

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts I, 2026, filières PC-PSI.
Version provisoire du 09/05/2026

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Somme d'endomorphismes de carré nul

A Réduction des endomorphismes de carré nul

- (1) Comme u est nilpotent, $\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}}$.

Comme la trace de u est égale à la somme des valeurs propres de u en tenant compte des multiplicités, on a $\boxed{\text{tr}(u) = 0}$.

- (2) Comme $u^2 = 0$, on a $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. De là, $\dim \text{Im}(u) \leq \dim \text{Ker}(u)$ et par le théorème du rang :
- $$n = \dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u) \geq 2r,$$

et donc $\boxed{r \leq n/2}$.

- (3) D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(u) = n - r.$$

Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, on a donc $\dim H = r$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H . On a alors

$$\boxed{E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)}.$$

D'après la forme géométrique du théorème du rang, H étant un supplémentaire du noyau de u ,

$$u|_H : H \rightarrow \text{Im}(u)$$

est un isomorphisme. On en déduit que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$, et en particulier que $\boxed{(u(e_1), \dots, u(e_r)) \text{ est une famille libre}}$.

- (4) La famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une famille libre d'éléments de $\text{Ker}(u)$. On peut donc la compléter en une base

$$(u(e_1), \dots, u(e_r), \beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-r})$$

de $\text{Ker}(u)$. Soit alors

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, u(e_1), \dots, u(e_r), \beta_{r+1}, \dots, \beta_{n-r}).$$

Par supplémentarité de H et de $\text{Ker}(u)$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de E et

$$\boxed{[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0_r & 0_r & 0_{r, n-2r} \\ I_r & 0_r & 0_{r, n-2r} \\ 0_{n-2r, r} & 0_{n-2r, r} & 0_{n-2r} \end{pmatrix}}.$$

- (5) Si u est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_r & 0_{m, n-2m} \\ I_m & 0_m & 0_{m, n-2m} \\ 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m} \end{pmatrix},$$

alors

$$r = \text{rg}(u) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0_m & 0_r & 0_{m, n-2m} \\ I_m & 0_m & 0_{m, n-2m} \\ 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m, m} & 0_{n-2m} \end{pmatrix} = m,$$

ce qui montre $\boxed{\text{l'unicité de } m = r}$.

B Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

(6) Rappelons que

$$E_{i,j}E_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ E_{i,l} & \text{si } j = k. \end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{\forall i \neq j, E_{i,j}^2 = 0}.$$

Puis, comme $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$,

$$\begin{aligned} F_{i,j}^2 &= (E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i})(E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}) \\ &= E_{i,i} + E_{i,j} + E_{j,j} + E_{j,i} - E_{i,j} - E_{i,i} - E_{j,i} - E_{j,j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut aussi observer que les $E_{i,j}$ et les $F_{i,j}$ sont de rang 1 pour $i \neq j$ et de trace nulle et utiliser la formule classique hors-programme

$$v^2 = \text{tr}(v) v$$

valable pour tout endomorphisme v de rang 1.

(7) Comme noyau de la trace, $\mathcal{H}_n$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$. La famille

$$(E_{i,j}, i \neq j; F_{i,n}, 1 \leq i \leq n-1)$$

est une famille d'éléments de $\mathcal{H}_n$, clairement libre (laissé au lecteur) et de cardinal

$$n(n-1) + n-1 = n^2 - 1 = \dim \mathcal{H}_n.$$

C'est donc bien $\boxed{\text{une base de } \mathcal{H}_n}$.

(8) Par linéarité de la trace et (1), on a de suite

$$\Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E) \subset \mathcal{H}(E).$$

Par (6) et (7), on a de suite

$$\mathcal{H}(E) \subset \Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E).$$

Finalement,

$$\boxed{\Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E)}.$$

C Somme de trois endomorphismes de carré nul

(9) Comme $n \geq 5$, on a

$$n-1 > \frac{3n}{4}.$$

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -n+1 \end{pmatrix}$$

vérifie toutes les conditions imposées.

(10) Comme $v^2 = 0$, on a

$$(w-v)^2 = w^2 - w \circ v - v \circ w$$

donc

$$\text{Im}((w-v)^2) \subset \text{Im}(w) + v(\text{Im}(w)).$$

D'après la formule de Grassmann et le théorème du rang, il vient

$$\boxed{\text{rg}((w-v)^2) \leq \dim(\text{Im}(w)) + \dim(v(\text{Im}(w))) \leq 2 \text{rg}(w) < 2(n-3n/4) = n/2}.$$

- (11) Comme $(w-v)^2$ et $w-v$ commutent, $\text{Ker}((w-v)^2)$ est bien stable par $w-v$. Soit h l'endomorphisme induit par $w-v$ sur $\text{Ker}((w-v)^2)$. Comme $h^2 = 0$, (1) implique que

$$\chi_h(X) = X^{\dim \text{Ker}((w-v)^2)}.$$

Or, χ_h divise χ_{w-v} donc il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$\chi_{w-v}(X) = X^{\dim \text{Ker}((w-v)^2)} Q(X).$$

Or,

$$\chi_{u-v}(X) = \chi_{w+\text{id}_E-v}(X) = \chi_{w-v}(X-1) = (X-1)^{\dim \text{Ker}((w-v)^2)} Q(X-1).$$

Ceci montre que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } u-v \text{ de multiplicité } \geq \dim \text{Ker}((w-v)^2) = n - \text{rg}((w-v)^2)}$.

- (12) Comme $-(u-v)$ et $u-v$ sont semblables, ces deux endomorphismes ont le même polynôme caractéristique. D'après (11), 1 est valeur propre de $-(u-v)$ de multiplicité $\geq n - \text{rg}((w-v)^2)$ donc -1 est valeur propre de $u-v$ de multiplicité $\geq n - \text{rg}((w-v)^2)$. En combinant avec (10), on a bien montré que $\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont valeurs propres de } u-v \text{ de multiplicité } \geq n - \text{rg}((w-v)^2) > n/2}$. Ceci est bien sûr absurde, ce qui signifie que $u-v$ n'est pas semblable à $-(u-v)$.
- (13) Supposons par l'absurde que $u \in \Sigma_3\mathcal{C}(E)$. On peut donc écrire

$$u = v_1 + v_2 + v_3$$

avec $v_i \in \mathcal{C}(E)$. De là, $u - v_1 \in \Sigma_2\mathcal{C}(E)$, ce qui signifie, d'après le théorème de Wang et Wu, que $u - v_1$ est semblable à $-(u - v_1)$, contredisant ainsi (12).

D Intermède : matrices de Hessenberg

- (14) La matrice $(\widetilde{xI_n - 1A})^{(k,n)}$ est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} xI_{k-1} - A_{k-1} & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

où A_{k-1} est la matrice extraite de A en supprimant les $n - k + 1$ dernières lignes et $n - k + 1$ dernières colonnes et où T est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est

$$(-a_{k+1,k}, -a_{k+2,k+1}, \dots, -a_{n,n-1}).$$

On en déduit que

$$\boxed{\det \left((\widetilde{xI_n - 1A})^{(k,n)} \right) = (-1)^{n-k} \left(\prod_{j=k+1}^n a_{j,j-1} \right) \chi_{A_{k-1}}(x)}$$

ce qui conclut puisque $\chi_{A_{k-1}}$ est un polynôme unitaire de degré $k-1$.

- (15) En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on a

$$\chi_{A+E_C} = (X - a_{n,n})\chi_{A_{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+n} (a_{k,n} + c_k) P_k(X)$$

et il s'agit de déterminer les c_k de sorte que

$$(X - a_{n,n})\chi_{A_{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+n} (a_{k,n} + c_k) P_k(X) = P = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots$$

On construit les c_k les uns après les autres en identifiant les coefficients de X^n , X^{n-1} , etc (deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients).

Le coefficient de X^n fournit la relation triviale $1 = 1$.

Le coefficient de X^{n-1} donne la relation : $-a_{n,n} - \text{tr}(A_{n-1}) = -\text{tr}(A)$ qui est bien vérifiée.

Le coefficient de X^{n-2} donne la relation

$$\alpha_{n-2} + (-1)^n (a_{n-1,n} + c_{n-1}) a_{n,n-1}$$

où α_{n-2} est le coefficient de X^{n-2} du polynôme $(X - a_{n,n})\chi_{A_{n-1}}$. Comme la matrice est régulière, $a_{n,n-1} \neq 0$, ce qui permet de déterminer c_{n-1} de façon unique.

Les autres coefficients fournissent un système linéaire échelonné (ou triangulaire) en les c_k car les P_k sont de degré $k - 1$. Les coefficients diagonaux de ce système triangulaire sont au signe près les coefficients dominants des P_k .

Comme la matrice A est régulière, la matrice triangulaire de ce système est inversible grâce à (14) ce qui fournit l'existence et l'unicité des c_k et donc de C .

Il est possible que les correcteurs des Mines exigent un argument plus détaillé...je le laisse au lecteur.

Voici un argument bien plus élégant fourni par ma collègue Violaine Strecker.

Comme la matrice est régulière, chaque P_k est de degré $k - 1$. On en déduit que $(P_1, \dots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{n-2}[X]$.

Ecrivons alors

$$(X - a_{n,n})\chi_{A_{n-1}} = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k P_k$$

et

$$P = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k P_k.$$

Comme dit précédemment, les c_k doivent vérifier la relation

$$X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k P_k - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+n} (a_{k,n} + c_k) P_k = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k P_k.$$

On a donc

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \alpha_k - (-1)^{k+n} (a_{k,n} + c_k) = \beta_k,$$

ce qui détermine les c_k de façon unique.

(16) On a

$$J_n + E_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est

$$X^n - \sum_{k=0}^{n-2} c_{k+1} X^k.$$

Ce polynôme est égal à X^n si et seulement si tous les c_k sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si $C = 0$.

On peut aller plus vite en remarquant que $C = 0$ convient et évoquer l'unicité prouvée en (15).

(17) Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

On a $u^0(e_1) = e_1$ puis $u(e_1) = a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2$ puis

$$u^2(e_1) = a_{1,1}u(e_1) + a_{2,1}(a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2 + a_{3,2}e_3).$$

Comme A est de Hessenberg, on montre par récurrence (laissée au lecteur) que pour tout k , il existe $b_{1,k}, \dots, b_{k,k}$ tels que

$$u^k(e_1) = \sum_{j=1}^k b_{j,k} e_j \text{ et } b_{k,k} = \prod_{j=1}^k a_{j+1,j}.$$

La matrice de $(u^0(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est donc triangulaire supérieure à termes diagonaux non nuls (car A est régulière). Elle est donc inversible, ce qui montre que

$$(u^0(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1)) \text{ est bien une base de } E.$$

- (18) Soit A une matrice de Hessenberg, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A . Soient $(e_1, \dots, e_n)$ puis $\mathcal{B} = (u^0(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$ construite en (17).

Par définition de cette base, la matrice $[u]_{\mathcal{B}}$ est de la forme $J_n + E_C + \alpha E_{n,n}$ pour un vecteur $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ et un $\alpha \in \mathbb{C}$.

Comme $\chi_u = X^n$, on a en particulier $\text{tr}(u) = \alpha = 0$. Ainsi, A est semblable à $J + E_C$. Mais comme $\chi_u = X^n$, $\chi_{J_n + E_C} = X^n$, ce qui implique grâce à (15) que $C = 0$ et finalement que

$$A \text{ est semblable à } J_n.$$

E Somme de quatre endomorphismes de carré nul

- (19) La matrice $A + V$ est de Hessenberg et régulière (sa sous-diagonale a tous ses termes égaux à 1 sauf celui situé sur la dernière ligne qui vaut $a_{n,n-1} \neq 0$) et de trace nulle.

D'après (15), il existe un unique $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $A + V + E_{C_0}$ ait pour polynôme caractéristique X^n .

Comme $A + V + E_{C_0}$ est encore de Hessenberg et régulière, (18) implique que

$$A + V + E_{C_0} \text{ est semblable à } J_n.$$

- (20) Soit B_1 la matrice obtenue à partir de J_n en passant à 0 les 1 situés sur les colonnes paires C_2, C_4 , etc et soit B_2 la matrice obtenue à partir de J_n en passant à 0 les 1 situés sur les colonnes impaires C_1, C_3 , etc.

On a bien $B_1 + B_2 = J_n$ et $B_1^2 = B_2^2 = 0$ (évident si on raisonne en terme d'endomorphismes canoniquement associés à B_1 et à B_2 ou en remarquant que $\text{Im}(B_i) \subset \text{Ker}(B_i)$).

En taille 3 et 4, ceci donne

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (21) L'idée est analogue : pour B_1 (respectivement pour B_2), on procède comme dans la question précédente et on modifie aussi la dernière colonne de $V + E_C$ en passant à 0 les coefficients de C situés sur des lignes impaires (respectivement paires). En taille 3 et 4, ceci donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (22) Si tout vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$ est vecteur propre de v , il est bien connu que v est une homothétie, ce qui est exclu par l'énoncé.

Si v possède au moins deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 , soient X_1 et X_2 deux vecteurs propres associés. Alors $F = \text{Vect}(X_1, X_2)$ est un plan v -stable contenant le vecteur $X_1 + X_2$ qui n'est pas un vecteur propre de v .

Reste à traiter le cas où v possède une unique valeur propre λ mais n'est pas une homothétie. Alors $v - \lambda \text{id}_E$ est nilpotent. Soit $N \geq 2$ son indice de nilpotence et soit $X \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$(v - \lambda \text{id}_E)^{N-1}(X) \neq 0.$$

Posons

$$F = \text{Vect}((v - \lambda \text{id}_E)^{N-2}(X), (v - \lambda \text{id}_E)^{N-1}(X)).$$

La famille $((v - \lambda \text{id}_E)^{N-2}(X), (v - \lambda \text{id}_E)^{N-1}(X))$ est libre (immédiat en revenant à la définition et en appliquant $v - \text{id}_E$) donc F est un plan, clairement stable par v et contenant le vecteur $(v - \lambda \text{id}_E)^{N-2}(X)$ qui n'est pas un vecteur propre de v .

L'énoncé suggère un argument un peu différent.

- (23) Soit M une matrice qui n'est pas de la forme λI_n et soit v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé. Soit F un plan v -stable et possédant un vecteur X_1 qui n'est pas un vecteur propre de v . Soit $\mathcal{B} = (X_1, v(X_1), X_3, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ obtenue en complétant la famille libre $(X_1, v(X_1))$. Alors $[v]_{\mathcal{B}}$ est de la forme

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ et } A_3 \in M_{n-2}(\mathbb{C}).$$

Comme A_3 est trigonalisable, il existe $P \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}A_3P = C \in T_{n-2}^+(\mathbb{C})$. Posons

$$Q = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

La matrice Q est inversible et un calcul par blocs donne

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} B & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} B & (**) \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Au final,

$$\boxed{M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} B & (**) \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \text{ et } C \in T_{n-2}^+(\mathbb{C}),}$$

ce qui montre un résultat légèrement plus précis que ce qui est demandé.

- (24) *Avertissement : l'argument que je propose ci-dessous n'est pas au programme de la filière PSI et j'imagine que le concepteur du sujet traite (24) en utilisant (23). Je remercie Olivier Méjane et Olivier Decultot qui m'ont signalé une erreur dans une version préliminaire de ce corrigé.*

Il est classique que si M est une matrice réelle de taille n , si V est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par M , alors $V^\perp$ est M^T -stable où l'orthogonal est pris pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous allons utiliser, sans démonstration, un résultat analogue pour des matrices complexes.

Soit $M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$. Considérons la matrice adjointe $M^* = \overline{M}^T$. D'après (22), il existe un plan M^* -stable et son orthogonal pour le produit hermitien canonique

$$(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$$

sur $\mathbb{C}^n$ est un sous-espace M -stable de dimension $n - 2$.

On en déduit que M est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in M_{n-2}(\mathbb{C}) \text{ et } B \in M_2(\mathbb{C}).$$

Comme A est trigonalisable, il existe $P \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T \in T_{n-2}^+(\mathbb{C})$. Comme dans (23), on en déduit que M est semblable à

$$\begin{pmatrix} T & (\star\star) \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

qui est par construction presque triangulaire supérieure.

- (25) Soit M de trace nulle.

Si $M = 0$, il n'y a rien à dire.

Sinon, M n'est pas une homothétie donc d'après (24), M est semblable à une matrice A presque triangulaire supérieure, ce que l'on écrit $M = QAQ^{-1}$.

D'après (19), il existe C_0 et P inversible tels que $A + V + E_{C_0} = PJ_nP^{-1}$.

D'après (20) et (21), il existe 4 matrices B_i de carré nul telles que

$$V + E_{C_0} = B_1 + B_2 \text{ et } J_n = B_3 + B_4.$$

On a alors

$$A = -B_1 - B_2 + QB_3Q^{-1} + QB_4Q^{-1}$$

puis

$$M = P(-B_1)P^{-1} + P(-B_2)P^{-1} + PQB_3Q^{-1}P^{-1} + PQB_4Q^{-1}P^{-1}.$$

Les matrices

$$P(-B_1)P^{-1}, P(-B_2)P^{-1}, PQB_3Q^{-1}P^{-1} \text{ et } PQB_4Q^{-1}P^{-1}$$

sont toutes de carré nul : $\boxed{M \in \Sigma_4\mathcal{C}(E)}$.