

**Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts II, 2026, filière
PC.
Version provisoire du 30/04/2026**

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Solutions périodiques d'équations différentielles

Partie 1 : Résultats généraux.

- (1) On a $\mathcal{B}(H) = \mathbf{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{S}(H)$ donc $\mathcal{B}(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Etant inclus dans $\mathcal{S}(H)$, $\mathcal{B}(H)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(H)$.

- (2) Soit $f \in \mathcal{B}(E)$. Il existe $g \in \mathcal{S}(H)$ tel que $f = g + f_0$. Alors $g = f - f_0$ est bornée comme différence de deux fonctions bornées donc $g \in \mathcal{B}(H)$.

Réciproquement, si $f = g + f_0$ avec $g \in \mathcal{B}(H)$, alors f est bornée et solution de (E) . On a bien montré que

$$\mathcal{B}(E) = \{g + f_0 \mid g \in \mathcal{B}(H)\}.$$

- (3) On observe que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée. Puis, f étant solution de (E) et b et c étant 2π -périodiques, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(T(f))''(x) + b(x)T(f)(x) &= f''(x + 2\pi) + b(x)f(x + 2\pi) \\ &= f''(x + 2\pi) + b(x + 2\pi)f(x + 2\pi) \\ &= c(x + 2\pi) \\ &= c(x),\end{aligned}$$

donc $T(f)$ est solution de (E) .

- (4) Considérons $h = T(f) - f$. La fonction h est solution du problème de Cauchy

$$h'' + b(x)h = 0, h(0) = f(2\pi) - f(0) = 0 \text{ et } h'(0) = f'(2\pi) - f'(0) = 0.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les EDL2, la fonction nulle est l'unique solution de

$$\begin{cases} y'' + by = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $h = 0$, et donc que $T(f) = f$ et donc que f est 2π -périodique.

Partie 2 : Un exemple d'équation à coefficients constants.

- (5) En reportant dans l'équation, on vérifie de suite que

$$x \mapsto f_0(x) = \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos(x)$$

est solution de (E) . Et de même, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = \cos(\omega x) \text{ et } v(x) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x).$$

- (6) La famille (u, v) est une base de $\mathcal{S}(H)$ et ces deux fonctions, de même que f_0 , sont bornées. D'après (2), on en déduit que

$$\mathcal{S}(E) = \mathcal{B}(E) = \{Au + Bv + f_0, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- (7) Soit T la période de f . La fonction f'' est aussi T -périodique donc

$$\cos = f'' + \omega^2 f$$

est aussi T périodique.

L'ensemble des périodes de $\cos$ étant $2\pi\mathbb{Z}$, on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $T = 2k\pi$.

- (8) Soient $A, B \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos(x) + A \cos(\omega x) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega x) = 0.$$

La relation $f(0) = f(2k\pi)$ donne

$$A = A \cos(2k\pi\omega) + \frac{B}{\omega} \sin(2k\pi\omega)$$

et donc

$$(\cos(2k\pi\omega) - 1)A + \frac{\sin(2k\pi\omega)}{\omega}B = 0.$$

La relation $f'(0) = f'(2k\pi)$ donne de même

$$-\omega \sin(2k\pi\omega)A + (\cos(2k\pi\omega) - 1)B = 0.$$

- (9) Le déterminant D demandé est égal à

$$D = (\cos(2k\pi\omega) - 1)^2 + \sin^2(2k\pi\omega) = 2 - 2\cos(2k\pi\omega).$$

Si $\omega \notin \mathbb{Q}$, alors $\cos(2k\pi\omega) \neq 1$. On a donc $D \neq 0$, ce qui montre que $A = B = 0$ et donc que $f = f_0$.

On a bien montré que si $\omega \notin \mathbb{Q}$, alors l'unique solution périodique de (E) est f_0 .

- (10) Supposons que $\omega = p/q$. Alors toute solution de (E) est de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{\omega^2 - 1} \cos(x) + A \cos(px/q) + \frac{B}{\omega} \sin(px/q).$$

Toutes ces fonctions sont $2q\pi$ -périodiques.

Partie 3 : Unicité lorsque la fonction b est négative.

- (11) La fonction g^2 est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g^2)''(x) = 2(g')^2(x) + 2g(x)g''(x) = 2(g')^2(x) + 2g^2(x)(1 + \cos(x)) \geq 0,$$

ce qui montre que g^2 est convexe.

- (12) Soit g une solution bornée de (EH) . Alors g^2 est majorée sur $\mathbb{R}$ et convexe. D'après le résultat admis, g^2 est donc constante. On a en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, (g')^2(x) + g^2(x)(1 + \cos(x)) = 0,$$

ce qui impose que $(g')^2 = 0$ et donc que g est constante égale à un certain α . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1 + \cos(x))\alpha = 0,$$

et donc $\alpha = 0$.

On a bien montré que la seule solution bornée de (EH) est la fonction nulle.

Il est un peu ridicule de faire admettre le résultat utilisé. Rappelons en la démonstration. Soit φ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, majorée sur $\mathbb{R}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi'(a) \neq 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a).$$

On obtient la contradiction en faisant tendre x vers $+\infty$ si $\varphi'(a) > 0$ et vers $-\infty$ si $\varphi'(a) < 0$.

Ainsi, $\varphi' = 0$ et φ est donc constante.

- (13) Si f_1 et f_2 sont deux solutions bornées de (E) , alors $f_1 - f_2$ est une solution bornée de (EH) donc est nulle d'après (12) et on a donc $f_1 = f_2$.

L'équation (E) possède donc au plus une solution bornée.

- (14) Soit f une solution bornée de (E) . Alors, avec les notations de (2), $T(f)$ est aussi une solution bornée de (E) , donc $T(f) = f$, ce qui signifie que f est 2π -périodique.

Partie 4 : Existence d'une solution périodique.

- (15) On a

$$\forall n \geq 2, 0 \leq |a_n| = \left| -\frac{1}{2(n+1)^2} (a_{n-1} + a_{n+1}) \right| \leq \frac{2M}{2(n+1)^2} = \frac{M}{(n+1)^2}.$$

Par domination par une série de Riemann convergente, la série

$$\sum a_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

De là, la série $\sum (n^2 + 1)|a_n|$ est elle aussi convergente. Comme

$$(n^2 + 1)|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2|a_n| \geq 0,$$

la série

$$\sum n^2 a_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

- (16) Posons

$$u_n : x \mapsto u_n(x) = a_n \sin(nx).$$

Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'_n(x) = n \cos(nx) \text{ et } u''_n(x) = -n^2 \sin(nx).$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{\mathbb{R}} |u_n| \leq |a_n|, \sup_{\mathbb{R}} |u'_n| \leq n|a_n| \text{ et } \sup_{\mathbb{R}} |u''_n| \leq n^2|a_n|.$$

La question (15) implique que $\sum u_n$, $\sum u'_n$ et $\sum u''_n$ convergent normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (la convergence simple suffit pour les deux premières) et le théorème de $\mathcal{C}^2$ -dérivation des séries de fonctions implique que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n \sin(nx).$$

De là,

$$\begin{aligned}
g''(x) - g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -(n^2 + 1)a_n \sin(nx) \\
&= -2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (a_{n+1} \sin(nx) + a_{n-1} \sin(nx)) \\
&= -2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{+\infty} a_n \sin((n-1)x) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin((n+1)x) \\
&= -2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} ((a_1 \sin(2x) + a_2 \sin(3x)) + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{+\infty} a_n (\sin((n-1)x) + \sin((n+1)x)) \\
&= -2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} ((a_1 \sin(2x) + a_2 \sin(3x)) + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{+\infty} a_n \times 2 \sin(nx) \cos(x) \\
&= -2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} ((a_1 \sin(2x) + a_2 \sin(3x)) + \cos(x)(g(x) - a_1 \sin(x) - a_2 \sin(2x)) \\
&= \cos(x)g(x) - 2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} a_2 \sin(3x) - a_2 \cos(x) \sin(2x) \\
&= \cos(x)g(x) - 2a_1 \sin(x) + \frac{1}{2} a_2 (\sin(3x) - 2 \sin(2x) \cos(x)) \\
&= \cos(x)g(x) - 2a_1 \sin(x) - \frac{1}{2} a_2 \sin(x) \\
&= \cos(x)g(x) - \frac{1}{2} (4a_1 + a_2) \sin(x) \\
&= \cos(x)g(x) + \sin(x).
\end{aligned}$$

On a bien montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) - (1 + \cos(x))g(x) = \sin(x)}.$$

- (17) Il suffit de montrer que la famille $(s_1, \dots, s_N)$ est libre. Or, un calcul facile montre que pour tout $n \neq m$,

$$\int_0^{2\pi} s_n s_m = 0.$$

De là, soit $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ vérifiant $\sum_{i=1}^N \alpha_i s_i = 0$. Pour j fixé, on a

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i s_i s_j = 0.$$

En intégrant cette égalité entre 0 et 2π , il reste

$$\alpha_j \int_0^{2\pi} s_j^2 = 0$$

et donc $\alpha_j = 0$, ce qui conclut. On a montré que $\boxed{(s_1, \dots, s_N) \text{ est une base de } \mathcal{P}_N}$.

- (18) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$L(s_n)(x) = -n^2 s_n(x) - s_n(x) - \cos(x) \sin(nx) = -n^2 s_n(x) - s_n(x) - \frac{1}{2} (\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x))$$

et donc

$$\boxed{L(s_n) = -(n^2 + 1)s_n - \frac{1}{2}(s_{n+1} + s_{n-1})}.$$

- (19) Soit $p \in \mathcal{P}$ tel que $L(p) = 0$. Alors p est bornée comme combinaison linéaire de fonctions bornées et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, p'''(x) - (1 + \cos(x))p(x) = 0.$$

D'après (12), $p = 0$. On a montré que $\text{Ker}(L) = \{0\}$ et donc que L est injectif.

Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $L(p) = \sin(x)$. Or, d'après (13), l'équation

$$y'' - (1 + \cos(x))y = \sin x$$

possède au plus une solution bornée. Une telle solution est la fonction g construite en (16). On en déduit que $p = g$. Comme $g \notin \mathcal{P}$, on obtient une contradiction. Finalement,

$$s_1 \notin \text{Im}(L).$$

- (20) D'après (18), on a

$$L|_{\mathcal{P}_N} : \mathcal{P}_N \rightarrow \mathcal{P}_{N+1}.$$

Comme L est injectif, $L(\mathcal{P}_N)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_{N+1}$ de dimension N et $s_1 \notin L(\mathcal{P}_N)$. La somme $L(\mathcal{P}_N) + \text{Vect}(s_1)$ est donc directe et de dimension égale à $\dim \mathcal{P}_{N+1}$. On a donc

$$\mathcal{P}_{N+1} = L(\mathcal{P}_N) \oplus \text{Vect}(s_1) = L(\mathcal{P}_N) \oplus \mathcal{P}_1.$$

- (21) Soit $c \in \mathcal{P}$. Il existe N tel que $c \in \mathcal{P}_{N+1}$. D'après (20), il existe $p \in \mathcal{P}_N$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$c = L(p) + \alpha s_1 = p'' - (1 + \cos)p + \alpha(g'' - (1 + \cos)g).$$

La fonction

$$y = p + \alpha g \text{ est solution de } (E) \text{ et est } 2\pi\text{-périodique}.$$

Partie 5 : Un théorème général.

- (22) Si $f \in \mathcal{A}$, alors $f - f_0 \in \mathcal{B}(H)$ donc $f \in \text{Vect}(f_0) + \mathcal{B}(H)$. On a donc

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{H} = \text{Vect}(f_0) + \mathcal{B}(H) \text{ et } \dim \mathcal{H} \leq 3.$$

Par définition, la partie $\mathcal{A}$ contient f_0 et est égale à la boule fermée de $\mathcal{H}$ de centre 0 et de rayon M_0 : $\mathcal{A}$ est donc bien une partie non vide, fermée et bornée de $\mathcal{H}$.

- (23) Comme $\mathcal{H}$ est de dimension finie, les formes linéaires

$$f \mapsto f(a) \text{ et } f \mapsto f'(a)$$

sont continues sur $\mathcal{H}$. On en déduit que la fonction

$$f \mapsto |f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|$$

est continue sur $\mathcal{H}$ donc sur $\mathcal{A}$ par composition et somme. Comme $\mathcal{A}$ est fermée, bornée et non vide, le théorème des bornes atteintes implique que cette fonction restreinte à $\mathcal{A}$ est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $f_1 \in \mathcal{A}$ tel que

$$\begin{aligned} |f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f_1'(2\pi) - f_1'(0)| &= \inf_{f \in \mathcal{A}} (|f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|) \\ &= \min_{f \in \mathcal{A}} (|f(2\pi) - f(0)| + |f'(2\pi) - f'(0)|). \end{aligned}$$

- (24) Comme c et b sont périodiques, (3) implique que toutes les fonctions $x \mapsto f_0(x + 2k\pi)$ sont solutions de (E) . On en déduit de suite par principe de superposition que g_n est aussi solution de (E) .

Par inégalité triangulaire, $\|g_n\| \leq M_0$. Ainsi, $g_n \in \mathcal{A}$ pour tout n . De là,

$$\begin{aligned}
 \alpha &\leq |g_n(2\pi) - g_n(0)| + |g'_n(2\pi) - g'_n(0)| \\
 &= \frac{1}{n+1} \left(\left| \sum_{k=0}^n f_0(2\pi + 2k\pi) - f_0(2k\pi) \right| + \left| \sum_{k=0}^n f'_0(2\pi + 2k\pi) - f'_0(2k\pi) \right| \right) \\
 &= \frac{1}{n+1} (|f_0(2\pi + 2n\pi) - f_0(0)| + |f'_0(2\pi + 2n\pi) - f'_0(0)|) \\
 &\leq \frac{1}{n+1} (|f_0(2\pi + 2n\pi)| + |f_0(0)| + |f'_0(2\pi + 2n\pi)| + |f'_0(0)|) \\
 &\leq \frac{1}{n+1} (2M_0 + 2M_1) \\
 &= \boxed{\frac{2}{n+1} (M_0 + M_1)}.
 \end{aligned}$$

- (25) Pour tout n ,

$$0 \leq \alpha \leq \frac{2}{n+1} (M_0 + M_1).$$

En passant à la limite, on en déduit que $\alpha = 0$. De là,

$$|f_1(2\pi) - f_1(0)| + |f'_1(2\pi) - f'_1(0)| = 0$$

donc

$$f_1(2\pi) = f_1(0) \text{ et } f'_1(2\pi) = f'_1(0).$$

Par (4), on en déduit que f_1 est 2π -périodique et donc que $\boxed{(E) \text{ possède une solution périodique}}.$