

Autour de $O_n(\mathbf{R})$ et $SL_n(\mathbf{R})$ I. Quelques propriétés de $O_n(\mathbf{R})$

1 ▷ On considère le polynôme caractéristique de R_θ : $\chi_\theta = X^2 - \text{tr}(R_\theta)X + \det(R_\theta) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

Le discriminant vaut $\Delta_\theta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$.

Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, alors $R_\theta = I_2$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$.

Si $\theta \equiv \pi [2\pi]$, alors $R_\theta = -I_2$ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$.

Si $\theta \not\equiv 0 [\pi]$, alors $\Delta_\theta < 0$ et donc R_θ n'admet pas de valeurs propres réelles donc non diagonalisable sur $\mathbf{R}$.

Mais comme $\Delta_\theta \neq 0$ alors $|\text{Sp}_{\mathbf{C}}(R_\theta)| = 2$ et $R_\theta \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Ainsi

R_θ est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ si, et seulement si, $\theta \equiv 0 [\pi]$ et R_θ est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$

2 ▷ $\supseteq$: Soit $\theta \in \mathbf{R}$. On a

$$R_\theta^\top R_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } \det(R_\theta) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

D'où $R_\theta \in \text{SO}_2(\mathbf{R})$.

$\subseteq$: Soit $M \in \text{SO}_2(\mathbf{R})$. On écrit $M = (C_1 \mid C_2)$ en colonnes, on a

$$I_2 = M^\top M = \begin{pmatrix} C_1^\top C_1 & C_1^\top C_2 \\ C_2^\top C_1 & C_2^\top C_2 \end{pmatrix}$$

On a alors $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = 1$ (norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^2$).

On dispose alors de θ et $\theta' \in \mathbf{R}$ tels que $C_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta') \\ \cos(\theta') \end{pmatrix}$. Ainsi

$$1 = \det(M) = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') = \cos(\theta + \theta')$$

donc $\theta + \theta' \equiv 0 [2\pi]$ puis $\theta' \equiv -\theta [2\pi]$ donc $M = (C_1 \mid C_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

$\equiv$: On conclut que $\text{SO}_2(\mathbf{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$ On peut faire comme dans le cours.

3 ▷ On note $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$.

Soit $M \in O_n(\mathbf{R})$. Alors l'endomorphisme canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle.

D'où $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\|Mx\| = \|x\| \leq 1 \cdot \|x\|$. Ainsi $\forall M \in O_n(\mathbf{R})$, $|||M||| \leq 1$.

donc $O_n(\mathbf{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (i). On aurait pu utiliser la norme euclidienne usuelle usuelle.

(les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont équivalentes car $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = n^2 < +\infty$).

L'application $\varphi : M \mapsto M^\top M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ car polynomiale et $O_n(\mathbf{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ or $\{I_n\}$ est fermé.

Ainsi $O_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (ii).

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est un espace de dimension finie (iii).

Avec (i), (ii) et (iii), $O_n(\mathbf{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Par l'absurde, on suppose que $O_n(\mathbf{R})$ est un ensemble connexe par arcs.

Comme $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ selon le cours, alors $I = \det(O_n(\mathbf{R}))$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}$ donc I est un intervalle.

On remarque que $I_n \in O_n(\mathbf{R})$ et $J = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1) \in O_n(\mathbf{R})$ (matrice diagonale).

Or $\det(I_n) = 1$ et $\det(J) = -1$ alors 1 et $-1 \in I$. Ainsi $0 \in I$ car $0 \in [-1, 1]$.

Cela nous fournit $M \in O_n(\mathbf{R})$ tel que $\det(M) = 0$. Alors

$$1 = \det(I_n) = \det(M^\top) \det(M) = 0$$

ce qui est absurde. Ainsi $O_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs

4 ▷ Soit $U \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$.

Comme $U \in \text{O}_n(\mathbf{R})$, le cours nous fournit $\Omega \in \text{O}_n(\mathbf{R})$, $r \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ tels que

$$U = \Omega \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_r} & \\ (0) & & & -I_q \\ & & & & I_p \end{pmatrix} \Omega^\top$$

la matrice du milieu étant diagonale par blocs. Le déterminant étant un invariant de similitude, on a

$$1 = \det(U) = \begin{vmatrix} R_{\theta_1} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_r} & \\ (0) & & & -I_q \\ & & & & I_p \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^r \det(R_{\theta_i}) \right) \det(-I_q) \det(I_p) = (-1)^q$$

Ainsi q est pair et comme $R_\pi = -I_2$, en posant $k = r + q/2$ et $\theta_i = \pi$ pour $i \in \llbracket r+1, k \rrbracket$, on a

$$U = \Omega \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_k} & \\ (0) & & & I_p \end{pmatrix} \Omega^\top$$

On pose alors l'application

$$\psi : \begin{cases} [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t \longmapsto \Omega \begin{pmatrix} R_{t\theta_1} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & R_{t\theta_k} & \\ (0) & & & I_p \end{pmatrix} \Omega^\top \end{cases}$$

de sorte que ψ est continue, $\psi(0) = U$, $\psi(1) = I_n$ et par calculs par blocs, $\forall t \in [0, 1]$, $(\psi(t))^\top \psi(t) = I_n$.

Ainsi $\forall t \in [0, 1]$, $(\psi(t))^\top \psi(t) \in \text{O}_n(\mathbf{R})$ et $\forall t \in [0, 1]$, $\det(\psi(t)) = \left(\prod_{i=1}^{rk} \det(R_{t\theta_i}) \right) \det(I_p) = 1$.

Ainsi ψ est à valeurs dans $\text{SO}_n(\mathbf{R})$. Ce qui prouve que $\boxed{\text{SO}_n(\mathbf{R}) \text{ est connexe par arcs}}$

car on vient de montrer que pour tout $U \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$, il existait un chemin continu joignant U à I_n dans $\text{SO}_n(\mathbf{R})$.

5 ▷ On considère H est un sous-groupe multiplicatif de $\text{O}_n(\mathbf{R})$ tel que $\text{SO}_n(\mathbf{R}) \subset H$ et $H \neq \text{SO}_n(\mathbf{R})$.

Soit $U \in \text{O}_n(\mathbf{R}) \setminus \text{SO}_n(\mathbf{R})$. Il suffit d'établir que $U \in H$.

Par hypothèse, on dispose de $\Omega \in H \setminus \text{SO}_n(\mathbf{R})$ ainsi $\Omega \in \text{O}_n(\mathbf{R})$.

Comme $\forall M \in \text{O}_n(\mathbf{R})$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$, on a $\det(U) = -1$ et $\det(\Omega) = -1$.

On pose $R = \Omega U$. Alors $R \in \text{O}_n(\mathbf{R})$ car $\text{O}_n(\mathbf{R})$ est un groupe.

De plus $\det(R) = \det(\Omega) \det(U) = (-1)^2 = 1$ d'où $R \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$ et ainsi $R \in H$.

Puis $U = \Omega^{-1}R \in H$ car H est aussi un groupe multiplicatif. Ce qui prouve que :

$\boxed{\text{si } H \text{ est un sous-groupe multiplicatif de } \text{O}_n(\mathbf{R}) \text{ contenant } \text{SO}_n(\mathbf{R}), \text{ alors } H = \text{SO}_n(\mathbf{R}) \text{ ou } H = \text{O}_n(\mathbf{R})}$

6 ▷ On a l'égalité des variables aléatoires : $\det(Z_2) = Y_{1,1}Y_{2,2} - Y_{2,1}Y_{1,2}$.

On remarque $Y_{1,1}Y_{2,2}$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et $(Y_{1,1}Y_{2,2} = 1) = (Y_{1,1} = 1, Y_{2,2} = 1)$.

Ainsi par indépendance $P(Y_{1,1}Y_{2,2} = 1) = P(Y_{1,1} = 1) P(Y_{2,2} = 1) = p^2$.

donc $Y_{1,1}Y_{2,2} \sim \mathcal{B}(p^2)$ et de même $Y_{2,1}Y_{1,2} \sim \mathcal{B}(p^2)$. Ainsi

$$(Z_2 \in \text{GL}_2(\mathbf{R})) = (Y_{1,1}Y_{2,2} \neq Y_{2,1}Y_{1,2}) = (Y_{1,1}Y_{2,2} = 0, Y_{2,1}Y_{1,2} = 1) \bigcup (Y_{1,1}Y_{2,2} = 1, Y_{2,1}Y_{1,2} = 0)$$

Par union disjointe et comme $Y_{1,1}Y_{2,2} \perp Y_{2,1}Y_{1,2}$ selon le lemme des koalas, on a :

$$P(Z_2 \in \text{GL}_2(\mathbf{R})) = P(Y_{1,1}Y_{2,2} = 0) P(Y_{2,1}Y_{1,2} = 1) + P(Y_{1,1}Y_{2,2} = 1) P(Y_{2,1}Y_{1,2} = 0)$$

$$\text{Ainsi } P(Z_2 \in \text{GL}_2(\mathbf{R})) = 2p^2(1 - p^2)$$

On remarque que Z_n est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ (matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$. On note $1_M = \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid m_{i,j} = 1\}$ et $\delta(M) = |1_M|$ de sorte que

$$(Z_n = M) = \left(\bigcap_{(i,j) \in 1_M} (Y_{i,j} = 1) \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{(i,j) \notin 1_M \\ 1 \leq i,j \leq n}} (Y_{i,j} = 0) \right)$$

Par indépendance des $Y_{i,j}$, on a alors

$$P(Z_n = M) = \left(\prod_{(i,j) \in 1_M} P(Y_{i,j} = 1) \right) \left(\prod_{(i,j) \notin 1_M} P(Y_{i,j} = 0) \right) = p^{\delta(M)} (1 - p)^{n^2 - \delta(M)}$$

De plus $M \in O_n(\mathbf{R})$ si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Ainsi $M \in O_n(\mathbf{R})$ si et seulement si chacune des ses lignes et de ses colonnes contient un unique 1 (et 0 ailleurs).

Donc si $M \in O_n(\mathbf{R})$, alors $\delta(M) = n$ et donc $P(Z_n = M) = p^n(1 - p)^{n^2 - n}$.

On note $P_n = \mathcal{M}_n(\{0, 1\}) \cap O_n(\mathbf{R})$ et on a $|P_n| = n!$ car pour construire une matrice de P_n , on a n choix pour positionner le 1 de la première colonne, $n - 1$ pour la deuxième, puis $\dots n - i + 1$ pour la colonne $i \dots$ Alors

$$P(Z_n \in O_n(\mathbf{R})) = P\left(\bigcup_{M \in P_n} (Z_n = M)\right) = \sum_{M \in P_n} P(Z_n = M) = |P_n| \cdot P(Z_n = I_n)$$

$$\text{On peut conclure que } P(Z_n \in O_n(\mathbf{R})) = n!p^n(1 - p)^{n^2 - n}$$

On note $R_n = \mathcal{M}_n(\{0, 1\}) \cap \text{SO}_n(\mathbf{R})$ et $N_n = P_n \setminus R_n$ on a donc l'union disjointe : $N_n \cup R_n = P_n$.

On considère l'application $\sigma : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui a une matrice $M = (C_1 \mid C_2 \mid C_3 \mid \dots \mid C_n)$ (écrite en colonnes) associe $(C_2 \mid C_1 \mid C_3 \mid \dots \mid C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Alors σ est une bijective et $\sigma(R_n) = N_n$ donc $|R_n| = |N_n|$ puis $|R_n| = |P_n|/2$.

$$\text{Ce qui permet de conclure que } P(Z_n \in \text{SO}_n(\mathbf{R})) = P(Z_n \in R_n) = \frac{n!p^n(1 - p)^{n^2 - n}}{2}$$

7 ▷ Si $x = y$, on dispose de H hyperplan de $\mathbf{R}^n$ tel que $x \in H$.

On considère ρ réflexion d'hyperplan H et A la matrice de ρ dans la base canonique de $E = \mathbf{R}^n$.

Alors $Ax = \rho(x) = x = y$.

Si $x \neq y$, on note $n = y - x$.

Alors $n \neq 0$ et on note $H = n^\perp$ de sorte que H est hyperplan de $\mathbf{R}^n$.

On considère ρ la réflexion d'hyperplan H et A sa matrice dans la base canonique.

De plus en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit scalaire de E , on a

$$\langle n, x + y \rangle = \langle x - y, x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

Ainsi $(x + y) \perp n$ d'où $x + y \in H$ et $x - y \in H^\perp$ ainsi

$$Ax = \rho(x) = \rho\left(\frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)\right) = \frac{1}{2}\rho(x + y) + \frac{1}{2}\rho(x - y) = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y) = y$$

Dans tous les cas il existe une matrice de réflexion A telle que $Ax = y$ dès que $\|x\| = \|y\|$.

8 ▷ Dans un premier temps, on note $y_1 = Gx$ et $x_1 = \|Gx\| \cdot x$. De sorte que

$$\|x_1\| = \|Gx\| \cdot \|x\| = \|Gx\| \cdot 1 = \|y_1\|$$

La question **7** nous fournit une matrice de réflexion A tel que $Ax_1 = y_1$.

Ainsi $A \in O_n(\mathbf{R})$ et donc $A \in \mathcal{G}$ et $A\|Gx\| \cdot x = Gx$.

Donc $\|Gx\| \cdot x = AGx$ car $A^2 = I_n$ (une réflexion est une symétrie vectorielle).

En posant $G_1 = AG$, on a $G_1 \in \mathcal{G}$ car $(\mathcal{G}, \times)$ groupe et $\|Gx\|^1 \cdot x = G_1x$.

Pour $p \in \mathbf{Z}$, on pose $G_p = (G_1)^p$. Alors $G_p \in \mathcal{G}$ (groupe).

Par récurrence immédiate on a

$$\forall k \in \mathbf{N}, G_k x = \|Gx\|^k \cdot x$$

Soit $m \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, on a $-m \in \mathbf{N}$ donc $G_{-m}x = \|Gx\|^{-m} \cdot x$ puis $\|Gx\|^m \cdot x = (G_{-m})^{-1}x$

or $(G_{-m})^{-1} = (G_1)^{+m} = G_m$. Ainsi $G_mx = \|Gx\|^m \cdot x$.

Ainsi pour tout $p \in \mathbf{Z}$, il existe $G_p \in \mathcal{G}$ tel que : $G_px = \|Gx\|^p \cdot x$

9 ▷ Soit $G \in \mathcal{G}$. Il suffit de montrer que $G \in O_n(\mathbf{R})$ c'est à dire $\forall x \in E, \|x\| = 1 \implies \|Gx\| = 1$.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|Gx\| \neq 1$.

La question **8** nous fournit alors $(G_p)_{p \in \mathbf{Z}}$, famille de $\mathcal{G}$ telle que $\forall p \in \mathbf{Z}, G_px = \|Gx\|^p \cdot x$

En notant $r = \|Gx\|$, on a $\|G_px\| = \|Gx\|^p \cdot \|x\| = r^p$ d'où $\|G_p\| \geq r^p$.

Si $r > 1$, alors $\|G_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ par théorème d'encadrement.

Si $r < 1$, alors $\|G_p\| \xrightarrow{p \rightarrow -\infty} +\infty$ par théorème d'encadrement.

Ainsi $\mathcal{G}$ n'est pas bornée donc non compact ce qui est absurde.

Cela permet de conclure que $\mathcal{G} = O_n(\mathbf{R})$

Autre méthode : on considère l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbf{R}_*^+ \\ G & \longmapsto & \|Gx\| \end{array}$. Cette application numérique est continue par composition et $\mathcal{G}$ est compact, ainsi f est bornée. Donc la famille $(G_px)_{p \in \mathbf{Z}}$ aussi ...

II. Calcul différentiel sur $O_n(\mathbf{R})$ et $SL_n(\mathbf{R})$

10 ▷ L'application f est polynomiale par composantes donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Soit M et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a

$$f(M+H) = (M+H)^\top (M+H) = M^\top M + H^\top M + M^\top H + H^\top H$$

L'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ $X \mapsto X^\top$ est continue car $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) < +\infty$.

Cela nous fournit $K > 0$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), |||X^\top||| \leq K |||X|||$.

Ainsi $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), |||H^\top H||| \leq K |||H|||^2$. Ainsi

$$f(M+H) = f(M) + H^\top M + M^\top H + o_{H \rightarrow 0}(H) \text{ et } (H \mapsto H^\top M + M^\top H) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $df(M) : H \mapsto H^\top M + M^\top H$ en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

11 ▷ Soit $H \in T$. On dispose alors de $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$.

On a $\forall h \in]-\varepsilon; \varepsilon[, I_n = \gamma(h)^\top \gamma(h) = f \circ \gamma(h)$.

Ainsi $f \circ \gamma$ est dérivable sur $]-\varepsilon; \varepsilon[$ et $\forall h \in]-\varepsilon; \varepsilon[, (f \circ \gamma)'(h) = 0$.

De plus par formule de dérivation du cours, et à l'aide de **10**, on a

$$(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = df(I_n) \cdot H = H^\top I_n + I_n^\top H = H^\top + H$$

ainsi $H^\top + H = 0$ donc H est antisymétrique.

Ainsi T est inclus dans l'ensemble des matrices antisymétriques

12 ▷ Soit H_1 et $H_2 \in T$. On dispose alors de $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \gamma_1 :]-\varepsilon_1; \varepsilon_1[\rightarrow O_n(\mathbf{R}), \gamma_2 :]-\varepsilon_2; \varepsilon_2[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ dérivables en 0 vérifiant $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = I_n$ et $\gamma_1'(0) = H_1$ et $\gamma_2'(0) = H_2$.

On pose $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $\gamma : t \in]-\varepsilon; \varepsilon[\mapsto \gamma_1(t)\gamma_2(t)$.

Alors $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ est bien définie car $O_n(\mathbf{R})$ est un groupe.

De plus $\gamma(0) = \gamma_1(0)\gamma_2(0) = I_n^2 = I_n$ et γ est dérivable en 0 et

$$\gamma'(0) = \gamma_1(0)\gamma_2'(0) + \gamma_1'(0)\gamma_2(0) = I_n H_2 + H_1 I_n = H_1 + H_2$$

Ainsi $H_1 + H_2 \in T$ et T est stable par somme

Pour montrer que T possède une structure d'espace vectoriel, il suffit de montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On sait déjà que $T \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que T est stable par $+$.

Par exemple, en prenant $\varepsilon = 1$ et $\gamma_0 : t \in]-1; 1[\mapsto I_n \in O_n(\mathbf{R})$.

Alors γ_0 dérivable en 0, $\gamma_0(0) = I_n$ et $\gamma_0'(0) = 0$.

Ce qui prouve que $0 \in T$.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $H \in T$. Il reste à établir $\lambda H \in T$. (le cas $\lambda = 0$ venant d'être traité).

On dispose $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow O_n(\mathbf{R})$ dérivable en 0 vérifiant $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = H$.

On pose $\eta = \varepsilon/|\lambda|$ de sorte que $\eta > 0$ et

$$\psi : \begin{cases}]-\eta; \eta[& \longrightarrow O_n(\mathbf{R}) \\ t & \longmapsto \gamma(\lambda t) \end{cases}$$

Alors $\eta > 0$ et ψ est bien définie, dérivable en 0 et $\psi(0) = \gamma(0) = I_n$ et $\psi'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda H$.

Ainsi $\lambda H \in T$.

donc T possède une structure d'espace vectoriel

13 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Par propriétés de la transposition, on a

$$\forall N \in \mathbf{N}, \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k \right)^\top = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (M^\top)^k$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^M \text{ et } \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} (M^\top)^k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^{M^\top}.$$

Or la transposition est continue (vu en 10), ainsi $\left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} M^k \right)^\top \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \exp(M)^\top$.

Par unicité de la limite on a $\exp(M^\top) = \exp(M)^\top$.

On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a vu en 11 que $T \subset \mathcal{A}_n$.

Soit $A \in \mathcal{A}_n$. On définit $\gamma : t \mapsto e^{tA}$.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Comme $-tA$ et tA commutent et $A^\top = -A$, alors on a

$$\gamma(t)^\top \gamma(t) = e^{tA^\top} e^{tA} = e^{-tA} e^{tA} = e^{-tA+tA} = e^0 = I_n$$

Ainsi $1 > 0$, $\gamma([-1; 1]) \subset O_n(\mathbf{R})$ et $\gamma(0) = I_n$.

De plus selon le cours, γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma' : t \mapsto Ae^{tA}$.

Ainsi γ est dérivable en 0 et $\gamma'(0) = Ae^0 = AI_n = A$. D'où $A \in T$.

Ainsi l'ensemble T est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

14 ▷ Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a pose $M_k = \text{diag}(k, 1/k, 1, \dots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sorte que $\det(M_k) = 1$ et ainsi $M_k \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ or

$$g(M_k) = \text{tr}(M_k^\top M_k) = \text{tr}(\text{diag}(k^2, 1/k^2, 1, \dots, 1)) = k^2 + 1/k^2 + n - 2 \geq k^2$$

Ainsi $g(M_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi g n'est pas majorée sur $\text{SL}_n(\mathbf{R})$

donc la restriction de g à $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ ne possède pas de maximum global

15 ▷ Les applications g et $\det$ sont polynomiales sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Ainsi g et $\det$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Je note le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ $(X, Y) \mapsto \text{tr}(X^\top Y) = \langle X, Y \rangle$.

Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Quand $H \rightarrow 0$, on a

$$g(M+H) = \langle M+H, M+H \rangle = \langle M, M \rangle + 2\langle M, H \rangle + \langle H, H \rangle = g(M) + 2\langle M, H \rangle + o(H)$$

Ainsi $\nabla g(M) = 2M$

On fixe $\mathcal{E} = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où les $E_{i,j} = (\delta_{i,\ell} \delta_{j,k})_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$.

On rappelle $\mathcal{E}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. On va calculer les dérivées partielles de $\det$ dans cette base. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On pose $\varphi_{i,j} : t \mapsto \det(M + tE_{i,j})$.

On considère $M'_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ identique à la matrice M sauf pour la j -ème colonne qui a été remplacée par la colonne où tout les coefficients valent 0 sauf le i -ème qui vaut 1.

On note également $\tilde{M}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ la matrice M à laquelle on a retiré la i -ème ligne et la j -ème colonne et enfin $\text{Com}(M) = (\gamma_{\ell,k})_{\substack{1 \leq \ell \leq n \\ 1 \leq k \leq n}}$. On rappelle que $\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{M}_{i,j})$.

Par linéarité par rapport à la j -ème colonne, puis en développant par rapport à cette colonne, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}, \det(M + tE_{i,j}) = \det(M) + t \det(M'_{i,j}) = \det(M) + t(-1)^{i+j} \det(\tilde{M}_{i,j}) = \det(M) + t\gamma_{i,j}$$

Ainsi $\frac{d \det(M + tE_{i,j})}{dt} = \gamma_{i,j}$ donc la dérivée partielle de $\det$ en M selon la composante (i, j) est $\gamma_{i,j}$.

Ainsi la coordonnée de $\nabla \det(M)$ sur $E_{i,j}$ est $\gamma_{i,j}$ donc $\nabla \det(M) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \gamma_{i,j} E_{i,j} = \text{Com}(M)$

16 ▷ On a $\text{SL}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) - 1 = 0\}$. On sait que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\nabla \det(M) = \text{Com}(M)$ et $\nabla \det(M) \neq 0$ car $M\text{Com}(M)^\top = \det(M)I_n = I_n \neq 0$.

La fonction g est également $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et sa restriction à $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ admet un extremum local en M . Ainsi le théorème d'optimisation sous contrainte, nous fournit $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\nabla g(M) = \mu \nabla \det(M)$.

Par conséquent, selon **15**, $\mu \cdot \text{Com}(M) = 2M$ d'où il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $M = \lambda \cdot \text{Com}(M)$

De plus comme $M \neq 0$, on a $\lambda \neq 0$ et $\text{Com}(M) = (1/\lambda)M$. Ainsi

$$I_n = M\text{Com}(M)^\top = (1/\lambda)MM^\top \text{ puis } MM^\top = \lambda I_n$$

En passant au déterminant, on obtient $\lambda^n = \det(M) \det(M^\top) = \det(M)^2 = 1$ donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Le coefficient en position $(1, 1)$ de $\lambda I_n = MM^\top$ est $\lambda = \sum_{j=1}^n M_{1,j}^2 \geq 0$ donc $\lambda = 1$.

donc $MM^\top = I_n$ puis $M \in O_n(\mathbf{R})$ or $\det(M) = 1$ d'où $M \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$

17 ▷ L'application g est minorée par 0 sur $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ qui est non vide.

Cela nous assure l'existence de $m = \inf_{\text{SL}_n(\mathbf{R})} g$.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on dispose alors de $(A_p)_p$ suite à valeurs dans $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ telle que $(g(A_p))_p$ converge vers m .

Ainsi $(\sqrt{g(A_p)})_p$ converge et $\sqrt{g}$ est la norme euclidienne donc la suite $(A_p)_p$ est bornée dans l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui nous fournit une extractrice φ telle que $\Lambda \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $(A_{\varphi(p)})_p$ converge vers Λ .

Or $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée car $\text{SL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est fermé ainsi $\Lambda \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ et $(g(A_{\varphi(p)}))_p$ converge vers $g(\Lambda)$ par continuité de g .

Par unicité de la limite $g(\Lambda) = m = \inf_{\text{SL}_n(\mathbf{R})} g$.

D'où $\Lambda \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$ selon 16.

Puis $g(\Lambda) = \text{tr}(\Lambda^\top \Lambda) = \text{tr}(I_n) = n$. De façon analogue $\forall \Omega \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$, $g(\Omega) = n$ or $\text{SO}_n(\mathbf{R}) \subset \text{SL}_n(\mathbf{R})$ donc

la restriction de g à $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum global qui vaut n , atteint en tout point de $\text{SO}_n(\mathbf{R})$

III. Morphismes continus de $\mathbf{U}$ dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$

18 ▷ Soit G un sous groupe borné de $\mathbf{R}^*$. Par l'absurde on suppose qu'il existe $x \in G \setminus \{-1, 1\}$ alors $x^2 \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. D'où comme en **9**, $(x^{2p})_{p \in \mathbf{Z}} = ((x^2)^p)_{p \in \mathbf{Z}}$ est une famille non bornée d'éléments de G . Absurde.

On a montré que $G \subset \{-1, 1\}$. Ainsi les sous-groupes bornés du groupe multiplicatif $\mathbf{R}^*$ sont $\{1\}$ ou $\{-1, 1\}$

$\psi = \det \circ \varphi : \text{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^*$ est alors un morphisme continu de groupes multiplicatifs par composition.

Comme $\mathbf{U}$ est compact et connexe par arcs, alors $\psi(\mathbf{U})$ est compact et connexe par arcs par continuité de ψ .

Comme ψ est un morphisme, $\psi(\mathbf{U})$ est sous groupe de $\mathbf{R}^*$ borné car compact.

Or $\psi(\mathbf{U}) \neq \{-1, 1\}$ car $\{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs. Ainsi $\forall z \in \mathbf{U}$, $\psi(z) = \det(\varphi(z)) \in \{1\}$

d'où $\forall z \in \mathbf{U}$, $\varphi(z) \in \text{SL}_n(\mathbf{R})$ donc $\varphi(\mathbf{U}) \subset \text{SL}_n(\mathbf{R})$

19 ▷ Dans cet question, on prolonge l'application φ à l'arrivée : $F : \begin{cases} \mathbf{U} & \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \\ z & \longmapsto \varphi(z) \end{cases}$.

Comme $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mapsto M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est aussi est un morphisme de groupes continu, alors par composition F est un morphisme continu de groupes de $\mathbf{U}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Ainsi $F(\mathbf{U})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Il s'agit donc d'une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(\varphi(z)) = \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(F(z))$. Alors on dispose de $x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $F(z)x = \lambda x$.

Comme $F(z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, alors $\det(F(z)) \neq 0$ d'où $\lambda \neq 0$ et on a

$$\forall k \in \mathbf{Z}, F(z^k) \cdot x = F(z)^k \cdot x = \lambda^k \cdot x$$

En munissant $\mathbf{C}^n$ d'une norme notée N , et en notant N_{op} la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\forall k \in \mathbf{Z}, |\lambda|^k \cdot N(x) = N(\lambda^k \cdot x) = N(F(z^k) \cdot x) \leq N_{op}(F(z^k)) N(x)$$

Comme $F(\mathbf{U})$ est bornée, on dispose de $M \geq 0$ tel que $\forall A \in F(\mathbf{U}), N_{op}(A) \leq M$. Or $x \neq 0$ donc

$$\forall k \in \mathbf{Z}, |\lambda|^k \leq M$$

Par conséquent $|\lambda| = 1$ ie $\lambda \in \mathbf{U}$. On a bien $\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(\varphi(z)) \subset \mathbf{U}}$

20 ▷ L'application $\Lambda : x \mapsto e^{ix}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(\mathbf{C}^*, \times)$ d'image $\mathbf{U}$ et $\varphi : (\mathbf{U}, \times) \longrightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$ est un morphisme de groupes.

Par conséquent $\Psi = \varphi \circ \Lambda : (\mathbf{R}, +) \longrightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$ est un morphisme de groupes.

Ainsi $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)}$

21 ▷ On reprend $\Lambda : x \mapsto e^{ix}$ de 20 et Λ est continue sur $\mathbf{R}$. Ainsi $\Psi = \varphi \circ \Lambda$ est continue sur $\mathbf{R}$ par composition.

Donc $F : x \in \mathbf{R} \mapsto \int_0^x \Psi$ est la primitive de Ψ sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0 et $F' = \psi$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Ainsi $\boxed{F \text{ est une application } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}}$

L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\mathbf{R}^*)$ et $\mathbf{R}^*$ est ouvert.

Ainsi $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$ d'où $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est fermé.

Par l'absurde, on suppose que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [-\alpha; \alpha] \setminus \{0\}$ tel que $F(x)$ ne soit pas inversible.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Comme $1/p > 0$, on dispose de $x_p \in [-1/p; 1/p] \setminus \{0\}$ tel que $F(x_p)$ ne soit pas inversible.

Selon les gendarmes, on a $x_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ ainsi

$$\frac{F(x_p)}{x_p} = \frac{F(x_p) - F(0)}{x_p - 0} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} F'(0) = \Psi(0)$$

Or $\forall p \in \mathbf{N}^*, \frac{F(x_p)}{x_p} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ car $\det\left(\frac{F(x_p)}{x_p}\right) = \frac{\det(F(x_p))}{x_p^n} = 0$.

Ainsi $\varphi(1) = \Psi(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ qui est fermé. Absurde

Ainsi $\boxed{\text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que } F(x) \text{ est inversible si } x \in [-\alpha; \alpha] \setminus \{0\}}$

22 ▷ Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $M \mapsto \Psi(x)M$ est linéaire, on a

$$\Psi(x)F(\alpha) = \Psi(x) \int_0^\alpha \Psi(t)dt = \int_0^\alpha \Psi(x)\Psi(t)dt = \int_0^\alpha \Psi(x+t)dt = \int_x^{x+\alpha} \Psi(u)du$$

On a effectué le changement de variable $u = x + t$; $du = dt$.

Comme de plus $F(\alpha) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ selon 21, alors $\boxed{\Psi(x) = \left(\int_x^{x+\alpha} \Psi(t)dt \right) (F(\alpha))^{-1}}$

Selon Chasles, on a $\Psi : x \mapsto (F(x+\alpha) - F(x)) (F(\alpha))^{-1}$ or F est $\mathcal{C}^1$

donc par théorème d'opérations, $\boxed{\Psi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}}$ et $\Psi' : x \mapsto (\Psi(x+\alpha) - \Psi(x)) (F(\alpha))^{-1}$.

23 ▷ Ainsi selon 20 et 22, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \Psi'(x) = (\Psi(x)\Psi(\alpha) - \Psi(x)) (F(\alpha))^{-1} = \Psi(x) (\Psi(\alpha) - I_n) (F(\alpha))^{-1}$$

Alors comme Ψ est un morphismes de groupes alors $\Psi(0) = I_n$ d'où

$$M = \Psi'(0) = \Psi(0) (\Psi(\alpha) - I_n) (F(\alpha))^{-1} = (\Psi(\alpha) - I_n) (F(\alpha))^{-1}$$

Ainsi Ψ et $x \mapsto \exp(xM)$ sont solutions sur $\mathbf{R}$ du même problème de Cauchy linéaire en Y :

$$\begin{cases} Y' = Y \cdot M \\ Y(0) = I_n \end{cases}$$

On peut conclure $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = \varphi(e^{ix}) = \exp(xM)}$

IV. Morphismes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbf{R}), \times)$

24 ▷ On dispose de $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $PAP^{-1} = B$ d'où $PA = BP$.

On peut écrire $P = R + iI$ avec R et $I \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Ainsi $RA + iIA = BR + iBI$.

Par unicité des parties réelle et imaginaire, on a $RA = BR$ et $IA = BI$.

Par combinaison linéaire, on a $\forall x \in \mathbf{R}, (R + xI)A = B(R + xI)$.

La fonction $p : z \mapsto \det(R + xI)$ est polynomiale non nulle et $p(i) = \det(P) \neq 0$.

Ainsi le polynôme associé admet un nombre fini de racines, ce qui nous fournit $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $p(x_0) \neq 0$.

On note $Q = R + x_0I$ de sorte que

$$Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ et } QA = BQ \text{ et } \det(Q) = \det(R + x_0I) = p(x_0) \neq 0$$

Ainsi $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ et $A = Q^{-1}BQ$.

donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R})}$

25 ▷ On note p l'indice de nilpotence de N alors $p \in \mathbf{N}^*$, $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

On dispose alors de $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $N^{p-1}x \neq 0$ et $N^p x = 0$.

De plus, on a $p \geq 2$ car $N \neq 0$.

Ainsi $N^{p-2}x \in \text{Ker } N^2$ mais $N^{p-2}x \notin \text{Ker } N$.

D'où $\boxed{\ker(N) \neq \ker(N^2)}$

26 ▷ Selon **23**, on a

$$\exp(2\pi M) = \varphi(e^{i2\pi}) = \varphi(1)$$

Comme φ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{U}, \times)$ vers $(GL_n(\mathbf{R}), \times)$, alors $\boxed{\exp(2\pi M) = I_n}$

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$. On dispose alors de $x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Mx = \lambda x$ d'où $(2\pi M)x = (2\pi\lambda)x$.

Ainsi selon le cours

$$x = I_n x = \exp(2\pi M)x = e^{2\pi\lambda}x$$

Comme $x \neq 0$, alors $e^{2\pi\lambda} = 1$ d'où $2\pi\lambda \in 2\pi i\mathbf{Z}$.

On en déduit que $\boxed{\text{Sp}_{\mathbf{C}}(M) \subset i\mathbf{Z} = \{ik, k \in \mathbf{Z}\}}$

27 ▷ Comme $\chi_M(X) \in \mathbf{C}[X]$, alors d'après d'Alembert-Gauss, $\chi_M(X)$ y est scindé. On peut donc appliquer le cours sur les sous-espaces caractéristiques.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de M de multiplicités respectives : $p_1, \dots, p_r \in \mathbf{N}^*$.

La matrice M est alors semblable à une matrice diagonale par blocs $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ où pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\Delta_i = \lambda_i I_{p_i} + T_i$ où T_i est une matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbf{C})$.

On note alors $D = \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1}, \dots, \lambda_r I_{p_r})$ et $N = \text{diag}(T_1, \dots, T_r)$.

Alors M est semblable à $\Delta = D + N$ et D est diagonale et N est nilpotente car triangulaire stricte et par calcul par blocs :

$$D \cdot N = \text{diag}(\lambda_1 I_{p_1} \cdot T_1, \dots, \lambda_r I_{p_r} \cdot T_r) = \text{diag}(T_1 \cdot \lambda_1 I_{p_1}, \dots, T_r \cdot \lambda_r I_{p_r}) = N \cdot D$$

De plus $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \bigcup_{i=1}^r \text{Sp}_{\mathbf{C}}(\lambda_i I_{p_i}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$. Ainsi

$$\boxed{M \text{ est semblable dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \text{ à } D + N \text{ où } D \text{ diagonale, } N \text{ nilpotente, } DN = ND \text{ et } \text{Sp}_{\mathbf{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)}$$

28 ▷ On montre facilement que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \text{Sp}_{\mathbf{C}}(2\pi A) = \{2\pi\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{C}}(A)\}$.

Ainsi $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(2\pi D) = \text{Sp}_{\mathbf{C}}(2\pi M)$ avec **27**.

Selon **26**, on a alors $\text{Sp}_{\mathbf{C}}(2\pi D) \subset \{2\pi i k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

On peut alors écrire $2\pi D = \text{diag}(2\pi i k_1, \dots, 2\pi i k_n)$, où $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$, on a alors

$$\exp(2\pi D) = \text{diag}(e^{2\pi i k_1}, \dots, e^{2\pi i k_n}) = \text{diag}(1, \dots, 1)$$

Ainsi $\boxed{\exp(2\pi D) = I_n}$

Selon 27, on a : $(2\pi D)(2\pi N) = (2\pi N)(2\pi D)$ et on dispose de $P \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $D + N = P^{-1}MP$ donc

$$\exp(2\pi N) = \exp(2\pi D) \exp(2\pi N) = \exp(2\pi D + 2\pi N) = \exp(P^{-1}(2\pi M)P) = P^{-1} \exp(2\pi M)P$$

D'où selon 26, on a $\boxed{\exp(2\pi N) = P^{-1}I_n P = I_n}$

On note $\nu \in \mathbf{N}^*$ l'indice de nilpotence de $(2\pi N)$ ie $(2\pi N)^\nu = 0$ et $(2\pi N)^{\nu-1} \neq 0$.

Alors le polynôme minimal de $2\pi N$ est $\pi_{2\pi N} = X^\nu$ d'où $((2\pi N)^k)_{0 \leq k \leq \nu-1}$ est une base de $\mathbf{C}[(2\pi N)]$ selon le cours or

$$I_n = e^{2\pi N} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (2\pi N)^k = I_n + \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{1}{k!} (2\pi N)^k + 0$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{1}{k!} (2\pi N)^k = 0$. Avec la liberté de $((2\pi N)^k)_{0 \leq k \leq \nu-1}$, on a $\forall k \in \llbracket 1, \nu-1 \rrbracket, \frac{1}{k!} = 0$.

Ainsi $\llbracket 1, \nu-1 \rrbracket = \emptyset$ donc $\nu = 1$ puis $\boxed{N \text{ est nulle}}$ car $2\pi \neq 0$.

29 ▷ D'après les questions 27 et 28, la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

De plus, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ car $M = \Psi'(0)$ selon 23 et $\Psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Comme $\chi_M \in \mathbf{R}[X]$, alors les valeurs propres non réelles de M sont conjuguées deux à deux.

À l'aide de 26, il existe $p \in \mathbf{N}$ et $k_1, \dots, k_p \in \mathbf{N}^*$ tels que la matrice M soit semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ à une matrice de la forme :

$$\mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$$

On dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $M = P \mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0) P^{-1}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $\Psi(x) = e^{xM} = P \exp[\mathrm{diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_p, -ik_p, 0, \dots, 0)] P^{-1}$, d'où

$$\Psi(x) = P \mathrm{diag}\left(e^{ixk_1}, e^{-ixk_1}, \dots, e^{ixk_p}, e^{-ixk_p}, 1, \dots, 1\right) P^{-1}$$

En continuant les calculs de **1**, pour $\theta \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(R_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

Après calcul au brouillon, en notant $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ on a $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ et $R_\theta = S \mathrm{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) S^{-1}$.

Alors on note $L = \mathrm{diag}(S, \dots, S, I_{n-2p})$ diagonale par blocs (avec p occurrences de S) de sorte $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et

$$\Psi(x) = PL \mathrm{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) L^{-1} P^{-1} = PL \mathrm{diag}(R_{xk_1}, \dots, R_{xk_p}, 1, \dots, 1) (PL)^{-1}$$

On a deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ via la matrice $PL \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui est indépendante de x .

En procédant comme en 24, on peut alors construire

$$Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ telle que } \forall x \in \mathbf{R}, \Psi(x) = Q \begin{pmatrix} R_{xk_1} & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & \\ & & R_{xk_p} & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ (0) & & & & & & 1 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

où $p \in \mathbf{N}$ et $k_1, \dots, k_p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ (indépendants de x)

30 ▷ Soit Ψ définie comme précédemment, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \det(\Psi(x)) = \prod_{i=1}^p \det(R_{xk_i}) \times 1^{n-2p} = 1 \neq 0$$

On a bien $\Psi : \mathbf{R} \longrightarrow (\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$

De plus $\theta \mapsto R_\theta$ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ vers $(\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}), \times)$.

Alors par calcul par blocs, on a $\forall x, y \in \mathbf{R}, \Psi(x+y) = \Psi(x) \times \Psi(y)$

Ainsi selon la définition précédente : Ψ est un morphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \times)$