

CORRIGÉ du SUJET
Solutions périodiques d'équations différentielles

Partie 1. Résultats généraux.

1. On a $\mathcal{B}(H) = \mathcal{S}(H) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est une intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et aussi de $\mathcal{S}(H)$.
2. S'il existe $f_0 \in \mathcal{B}(E)$, comme (E) est une équation linéaire, on a $\mathcal{S}(E) = \{f_0 + g ; g \in \mathcal{S}(H)\}$, et une telle fonction $f_0 + g$ est bornée si et seulement si g est elle-même bornée, donc

$$\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f_0 + g ; g \in \mathcal{B}(H)\}.$$

3. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $T(f) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad (T(f))''(x) = f''(x + 2\pi)$.

Donc, si $f \in \mathcal{S}(E)$, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + b(x)f(x) = c(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x + 2\pi) + b(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = c(x + 2\pi)$$

et, les fonctions b et c étant 2π -périodiques,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (T(f))''(x) + b(x)T(f)(x) = c(x),$$

donc $T(f) \in \mathcal{S}(E)$.

4. La fonction $h = T(f) - f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et elle est solution de (EH) car elle est différence de deux solutions de (E) . Donc h est solution du problème de Cauchy

$$(\mathbf{P}) : \{(EH) : y'' + b(x)y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 0\}.$$

Or ce problème de Cauchy admet une unique solution qui est trivialement la fonction nulle, donc $h = 0$, ce qui signifie que f est 2π -périodique.

Partie 2. Un exemple d'équation à coefficients constants.

5. • En cherchant une solution particulière de (E) sous la forme $f_0 : x \mapsto d \cos(x)$, on calcule

$$f_0''(x) + \omega^2 f_0(x) = d(\omega^2 - 1) \cos(x),$$

donc f_0 est solution de (E) si et seulement si $d = \frac{1}{\omega^2 - 1}$.

- La solution du problème de Cauchy

$$\{(EH) : y'' + b(x)y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 0\}$$

est $u : x \mapsto \cos(\omega x)$.

- La solution du problème de Cauchy

$$\{(EH) : y'' + b(x)y = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = 1\}$$

est $v : x \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$.

6. D'après le cours, comme u et v sont deux solutions de (EH) linéairement indépendantes, on a $\mathcal{S}(H) = \text{Vect}(u, v)$ puis

$$\mathcal{S}(E) = f_0 + \mathcal{S}(H) = \{Au + Bv + f_0 ; (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Les solutions de (E) étant toutes bornées, $\mathcal{B}(E) = \mathcal{S}(E)$.

7. Si $f \in \mathcal{S}(E)$ admet $T > 0$ pour période, alors T est aussi une période de $f'' + \omega^2 f = \cos$, donc $T = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

8. La fonction f est $(2k\pi)$ -périodique, donc $f(2k\pi) = f(0)$, soit

$$f_0(2k\pi) + A u(2k\pi) + B v(2k\pi) = f_0(0) + A u(0) + B v(0),$$

ce qui donne la première équation

$$(\cos(2k\pi\omega) - 1) A + \frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega} B = 0.$$

La dérivée $f' = f'_0 + Au' + Bv'$ est aussi $(2k\pi)$ -périodique, donc $f'(2k\pi) = f'(0)$, ce qui donne la deuxième équation

$$-\omega \sin(2k\pi\omega) A + (\cos(2k\pi\omega) - 1) B = 0.$$

9. On calcule

$$\det(M) = (\cos(2k\pi\omega) - 1)^2 + \sin^2(2k\pi\omega) = 2(1 - \cos(2k\pi\omega)) = 4 \sin^2(k\pi\omega).$$

On a donc

$$\det(M) = 0 \iff \sin(k\pi\omega) = 0 \iff k\omega \in \mathbf{Z}$$

et ceci est impossible si ω est irrationnel.

Donc, si $\omega \notin \mathbf{Q}$, le système linéaire homogène de **Q8.** admet pour unique solution $(A, B) = (0, 0)$, et f_0 est alors la seule solution périodique de (E) .

10. Si $\omega = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{N}^*$ et $q \in \mathbf{N}^*$, le réel strictement positif $T = 2q\pi$ est une période commune aux fonctions f_0 , u et v donc les solutions de (E) sont toutes $(2q\pi)$ -périodiques. *Je pense qu'il n'est pas question ici d'approfondir et de savoir si c'est la plus petite période, ce qui nous entraînerait dans des discussions hors programme PC.*

Partie 3. Unicité lorsque la fonction b est négative.

11. La fonction g^2 est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $(g^2)' = 2gg'$, puis $(g^2)'' = 2(g'^2 + gg'')$, soit

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (g^2)''(x) = 2(g'(x))^2 + (1 + \cos x)g(x)^2 \geq 0,$$

donc g^2 est convexe sur $\mathbf{R}$.

12. Soit g une solution bornée de (EH) . Alors g^2 est convexe et majorée, donc constante. Par continuité, g est constante sur $\mathbf{R}$, posons $g(x) = C$. En reportant dans (EH) , on obtient $C = 0$ donc g est nulle sur $\mathbf{R}$.
13. Si g_1 et g_2 sont deux solutions de (E) bornées sur $\mathbf{R}$, alors la différence $g_2 - g_1$ est une solution bornée de (EH) , donc $g_2 - g_1 = 0$ et $g_1 = g_2$.
14. Si (E) possède une solution bornée, alors celle-ci est unique, notons-la g . D'après **Q3.**, la fonction $T(g)$ est aussi solution de (E) et elle est aussi bornée donc $T(g) = g$, ce qui signifie que g est 2π -périodique.

Partie 4. Existence d'une solution périodique.

15. On a d'abord, pour $n \geq 2$, la relation **(R)**: $a_n = -\frac{1}{2(n^2 + 1)}(a_{n+1} + a_{n-1})$, donc

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^2 + 1}, \text{ donc } a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ En réexploitant (R), on obtient } a_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Remarque. Par récurrence, on peut montrer que $a_n = O\left(\frac{1}{n^{2k}}\right)$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum n^2 a_n$ sont donc absolument convergentes.

16. Posons $g_n(x) = a_n \sin(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel. Les fonctions g_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad g'_n(x) = n a_n \cos(nx) \quad \text{et} \quad g''_n(x) = -n^2 a_n \sin(nx) .$$

Comme $\|g_n\| = |a_n|$, $\|g'_n\| = n |a_n|$ et $\|g''_n\| = n^2 |a_n|$ (il s'agit de la "norme infinie" sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ introduite en préambule), il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$ des séries de fonctions

$\sum g_n$, $\sum g'_n$ et $\sum g''_n$, ce qui permet d'affirmer que la somme $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $g'' = \sum_{n=1}^{+\infty} g''_n$. On obtient alors

$$\begin{aligned} g''(x) - (1 + \cos x) g(x) &= - \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n \sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (1 + \cos x) \sin(nx) \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 1) a_n \sin(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \times \frac{1}{2} \left(\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x) \right) \\ &= - \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 1) a_n \sin(nx) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} \sin(nx) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} \sin(nx) \\ &= \left(-2a_1 - \frac{1}{2}a_2 \right) \sin(x) - \sum_{n=2}^{+\infty} \left((n^2 + 1) a_n - \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \right) \sin(nx) \\ &= \sin(x) . \end{aligned}$$

17. Pour $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} s_n(t) s_m(t) dt &= \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin((n-m)t)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)t)}{n+m} \right]_0^{2\pi} \right) = 0 , \end{aligned}$$

les entiers $n-m$ et $n+m$ étant non nuls.

Soient alors $\beta_1, \dots, \beta_N$ des réels tels que $\sum_{k=1}^N \beta_k s_k = 0$. Si on fixe $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on a alors

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^N \beta_k s_k(t) \right) s_l(t) dt = \sum_{k=1}^N \beta_k \int_0^{2\pi} s_k(t) s_l(t) dt = \beta_l \int_0^{2\pi} s_l(t)^2 dt .$$

Or la fonction s_l^2 est continue, positive et non partout nulle sur $[0, 2\pi]$ donc $\int_0^{2\pi} s_l(t)^2 dt > 0$, on déduit que $\beta_l = 0$ et ceci pour tout $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

La famille $(s_1, \dots, s_N)$ est donc libre et, comme elle est génératrice de $\mathcal{P}_N$, elle en constitue une base.

Remarque. On aura bien sûr reconnu une famille orthogonale de vecteurs non nuls dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$.

18. Les calculs faits en **Q16.** montrent que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad L(s_n) = -(n^2 + 1)s_n - \frac{1}{2}(s_{n+1} + s_{n-1}).$$

19. La linéarité de L est immédiate.

Si $p \in \mathcal{P}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \in \mathcal{P}_N = \text{Vect}(s_1, \dots, s_N)$. Par linéarité et par le calcul fait en **Q18.**, on en déduit que $L(p) \in \text{Vect}(s_1, \dots, s_N, s_{N+1}) = \mathcal{P}_{N+1}$ donc $L(p) \in \mathcal{P}$. Ainsi L est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{P}$.

On a clairement $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc, si $p \in \text{Ker}(L)$, alors p est une solution bornée de l'équation (EH) , donc $p = 0$ d'après **Q12.** Donc l'endomorphisme L est injectif.

Supposons qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $L(p) = s_1$. Recherchons p sous la forme $p = \sum_{k=1}^N \beta_k s_k$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, $(\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}^N$ tels que $\beta_N \neq 0$. Alors

$$L(p) = - \sum_{k=1}^N \beta_k \left((k^2 + 1)s_k + \frac{1}{2}(s_{k+1} + s_{k-1}) \right) = s_1.$$

Comme on sait que $(s_1, \dots, s_{N+1})$ est une base de $\mathcal{P}_{N+1}$, en identifiant la coordonnée selon s_{N+1} , on obtient $\beta_N = 0$ ce qui est contradictoire.

On conclut que $s_1 \notin \text{Im}(L)$.

20. On a bien sûr $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_{N+1}$ et $L(\mathcal{P}_N) \subset \mathcal{P}_{N+1}$.

Les deux sont en somme directe puisque $s_1 \notin L(\mathcal{P}_N)$ donc

$$\mathcal{P}_1 \cap L(\mathcal{P}_N) = \text{Vect}(s_1) \cap L(\mathcal{P}_N) = \{0\}.$$

L'endomorphisme L étant injectif, on a $\dim(L(\mathcal{P}_N)) = \dim(\mathcal{P}_N)$. Donc

$$\begin{aligned} \dim(L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1) &= \dim(L(\mathcal{P}_N)) + \dim(\mathcal{P}_1) = \dim(\mathcal{P}_N) + \dim(\mathcal{P}_1) \\ &= N + 1 = \dim(\mathcal{P}_{N+1}). \end{aligned}$$

On conclut que $L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{N+1}$, puisqu'il y a une inclusion triviale.

21. Si $c \in \mathcal{P}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $c \in \mathcal{P}_{N+1} = L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1$.

Il existe alors $p \in \mathcal{P}_N$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $c = L(p) + \alpha s_1$. Considérons la fonction $f = p + \alpha g$, où g a été introduite en **Q15.** Alors f est 2π -périodique, $\mathcal{C}^2$, et pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f''(x) - (1 + \cos x) f(x) &= p''(x) - (1 + \cos x) p(x) + \alpha (g''(x) - (1 + \cos x) g(x)) \\ &= L(p)(x) + \alpha s_1(x) = c(x). \end{aligned}$$

Donc f est une solution de (E) 2π -périodique.

Partie 5. Un théorème général.

22. D'après **Q2.**, on a $\mathcal{B}(E) = \{f_0 + g ; g \in \mathcal{B}(H)\} \subset \mathcal{H} := \text{Vect}(f_0) \oplus \mathcal{B}(H)$. La somme est directe puisque, si $c \neq 0$, alors $f_0 \notin \mathcal{B}(H)$. Ainsi, $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension finie (au plus égale à 3) contenant $\mathcal{B}(E)$, et donc contenant $\mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{H}$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et $\mathcal{A}$ est inclus dans la boule fermée Ω de centre 0 et de rayon M_0 pour la restriction à $\mathcal{H}$ de la norme $\|\cdot\|$, donc $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $\mathcal{H}$.

De façon plus précise, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(E) \cap \Omega$, où Ω est une partie fermée de $\mathcal{H}$, et $\mathcal{B}(E)$ est aussi une partie fermée de $\mathcal{H}$ puisque c'en est un sous-espace affine. Cette dernière notion n'étant pas au programme de la filière PC, on peut écrire $\mathcal{B}(E) = \tau^{-1}(\mathcal{B}(H))$ en introduisant

l'application $\tau : \begin{cases} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ f \mapsto f - f_0 \end{cases}$ qui est clairement continue, et $\mathcal{B}(H)$ est une partie fermée

de $\mathcal{H}$ car c'en est un sous-espace vectoriel (bon, c'est classique en dimension finie). Donc $\mathcal{B}(E)$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. Enfin, $\mathcal{A}$ est fermé comme intersection de deux fermés de $\mathcal{H}$.

Enfin, $f_0 \in \mathcal{A}$ donc $\mathcal{A}$ est non vide.

23. Les applications $\lambda : \begin{cases} \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(2\pi) - f(0) \end{cases}$ et $\mu : \begin{cases} \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f'(2\pi) - f'(0) \end{cases}$ sont linéaires sur l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ de dimension finie, donc elles sont continues. Par opérations, l'application $\varphi = |\lambda| + |\mu| : f \mapsto |f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|$ est aussi continue sur $\mathcal{H}$. Elle admet donc un minimum sur la partie $\mathcal{A}$ qui est fermée bornée non vide, d'où l'existence de $\alpha = \min(\mathcal{I}) = \inf(\mathcal{I})$ et d'un élément $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(f_1) = \alpha$.

24. Soit $g_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(f_0)$. Comme $f_0 \in \mathcal{B}(E)$, les $T^k(f_0)$ sont dans $\mathcal{B}(E)$ d'après **Q3.**,

donc g_n est bornée et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et, chaque fonction $f_k = T^k(f_0)$ étant solution de (E), il est immédiat de vérifier que g_n est solution de (E). Pour formaliser un peu, mais c'est hors programme PC, l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des solutions de (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, c'en est donc une partie convexe donc stable par barycentration à coefficients positifs.

Pour tout x réel, $|g_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |T^k(f_0)(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|T^k(f_0)\| = \|f_0\| = M_0$,

donc $\|g_n\| \leq M_0$ et finalement $g_n \in \mathcal{A}$.

Enfin, comme $(T^k(f_0))' = T^k(f_0')$ pour tout k ,

$$\begin{aligned} \varphi(g_n) &= |g_n(2\pi) - g_n(0)| + |g_n'(2\pi) - g_n'(0)| \\ &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n T^k(f_0)(2\pi) - \sum_{k=0}^n T^k(f_0)(0) \right| + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n T^k(f_0')(2\pi) - \sum_{k=0}^n T^k(f_0')(0) \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n (f_0(2(k+1)\pi) - f_0(2k\pi)) \right| + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n (f_0'(2(k+1)\pi) - f_0'(2k\pi)) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \left| f_0(2(n+1)\pi) - f_0(0) \right| + \frac{1}{n+1} \left| f'_0(2(n+1)\pi) - f'_0(0) \right| \\
&\leq \frac{2}{n+1} (M_0 + M_1) .
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \alpha = \min_{f \in \mathcal{A}} \varphi(f) \leq \varphi(g_n) \leq \frac{2(M_0 + M_1)}{n+1} .$$

25. On a montré que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{2(M_0 + M_1)}{n+1}$. Donc $\alpha = 0$.

Comme il existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(f_1) = \alpha = 0$, il existe donc $f_1 \in \mathcal{A}$ (donc $f_1 \in \mathcal{S}(E)$) tel que $|f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f'_1(2\pi) - f'_1(0)| = 0$, donc $\begin{cases} f_1(2\pi) = f_1(0) \\ f'_1(2\pi) = f'_1(0) \end{cases}$.

D'après **Q4.**, f_1 est une solution 2π -périodique de (E) .