perp$. Par définition d'une symétrie orthogonale :

$$s(x) = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y.$$

Il suffit alors de prendre pour matrice A , la matrice de s relativement à la base canonique.

Si $x = y$, il suffit de prendre la réflexion par rapport à n'importe quel hyperplan contenant x : il en existe, puisque $n \geq 2$.

8. Comme G appartient à $\mathcal{G}$, qui est lui-même inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, la matrice G est inversible. En particulier : $Gx \neq 0$. Posons donc : $y = \frac{1}{\|Gx\|}Gx$. On a : $\|x\| = \|y\| = 1$. Par la question précédente, il existe une matrice de réflexion A telle que : $Ay = x$. C'est-à-dire :

$$AGx = \|Gx\|x.$$

Une matrice de réflexion est en particulier orthogonale, donc par hypothèse sur $\mathcal{G}$ on a : $AG \in \mathcal{G}$. D'où le résultat attendu en posant $G_1 = AG$, si $p = 1$.

Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, posons ensuite :

$$G_p = G_1^p.$$

Comme G est un groupe, on a : $\forall p \in \mathbf{Z}$, $G_p \in \mathcal{G}$. De plus, l'égalité ci-dessus dit que x est un vecteur propre de G_1 , de valeur propre associée $\|Gx\|$, donc on a classiquement :

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad G_p x = G_1^p x = \|Gx\|^p x,$$

d'où le résultat.

9. On munit $M_n(\mathbf{R})$ de la norme $||| \cdot |||$ subordonnée à $\| \cdot \|$. Comme $\mathcal{G}$ est une partie compacte de $M_n(\mathbf{R})$, elle est bornée : il existe $m \in \mathbf{R}_+$ tel que : $\forall G \in \mathcal{G}$, $|||G||| \leq m$.
Soit $G \in \mathcal{G}$. Démontrons : $\forall x \in E$, $\|Gx\| = \|x\|$. Par homogénéité de la norme, il suffit de le démontrer dans le cas unitaire. Soit $x \in E$ un vecteur unitaire, et considérons les matrices G_p construites dans la question précédente. On a :

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad \|Gx\|^p = \|G_p x\| \leq |||G_p||| \leq m.$$

La suite géométrique $(\|Gx\|^p)_{p \in \mathbf{Z}}$ étant bornée, on en déduit : $\|Gx\| = 1$ (en effet, si $\|Gx\| > 1$, alors : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|Gx\|^p = +\infty$; si $\|Gx\| < 1$, alors : $\lim_{p \rightarrow -\infty} \|Gx\|^p = +\infty$). Ainsi G préserve la norme des vecteurs unitaires et donc de tous les vecteurs (traiter à part $x = 0$) : c'est une matrice orthogonale.

On a démontré : $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$. L'inclusion réciproque étant vraie par hypothèse, on a l'égalité.

II. Calcul différentiel sur $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

10. Les applications $g : M \mapsto (M^\top, M)$ et $h : (A, B) \mapsto AB$ sont de classe C^1 : la première parce qu'elle est linéaire, la seconde parce qu'elle est bilinéaire. En outre, pour tout $(M, N, H, K) \in M_n(\mathbf{R})^4$ on a :

$$dg(M)H = g(H) = (H^\top, H) \quad \text{et} \quad : \quad dh(M, N)(H, K) = h(H, N) + h(M, K) = H^\top N + M^\top K.$$

Par composition, $f = h \circ g$ est de classe C^1 et on a, pour tout $(M, H) \in M_n(\mathbf{R})^2$:

$$df(M)H = dh(g(M))(dg(M)H) = H^\top M + M^\top H.$$

En particulier, sa différentielle en I_n est $H \mapsto H + H^\top$, ce qui servira dans la question suivante.

11. Si H appartient à l'espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ en l'identité, et si $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est dérivable en 0 et vérifie : $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(0) = H$, alors dériver en 0 la relation $f(\gamma(t)) = I_n$, valable pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, donne par la question précédente :

$$H^\top + H = df(\gamma(0))\gamma'(0) = 0_{M_n(\mathbf{R})},$$

c'est-à-dire : $H \in A_n(\mathbf{R})$. D'où le résultat : $T \subseteq A_n(\mathbf{R})$.

12. Soit $(H, K) \in T^2$. Il existe des chemins $\gamma_1 :]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ et $\gamma_2 :]-\varepsilon_2, \varepsilon_2[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ dérivables en 0, tels que :

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_n, \quad \text{et} : \quad \gamma_1'(0) = H, \quad \gamma_2'(0) = K.$$

Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, et : $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$. Comme $O_n(\mathbf{R})$ est stable par produit, γ est bien à valeurs dans $O_n(\mathbf{R})$, dérivable en 0 par composition de (γ_1, γ_2) avec l'application bilinéaire $(A, B) \mapsto AB$, et on a :

$$\gamma'(0) = \gamma_1'(0)\gamma_2(0) + \gamma_1(0)\gamma_2'(0) = H + K.$$

On en déduit : $H + K \in T$. Ainsi T est stable par somme.

Comme T est inclus dans $M_n(\mathbf{R})$ par définition, non vide (considérer le chemin constant égal à I_n : il est de dérivée nulle, donc : $0_{M_n(\mathbf{R})} \in T$), stable par somme, il reste à démontrer qu'il est stable par multiplication externe, pour en faire un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.

Faisons. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $H \in T$. Il existe un chemin $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 tel que : $\gamma(0) = I_n$, $\gamma'(0) = H$. Le chemin $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ est dérivable en 0, égal à I_n en 0 et de dérivée λH en ce point. D'où : $\lambda H \in T$.

Ceci achève de démontrer que T est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$, donc un espace vectoriel.

Remarque. Cela peut aussi découler de la question suivante (il n'y a pas de raisonnement circulaire).

13. On a déjà démontré : $T \subseteq A_n(\mathbf{R})$. Réciproquement, soit $M \in A_n(\mathbf{R})$, et introduisons le chemin $\gamma : t \mapsto \exp(tM)$. Il est dérivable sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $O_n(\mathbf{R})$, puisque par continuité de la transposition on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \gamma(t)^\top \gamma(t) = \exp(tM^\top) \exp(tM) = \exp(-tM) \exp(tM) = I_n.$$

De plus : $\gamma'(0) = M \exp(0 \cdot M) = M$, donc par définition de l'espace tangent on a : $M \in T$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité : $T = A_n(\mathbf{R})$.

14. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, posons :

$$M_x = \begin{pmatrix} x & & \mathbf{0} \\ & \frac{1}{x} & \\ \mathbf{0} & & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

(On rappelle que l'on a : $n \geq 2$.)

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ on a : $M_x \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$, et : $g(M_x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + n - 2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. On en déduit que la restriction de g à $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas majorée : elle ne possède pas de maximum global.

15. L'application g est la composition de la trace (qui est linéaire donc de classe C^1) et de la fonction f de la question 10. Elle est donc de la classe C^1 et on a :

$$\forall (M, H) \in M_n(\mathbf{R})^2, \quad dg(M)H = \text{tr}(df(M)H) = \text{tr}(H^\top M) + \text{tr}(M^\top H) = 2\text{tr}(H^\top M).$$

Par définition et unicité du gradient :

$$\forall M \in M_n(\mathbf{R}), \quad \nabla g(M) = 2M.$$

Comme le déterminant est une application multilinéaire en les colonnes, elle est de classe C^1 en tout point de $M_n(\mathbf{R})$. Nous allons calculer sa différentielle grâce à la proposition précédente. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base « canonique » de $M_n(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E_{i,j} = ((\delta_{i,k} \delta_{j,\ell}))_{1 \leq k, \ell \leq n}$). Soient $M = ((m_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ et $t \in \mathbf{R}$. En utilisant la n -linéarité du

déterminant, on a facilement, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\det(M + tE_{i,j}) = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \cdots & m_{i,j} + t & \cdots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} = \det(M) + \begin{vmatrix} m_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i,1} & \cdots & t & \cdots & m_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & 0 & \cdots & m_{n,n} \end{vmatrix} \\ = \det(M) + (-1)^{i+j} t \Delta_{i,j},$$

où $\Delta_{i,j}$ désigne la matrice M dont on enlève la i^e ligne et j^e colonne. Donc :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \partial_{(i,j)} \det(M) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\det(M + tE_{i,j}) - \det(M)}{t} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}.$$

On en déduit, pour toute matrice $H = ((h_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbf{R})$:

$$d \det(M)(H) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} \partial_{(i,j)} \det(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} = \text{tr} \left(\text{Com}(M)^\top H \right),$$

et, si l'on munit $M_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire usuel, l'identité ci-dessus implique par unicité du gradient :

$$\forall M \in M_n(\mathbf{R}), \quad \nabla \det(M) = \text{Com}(M).$$

16. Par la question précédente, g et $\det$ sont de classe C^1 sur l'ouvert $M_n(\mathbf{R})$. De plus, par hypothèse g atteint un extremum local en M sur une ligne de niveau du déterminant (on a : $\text{SL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$), et il s'agit d'un point régulier puisque :

$$\nabla \det(M) = \text{Com}(M) = \det(M) (M^\top)^{-1} = (M^\top)^{-1} \neq 0_{M_n(\mathbf{R})},$$

donc par le théorème des extremums liés il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que : $\nabla g(M) = \lambda \nabla \det(M)$. Par la question précédente :

$$2M = \lambda \text{Com}(M) = \lambda (M^\top)^{-1}.$$

Déduisons-en que M est spéciale orthogonale ; comme on connaît déjà son déterminant, il suffit de démontrer qu'on a : $M^\top M = I_n$. L'égalité précédente implique déjà : $M^\top M = \frac{\lambda}{2} I_n$. Il suffit donc de démontrer qu'on a $\lambda = 2$. Pour cela, on note que prendre le déterminant dans cette égalité donne : $1 = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n$, donc : $\lambda \in \{2, -2\}$. Or le cas $\lambda = -2$ est exclu : dans le cas contraire, on aurait $M^\top M = -I_n$ et donc $M^\top M$ serait une matrice symétrique définie négative : on sait classiquement que c'est faux, puisque $X^\top M^\top M X = \|MX\|^2 \geq 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$. Ainsi $\lambda = 2$, donc : $M^\top M = I_n$, et comme $\det(M) = 1$ cela démontre le résultat voulu : $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$.

17. Soit B la boule fermée centrée en la matrice nulle, de rayon $\sqrt{n+1}$ pour la norme euclidienne usuelle. Comme g est continue sur le compact non vide $\text{SL}_n(\mathbf{R}) \cap B$ (c'est un compact en tant qu'intersection d'un fermé et d'un compact, la fermeture de $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ provenant de sa description comme image réciproque par le déterminant d'un singleton ; il est non vide puisqu'il contient I_n , c'est ce qui a motivé de prendre un rayon supérieur à $\sqrt{n}$), il existe $M \in \text{SL}_n(\mathbf{R}) \cap B$ tel que :

$$g(M) = \inf_{A \in \text{SL}_n(\mathbf{R}) \cap B} g(A).$$

Comme, de plus, on a $g(A) > n+1 > g(I_n)$ pour tout $A \notin B$, la fonction g ne peut pas atteindre de minimum local hors de B . On a donc :

$$g(M) = \inf_{A \in \text{SL}_n(\mathbf{R}) \cap B} g(A) = \inf_{A \in \text{SL}_n(\mathbf{R})} g(A).$$

On a démontré que la restriction de g à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum global. C'est en particulier un minimum local, donc par la question précédente il est atteint en une matrice M spéciale orthogonale, et il vaut :

$$g(M) = \mathrm{tr}(M^\top M) = \mathrm{tr}(I_n) = n.$$

Réciproquement, pour toute matrice spéciale orthogonale N , ce même calcul donne $g(N) = n$, donc le minimum de $g|_{\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})}$ est aussi atteint en N . Donc :

$$\left\{ M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) \mid g(M) = \inf_{A \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})} g(A) \right\} = \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}).$$

III. Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

18. Soit G un sous-groupe borné de $\mathbf{R}^*$, et soit $x \in G$. Supposons : $|x| \neq 1$. Soit : $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x|^k = +\infty$, soit : $\lim_{k \rightarrow -\infty} |x|^k = +\infty$, selon que $|x|$ soit supérieur ou inférieur à 1. C'est impossible puisque, structure de groupe oblige, x^k appartient à G pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, nécessairement : $G \subseteq \{-1, 1\}$, et réciproquement $\{1\}$ et $\{-1, 1\}$ sont des sous-groupes bornés de $\mathbf{R}^*$: on les a tous.

Comme φ et le déterminant sont continus (φ est continue par hypothèse et le déterminant est de classe C^1 , on l'a vu), l'application $\det \circ \varphi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}^*$ est continue. On en déduit que l'image directe $\det \circ \varphi(\mathbf{U})$ est une partie compacte et connexe par arcs incluse dans $\mathbf{R}^*$ (la compacité de $\mathbf{U}$ est admise par l'énoncé, et la connexité se démontre en reconnaissant l'image directe du connexe par arcs $\mathbf{R}$ par l'application continue $\theta \mapsto e^{i\theta}$). Or les connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles, et un intervalle inclus dans $\mathbf{R}^*$ est nécessairement dans $\mathbf{R}_+^*$ ou $\mathbf{R}_-^*$. Comme φ est un morphisme de groupes, on a : $\det(\varphi(1)) = \det(I_n) = 1 \in \mathbf{R}_+^*$, donc : $\det \circ \varphi(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{R}_+^*$.

Or le déterminant est aussi un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^*$. Comme $\mathbf{U}$ est un groupe, $\det \circ \varphi(\mathbf{U})$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}_+^*$ (et de $\mathbf{R}^*$ en particulier), qui doit être compact comme on l'a vu, donc borné. Par ce qui précède : $\det \circ \varphi(\mathbf{U}) \subseteq \{-1, 1\} \cap \mathbf{R}_+^* = \{1\}$ (il y a même égalité). D'où le résultat :

$$\varphi(\mathbf{U}) \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbf{R}).$$

19. Soit $z \in \mathbf{U}$. Notons λ une valeur propre complexe de $\varphi(z)$. Soit X un vecteur propre associé. Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on sait que λ^n est une valeur propre complexe de $\varphi(z)^n$ et X est toujours un vecteur propre associé ; par propriété de morphisme, c'est un vecteur propre de $\varphi(z^n)$.

Comme $m_X : A \mapsto AX$ est une application linéaire sur $M_n(\mathbf{C})$ qui est de dimension finie, elle est continue. Ainsi $m_X \circ \varphi$ est continue, donc $m_X \circ \varphi(\mathbf{U})$ est une partie compacte de $M_{n,1}(\mathbf{C})$: elle est en particulier bornée. Or on vient d'établir que :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad m_X \circ \varphi(z^n) = \lambda^n X,$$

et z^n appartient à $\mathbf{U}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$. On en déduit que $\{\lambda^n X \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est borné, et en notant que X est non nul en tant que vecteur propre, on en déduit que le sous-groupe $\{|\lambda|^n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ de $\mathbf{R}_+^*$ est aussi borné. Par la question précédente : $|\lambda| = 1$.

D'où le résultat : $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(\varphi(z)) \subseteq \mathbf{U}$.

20. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$\Psi(x + y) = \varphi(e^{i(x+y)}) = \varphi(e^{ix}e^{iy}) = \varphi(e^{ix})\varphi(e^{iy}) = \Psi(x)\Psi(y),$$

puisque φ est un morphisme de $\mathbf{U}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, et e^{ix} appartient bien à $\mathbf{U}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. D'où le résultat.

21. Comme Ψ est continue, en tant que composition des applications continues φ et $x \mapsto e^{ix}$, la classe C^1 de F résulte du théorème fondamental de l'analyse. De plus : $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = \Psi(x) = \varphi(e^{ix})$, et en particulier : $F'(0) = \varphi(1) = I_n$ (un morphisme envoie l'élément neutre sur l'élément neutre). Remarquons alors que l'on a, par définition de la dérivée :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-0} (F(x) - F(0)) = F'(0) = I_n,$$

donc par continuité du déterminant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \det \left(\frac{1}{x} F(x) \right) = \det(I_n) = 1.$$

On en déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, la matrice $\frac{1}{x}F(x)$ soit inversible. Par conséquent $F(x)$ l'est aussi après multiplication par $x \neq 0$. D'où le résultat.

22. On a : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \Psi(x)\Psi(y) = \Psi(x+y)$ (question 20). En intégrant cette relation par rapport à y :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Psi(x) \int_0^\alpha \Psi(y) dy = \int_0^\alpha \Psi(x+y) dy = \int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt.$$

L'égalité $\int_0^\alpha \Psi(x)\Psi(y) dy = \Psi(x) \int_0^\alpha \Psi(y) dy$ est vraie par linéarité de l'application $M \mapsto \Psi(x)M$ (à x fixé).

Par la question précédente, $\int_0^\alpha \Psi(y) dy = F(\alpha)$ est inversible. D'où la relation annoncée :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t) dt \right) (F(\alpha))^{-1} = (F(x+\alpha) - F(x))(F(\alpha))^{-1}.$$

La classe C^1 de Ψ sur $\mathbf{R}$ découle alors immédiatement de celle de F (et de cette relation).

23. La question précédente assure que Ψ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. On a : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$. En dérivant cette relation à x fixé, par rapport à y , on a (par linéarité de l'application définie sur $M_n(\mathbf{C})$ par $M \mapsto \Psi(x)M$) :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \Psi'(x+y) = \Psi(x)\Psi'(y).$$

En posant $y = 0$, on obtient : $\forall x \in \mathbf{R}, \Psi'(x) = \Psi(x)M$. L'application Ψ vérifie donc le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= y \cdot M, \\ y(0) &= I_n, \end{cases}$$

et $f_M : x \mapsto \exp(xM)$ le vérifie aussi. Par l'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire : $\Psi = f_M$, d'où le résultat :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \Psi(x) = \exp(xM).$$

IV. Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

24. Par définition, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que : $A = P^{-1}BP$; d'où $PA = BP$.

En écrivant chaque coefficient de P sous forme algébrique, on a l'existence de $(R, Q) \in M_n(\mathbf{R})^2$ tel que : $P = R + iQ$. On en déduit : $(Q + iR)A = B(Q + iR)$, d'où : $QA = BQ$ et $RA = BR$. En particulier :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad (Q + tR)A = B(Q + tR).$$

Soit f l'application $t \mapsto \det(Q + tR)$. Comme le déterminant est polynomial en les coefficients d'une matrice, l'application f est polynomiale aussi, non identiquement nulle puisque : $f(i) =$

$\det(P) \neq 0$. Par conséquent f admet un nombre fini de racines réelles. Comme $\mathbf{R}$ est infini, il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que : $f(t_0) \neq 0$, c'est-à-dire tel que : $Q + t_0 R \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, et de plus : $(Q + t_0 R)A = B(Q + t_0 R)$. En multipliant à gauche chaque membre de l'égalité par l'inverse de $Q + t_0 R$, on a :

$$A = (Q + t_0 R)^{-1} B (Q + t_0 R),$$

donc A et B sont semblables dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$: d'où le résultat.

25. Soit $N \in \text{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente et telle que : $\ker(N) = \ker(N^2)$. On démontre alors que l'on a pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$:

$$P_k : \ll \ker(N) = \ker(N^k) \gg$$

par récurrence sur k . On a évidemment P_1 . Soit $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On suppose P_k . L'inclusion $\ker(N) \subseteq \ker(N^k)$ est immédiate et nous ne démontrons que l'inclusion réciproque. Soit $X \in \ker(N^{k+1})$. On a : $NX \in \ker(N^k) = \ker(N)$, donc : $N^2X = 0_{\text{M}_{n,1}(\mathbf{C})}$. Or par hypothèse on a : $\ker(N) = \ker(N^2)$, donc : $NX = 0_{\text{M}_{n,1}(\mathbf{C})}$. Ainsi : $X \in \ker(N)$, ce qu'il fallait démontrer.

On a bien : $\ker(N) = \ker(N^{k+1})$, donc P_k implique P_{k+1} . Ceci vaut pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, donc :

$$\forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad \ker(N) = \ker(N^k).$$

En particulier, si k égale l'indice de nilpotence de N , on a : $\ker(N) = \ker(0_{\text{M}_n(\mathbf{C})}) = \text{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, donc : $N = 0_{\text{M}_n(\mathbf{C})}$.

Par contraposée, si N est nilpotente et non nulle, alors : $\ker(N) \neq \ker(N^2)$.

26. Par la question 20, on a : $\exp(2\pi M) = \varphi(e^{2i\pi}) = \varphi(1) = I_n$. Donc :

$$\text{Sp}_{\mathbf{C}}(\exp(2\pi M)) = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(I_n) = \{1\}.$$

Or on sait démontrer, en trigonalisant M dans $\text{M}_n(\mathbf{C})$ et en inspectant les coefficients diagonaux de $\exp(2\pi M)$, que l'on a :

$$\text{Sp}_{\mathbf{C}}(\exp(2\pi M)) = \{e^{2\pi\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)\}.$$

Pour toute valeur propre λ de M , on a donc : $e^{2\pi\lambda} = 1$, c'est-à-dire : $2\pi\lambda \in 2\pi i\mathbf{Z}$. D'où le résultat :

$$\text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subseteq i\mathbf{Z}.$$

27. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de M , et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ leurs ordres de multiplicité. Comme χ_M est scindé sur $\mathbf{C}$ par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ et des matrices nilpotentes $N_1, \dots, N_r$ telles que :

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Posons alors :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix}, \quad \text{et} : \quad N = \begin{pmatrix} N_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & N_r \end{pmatrix}.$$

Par la relation ci-dessus, M est semblable à $D + N$. De plus D et N sont respectivement diagonale et nilpotente d'après les règles de calcul par blocs, et on a :

$$DN = ND = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_r N_r \end{pmatrix}.$$

On a enfin : $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \{\lambda_i \mid i \in \llbracket 1, r \rrbracket\} = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$. D'où le résultat.

28. On reprend les notations de la question précédente. On a immédiatement :

$$\exp(2\pi D) = \begin{pmatrix} e^{2\pi\lambda_1} I_{\alpha_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & e^{2\pi\lambda_r} I_{\alpha_r} \end{pmatrix} \stackrel{(q.26)}{=} I_n.$$

Or, comme D et N commutent, on a :

$$I_n \stackrel{(q.26)}{=} \exp(2\pi M) = \exp(2\pi D + 2\pi N) = \exp(2\pi D) \exp(2\pi N) = \exp(2\pi N).$$

Déduisons-en que N est nulle. Soit $X \in \ker(N^2)$. On a :

$$X = \exp(2\pi N)X = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (2\pi N)^k X = X + 2\pi NX,$$

donc : $NX = 0_{M_n(\mathbf{C})}$. On a démontré : $\ker(N^2) \subseteq \ker(N)$. L'inclusion réciproque étant évidente, on a l'égalité. Par la contraposée de la question 25, la matrice N est nulle : d'où le résultat.

29. Par la question 27, la matrice M est semblable dans $M_n(\mathbf{C})$ à la matrice $D + N = D$, qui est diagonale, donc M est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. De plus : $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subseteq i\mathbf{Z}$.

Or la matrice $M = \Psi'(0)$ est à coefficients réels puisque $\Psi : x \mapsto \varphi(e^{ix})$ l'est, donc ses valeurs propres sont deux à deux conjuguées, et deux valeurs propres conjuguées ont les mêmes ordres de multiplicité (utiliser l'égalité $\overline{\chi_M} = \chi_M$ et l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles). Mettant de côté la valeur propre 0 (qui est la seule à être à la fois réelle et dans $i\mathbf{Z}$), on en déduit l'existence de $s \in \llbracket 0, n \rrbracket$, d'entiers relatifs non nuls $k_1, \dots, k_p$ et de $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ tels que :

$$M = P \begin{pmatrix} D_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & D_p \\ & & & 0_{M_s(\mathbf{R})} \end{pmatrix} P^{-1}$$

où l'on a noté : $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $D_j = \begin{pmatrix} ik_j & 0 \\ 0 & -ik_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a alors :

$$\Psi(x) = \exp(xM) = P \begin{pmatrix} \exp(xD_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(xD_p) \\ & & & I_s \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Or la question 1 nous fait démontrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_2(\mathbf{C})$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \exp \left(\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = QR_{\theta}Q^{-1}.$$

(Nous n'avons pas démontré qu'on peut prendre la même matrice de passage Q pour tout θ ; c'est vrai, mais nous ne détaillons pas pourquoi parce que ce n'est pas important pour la suite : nous voulions simplement alléger les notations en introduisant le moins de matrices possible.)

On en déduit, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) &= P \begin{pmatrix} QR_{xk_1}Q^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & QR_{xk_p}Q^{-1} \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \underbrace{\begin{pmatrix} Q & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & Q \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix}}_{=S \in \text{GL}_n(\mathbf{C})} \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & R_{xk_p} \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & Q^{-1} \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= S \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & R_{xk_p} \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix} S^{-1}.
 \end{aligned}$$

On a démontré que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la matrice réelle $\Psi(x)$ est semblable dans $M_n(\mathbf{C})$ à la

matrice aussi réelle $\begin{pmatrix} R_{xk_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & R_{xk_p} \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix}$, avec la même matrice de passage S . En raisonnant

comme dans la question 24, on peut remplacer S par une matrice de passage à coefficients réels. De plus, dans la résolution de la question 23, la nouvelle matrice de passage $Q + t_0 R$ est construite indépendamment de A et B : ainsi, adapter le raisonnement à S donne bien une matrice de passage réelle indépendante de x . D'où le résultat.

30. Réciproquement, pour tous entiers $k_1, \dots, k_p$ et toute matrice inversible réelle Q , l'application :

$$\Psi : x \mapsto Q \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & R_{xk_p} \\ \mathbf{0} & & & I_s \end{pmatrix} Q^{-1}$$

est bien une application de $\mathbf{R}$ dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \det(\Psi(x)) = \prod_{i=1}^p \det(R_{xk_i}) = 1.$$

C'est un morphisme de groupes, grâce à l'identité :

$$\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \forall (x, x') \in \mathbf{R}^2, \quad R_{(x+x')k_j} = R_{xk_j} R_{x'k_j}.$$

D'où le résultat.