

CCMP PSI – Maths 2 – Un corrigé

Merci de me signaler les erreurs à : sergelaurent@sergial.org

Partie I

1 – On part de $\int_0^1 (e^{i\theta}t)^{k-1} dt = \frac{e^{i(k-1)\theta}}{k}$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = e^{i\theta} \int_0^1 \sum_{k=1}^n (e^{i\theta}t)^{k-1} dt$.

Or pour $t \in [0, 1[$, $|e^{i\theta}t| = t < 1$ donc $e^{i\theta}t \neq 1$, et pour $t = 1$: $e^{i\theta}t = e^{i\theta} \neq 1$ (car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$). Dans tous les cas $e^{i\theta}t \neq 1$ et par somme géométrique on a donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt$$

2 – On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$ et $R_n = - \int_0^1 e^{i\theta} \frac{(e^{i\theta}t)^n}{1 - e^{i\theta}t} dt$, de sorte que $S_n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt + R_n$. Or :

$$|R_n| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - e^{i\theta}t|} dt$$

Par non-nullité du dénominateur (cf Q1), la fonction $t \rightarrow \frac{1}{|1 - e^{i\theta}t|}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et à ce titre est bornée par une constante M sur ce segment. Donc :

$$|R_n| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De là $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$. En d'autres termes :

$$\text{Pour } \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \text{ la série numérique } \sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$$

3 – On déduit du résultat ci-dessus, en prenant les parties imaginaires :

Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série numérique $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k\theta)}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \text{Im} \left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt \right)$

On calcule la partie imaginaire en question :

$$\frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} = \frac{e^{i\theta}(1 - e^{-i\theta}t)}{|1 - e^{i\theta}t|^2} = \frac{e^{i\theta} - t}{(1 - t \cos(\theta))^2 + (t \sin(\theta))^2}$$

De là : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{1 + t^2 - 2t \cos(\theta)} dt$.

On regarde alors la fonction u_θ suggérée par l'énoncé. Pour $t \in]0, \pi[$, $|\cos(\theta)| < 1$ et $1 - t \cos(\theta)$ ne s'annule pas pour $t \in [0, 1]$. Comme $\arctan$ est en outre dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction u_θ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ de dérivée donnée par :

$$u_\theta'(t) = \frac{\sin(\theta)(1 - t \cos(\theta) + t \cos(\theta) \sin(\theta))}{(1 - t \cos(\theta))^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{t \sin(\theta)}{1 - t \cos(\theta)}\right)^2} = \frac{\sin(\theta)}{(1 - t \cos(\theta))^2 + (t \sin(\theta))^2}$$

On a montré : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 u_\theta'(t) dt$ et par suite : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 u_\theta'(t) dt$ et sachant u_θ de

classe C^1 : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = u_\theta(1) - u_\theta(0) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}\right)$. Or $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{2 \sin^2(\frac{\theta}{2})}$

et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \arctan\left(\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right)$.

Comme $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on peut écrire : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \arctan\left(\frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})}\right)$. On a $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et on

rappelle que pour $x > 0$: $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Ainsi $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et

finalement, sachant $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2}}$.

4 – On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: $f_n(t) = \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

- Les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.
- La majoration, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: $|f_n(t)| \leq \frac{1}{n^2}$ et la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ montrent la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

On en déduit : $\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$.

5 – On cherche à dériver terme à terme la série qui définit S . On garde les notations de la question 4.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^1([0, \pi[, \mathbb{R})$.
- On a vu la convergence simple de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[0, \pi[$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [0, \pi[$ on a $f_n'(\theta) = -\frac{\sin(n\theta)}{n}$ et on a déjà vu la convergence simple à la question 3 de $\sum_{n \geq 1} f_n'$ sur $]0, \pi[$. Avec la question 2, on a en outre pour $\theta \in]0, \pi[$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(\theta) \right| = \left| \int_0^1 e^{i\theta} \frac{(e^{i\theta} t)^n}{1 - e^{i\theta} t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n dt}{|1 - e^{i\theta} t|}$$

On se donne alors a et b tels que $0 < a < b < \pi$ et on définit l'application φ :

$$\varphi: \begin{cases} [a,b] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, t) \mapsto \frac{1}{|1 - e^{i\theta}t|} \end{cases}$$

Le dénominateur ne pouvant s'annuler (déjà vu), φ est continue sur $[a,b] \times [0,1]$ qui est fermé et borné dans l'espace de dimension finie $\mathbb{R}^2$. À ce titre, φ est bornée sur $[a,b] \times [0,1]$ par

$$\text{une constante } M \text{ et ainsi pour } \theta \in [a,b] : \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(\theta) \right| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On vient de montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement sur tout segment de $]0, \pi[$.

Il ressort de tous ces points que S est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ et

$$\forall \theta \in]0, \pi[, S'(\theta) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\theta - \pi}{2} \text{ et par primitivation il existe une constante } C \text{ telle}$$

que $\forall \theta \in]0, \pi[, S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + C$. Par continuité de S , cette relation est encore valide en $\theta = 0$ et en évaluant en 0 on obtient $C = S(0)$. On peut conclure :

$$\boxed{\forall \theta \in [0, \pi[, S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0)}$$

$$6 - \text{On pose cette fois, pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } t \in \mathbb{R} : g_{n,x}(t) = \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2 + x^2)}.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ le dénominateur est non nul et les fonctions $g_{n,x}$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $|g_{n,x}(t)| = \frac{1}{n^2(n^2 + x^2)} \leq \frac{1}{n^4}$, donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_{n,x}$ converge simplement (et même normalement) sur $\mathbb{R}$.
- Toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R} : g_{n,x}'(t) = \frac{-\sin(nt)}{n(n^2 + x^2)}$ puis $|g_{n,x}'(t)| = \frac{1}{n(n^2 + x^2)} \leq \frac{1}{n^3}$ et la série $\sum_{n \geq 1} g_{n,x}'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- Sous les mêmes conditions : $g_{n,x}''(t) = \frac{-\cos(nt)}{n^2 + x^2}$ puis $|g_{n,x}''(t)| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_{n,x}''$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On déduit de ces quatre points :

$$\boxed{g_x \text{ est définie et de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, g_x''(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2 + x^2}}$$

De là, pour $t \in \mathbb{R} :$

$$g_x''(t) - x^2 g_x(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} + \frac{x^2}{n^2(n^2 + x^2)} \right) \cos(nt) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = -S(t)$$

Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, g_x''(t) - x^2 g_x'(t) = -S(t)}$.

7 – On pose pour t réel : $P(t) = at^2 + bt + c$. On a alors :

$$P''(t) - x^2 P'(t) = -ax^2 t^2 - bx^2 t + (2a - cx^2)$$

Par identification, P est solution de (E_x) équivaut à $\begin{cases} ax^2 = \frac{1}{4} \\ bx^2 = -\frac{\pi}{2} \\ 2a - cx^2 = -S(0) \end{cases}$, c'est-à-dire pour x non nul :

$$\text{nul : } \left(a = \frac{1}{4x^2} \text{ et } b = -\frac{\pi}{2x^2} \text{ et } c = \frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2} \right).$$

$$\boxed{P \text{ définie par } P(t) = \frac{t^2}{4x^2} - \frac{\pi t}{2x^2} + \left(\frac{1}{2x^4} + \frac{S(0)}{x^2} \right) \text{ est solution de } (E_x) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

8 – Avec les dérivations termes à termes établies à la question 6 : $g_x'(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n(n^2 + x)}$ et de

$$\text{là : } \boxed{g_x'(0) = g_x'(\pi) = 0}.$$

L'équation (E_x) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - x^2 = 0$ dont g_x et P sont solutions. Pour x non nul, l'équation caractéristique a deux solutions distinctes $r = \pm x$ et par suite il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_x(t) = Ae^{xt} + Be^{-xt} + P(t)$$

De là $\forall t \in \mathbb{R}, g_x'(t) = Axe^{xt} - Bxe^{-xt} + P'(t)$ puis :

$$g_x''(0) = Ax^2 + Bx^2 + P''(0) = Ax^2 + Bx^2 + \frac{1}{2x^2}.$$

Les conditions $g_x'(0) = g_x'(\pi) = 0$ amènent donc $\begin{cases} Ax - Bx - \frac{\pi}{2x^2} = 0 \\ Axe^{\pi x} - Bxe^{-\pi x} + P'(\pi) = 0 \end{cases}$.

On vérifie que $P'(\pi) = 0$ et $e^{\pi x} L_1 - L_2$ donne alors $Bx(-e^{\pi x} + e^{-\pi x}) - \frac{\pi e^{\pi x}}{2x^2} = 0$ tandis que

$e^{-\pi x} L_1 - L_2$ fournit $Ax(e^{-\pi x} - e^{\pi x}) - \frac{\pi e^{-\pi x}}{2x^2} = 0$, puis en ajoutant ces deux résultats :

$$x(A + B)(e^{-\pi x} - e^{\pi x}) - \frac{\pi}{2x^2}(e^{-\pi x} + e^{\pi x}) = 0$$

J'en déduis : $x^2(A + B) = \frac{\pi}{2x} \times \frac{e^{-\pi x} + e^{\pi x}}{e^{-\pi x} - e^{\pi x}}$ et avec $g_x''(0) = Ax^2 + Bx^2 + \frac{1}{2x^2}$ on obtient :

$$\boxed{g_x''(0) = \frac{\pi}{2x} \times \frac{e^{-\pi x} + e^{\pi x}}{e^{-\pi x} - e^{\pi x}} + \frac{1}{2x^2} = -\frac{\pi}{2x} \times \frac{1 + e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}}.$$

9 – En partant de $g_x''(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2 + x^2}$ l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = -\frac{\pi}{2x} \times \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} + \frac{1}{2x^2}, \text{ puis } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 + x^2} = \pi x \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} - 1 = \pi x \left(1 + 2 \frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} \right) - 1,$$

donc : $2\pi x \frac{e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 + x^2}$ et enfin : $\boxed{\frac{2\pi x}{e^{-2\pi x} - 1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 + x^2}}.$

Partie 2

10 – On rappelle ici que pour $q \neq 1$ on a : $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^N q^k + \frac{q^{N+1}}{1-q}$. Pour $|x| < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\left| -\frac{x^2}{n} \right| < \frac{1}{n} \leq 1 \text{ donc } -\frac{x^2}{n} \neq 1 \text{ et : } \frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right)} = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k + \frac{\left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^{N+1}}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right). \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k + R_{N,n}(x) \text{ avec } R_{N,n}(x) = \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2}}{(x^2 + n^2) n^{2N+2}}}$$

De là pour $n \geq 1$: $|R_{N,n}(x)| = \frac{|x|^{2N+2}}{(x^2 + n^2) n^{2N+2}} < \frac{|x|^{2N+2}}{n^{2N+2}}$ et comme $2N+2 > 1$ on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^{2N+2}}{n^{2N+2}} = |x|^{2N+2} \zeta(2N+2)}$$

11 – On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$: $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$. Les f_n sont continues sur $[2, +\infty[$ et pour $x \geq 2$: $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, ce qui prouve la convergence normale sur $[2, +\infty[$ de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$. En outre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$ et pour $n \geq 2$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Il ressort de tous ces points que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1}$.

La convergence de la série numérique $\sum_n \frac{1}{x^2 + n^2}$ a déjà été établie à la partie I, et avec la

$$\text{question 10 : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k + R_{N,n}(x) \right) = \sum_{k=0}^N \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^k}{n^{2k+2}} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x)$$

Les séries $\sum_{n \geq 1} \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k$ sont bien convergentes, de sommes $(-1)^k x^{2k} \zeta(2k+2)$, tout comme la dernière série (voir question 10). L'écriture est bien licite et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \sum_{k=0}^N (-1)^k x^{2k} \zeta(2k+2) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x)$$

Or la majoration de la question 10 et l'égalité $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ permettent d'écrire, pour $|x| < 1$:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq |x|^{2N+2} \zeta(2N+2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) = 0$ puis $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N (-1)^k x^{2k} \zeta(2k+2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$.

J'en déduis $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k+2} \zeta(2k+2)$, puis en décalant les indices :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 + n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^{2k} \zeta(2k)$$

12 – Soit $x \in]-2\pi, 2\pi[$. On pose $t = \frac{x}{2\pi}$ de sorte que $x = 2\pi t$ et $|t| < 1$. On a alors pour $x \neq 0$:

$$h(x) = \frac{2\pi t}{e^{2\pi t} - 1}$$

On utilise alors la question 9 : $h(x) = 1 - \pi t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t^2}{n^2 + t^2}$. Comme $|t| < 1$ on a avec la question

11 : $h(x) = 1 - \pi t + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) t^{2k}$ (résultat encore vrai pour $x = 0$), puis en revenant à x :

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, h(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}$$

On vient de voir que h est développable en série entière, et son développement est par ailleurs

$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$. Par unicité on peut identifier et on obtient :

$$b_0 = 1, b = -\frac{1}{2}, \forall k \geq 1, \left(b_{2k+1} = 0 \text{ et } b_{2k} = (-1)^{k+1} (2k)! \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \right)$$

13 – On a d'une part $\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ et d'autre part

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, relation encore valide en 0 en prolongeant par continuité

le membre de gauche. Par produit de Cauchy de séries entières on a donc sur $]-2\pi, 2\pi[$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 1$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n-k+1)!}$. Par unicité du développement en série entière on a pour

$$n \geq 1 : \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n-k+1)!} = 0.$$

14 – On obtient pour $n = 2$: $\frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = 0$ et donc $\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{b_2}{2} = 0$ et $b_2 = \frac{1}{6}$.

On regarde maintenant pour $n = 4$: $\frac{b_0}{120} + \frac{b_1}{24} + \frac{b_2}{12} + \frac{b_4}{24} = 0$, donc $\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{b_4}{24} = 0$ puis

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + b_4 = 0 \text{ et finalement } b_4 = -\frac{1}{30}.$$

En utilisant la relation $b_{2k} = (-1)^{k+1} (2k)! \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}}$ on obtient pour $n=1$: $\frac{1}{6} = 2 \frac{\zeta(2)}{2\pi^2}$ et on retrouve $\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$. On prend maintenant $n=2$: $-\frac{1}{30} = -24 \frac{\zeta(4)}{8\pi^4}$ et $\boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$.

Partie 3

15 – On sait que $\prod_{k=1}^r (a_{k,0} + a_{k,1}) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_r) \in \{0,1\}^r} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{r,i_r}$. Pour $a_{k,0} = 1$ et $a_{k,1} = x_k$ on a en ne gardant que les indices (k, i) où $i=1$: $\prod_{k=1}^r (1+x_k) = 1 + \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,r\} \\ I \neq \emptyset}} \prod_{i \in I} x_i$ puis en partitionnant suivant le cardinal de I : $\prod_{k=1}^r (1+x_k) = 1 + \sum_{m=1}^r \sum_{\substack{I \subset \{1,2,\dots,r\} \\ \text{card}(I)=m}} \prod_{i \in I} x_i = 1 + \sum_{m=1}^r \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} x_{i_1} \dots x_{i_m} \right)$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \prod_{k=1}^r (1+x_k) = 1 + \sum_{m=1}^r \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} x_{i_1} \dots x_{i_m} \right)}$$

16 – On procède par dissociation des cas :

- Pour $x \in A$: $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 0$, donc $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.
- Sinon, $x \in \bar{A}$ et $\mathbf{1}_A(x) = 0$, $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1$ et on a à nouveau $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

Dans tous les cas $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$ et donc $\boxed{\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A}$.

De la même manière :

- Si $x \in \bigcap_{i=1}^m A_i$ alors pour chaque i : $x \in A_i$ d'où $\mathbf{1}_{A_i}(x) = 1$ et $\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{A_i}(x) = 1 = \mathbf{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_m}(x)$.
- Sinon, il existe i_0 tel que $x \notin A_{i_0}$ et $\mathbf{1}_{A_{i_0}}(x) = 0$ d'où $\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{A_i}(x) = 0 = \mathbf{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_m}(x)$.

On a prouvé : $\boxed{\prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{A_i} = \mathbf{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_m}}$.

17 – Avec l'indication :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) = E(\mathbf{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_r}) = E(1 - \mathbf{1}_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_r}) = 1 - E(\mathbf{1}_{\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_r}) = 1 - E\left(\prod_{i=1}^r \mathbf{1}_{\bar{A}_i}\right) = 1 - E\left(\prod_{i=1}^r (1 - \mathbf{1}_{A_i})\right)$$

On utilise alors la formule du 15 (valable pour des réels, et *a fortiori* pour des fonctions réelles) :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) &= 1 - E\left(\prod_{i=1}^r (1 - \mathbf{1}_{A_i})\right) = 1 - E\left(1 + \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} (-1)^m \mathbf{1}_{A_{i_1}} \dots \mathbf{1}_{A_{i_m}}\right) \\ &= \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} E(\mathbf{1}_{A_{i_1}} \dots \mathbf{1}_{A_{i_m}}) = \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} E(\mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}}) \end{aligned}$$

$$\text{Et on obtient : } \boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^r A_i\right) = \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m})}$$

Cette formule porte le nom de formule du crible.

18 – On a :

$$\overline{S_n(k)} = \{m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists j \in \llbracket 1, r \rrbracket, p_j^k | m\} = \{m \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists j \in \llbracket 1, r \rrbracket, m \in A_n(p_j^k)\} = \bigcup_{j=1}^r A_n(p_j^k)$$

On en déduit : $q_n(k) = 1 - P_n\left(\bigcup_{i=1}^r A_n(p_i^k)\right)$. Avec la formule du crible :

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} P\left(A_n(p_{i_1}^k) \cap \dots \cap A_n(p_{i_m}^k)\right)$$

Les p_i étant deux à deux premiers entre eux, il en est de même pour les p_i^k et on a donc l'équivalence, pour $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $(p_{i_1}^k | x \text{ et } p_{i_2}^k | x \text{ et } \dots \text{ et } p_{i_m}^k | x) \Leftrightarrow p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k | x$. Autrement dit : $A_n(p_{i_1}^k) \cap \dots \cap A_n(p_{i_m}^k) = A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)$ et par la suite :

$$q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} P_n\left(A_n(p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k)\right)$$

19 – Notons tout d'abord que si $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors les multiples de x entre 1 et n sont les kx tels que $1 \leq k \leq \frac{n}{x}$. Il y en a donc $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ et $\text{card}(A_n(x)) = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ d'où $P_n(A_n(x)) = \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$. La formule ci-dessus s'écrit alors :

$$q_n(k) = 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k} \right\rfloor = 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \mu(p_{i_1} \dots p_{i_m}) \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^k p_{i_2}^k \dots p_{i_m}^k} \right\rfloor$$

Regardons maintenant l'autre membre :

- Pour $d = 1$, $\frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 1$.
- Pour $d > n$, $\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$ et $\frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$.
- Pour $d \geq 2$, ayant un facteur carré : $\frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$.
- Pour $2 \leq d \leq n$, sans facteur carré, d s'écrit $d = p_{i_1} \dots p_{i_m}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r$ et $\frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = \frac{1}{n} \mu(p_{i_1} \dots p_{i_m}) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor$.

Donc la somme $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor$ est finie (et la série est donc convergente) et peut être limitée

$$\text{à } 1 \leq d \leq n \text{ avec } d \text{ sans facteur carré : } \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 1 + \sum_{\substack{d=2 \\ d \text{ sans facteur carré}}}^n \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor.$$

Or les entiers $d \in \llbracket 2, n \rrbracket$ sans facteur carré sont exactement les entiers $d = p_{i_1} \dots p_{i_m}$ avec $1 \leq m \leq r$, $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r$ et vérifiant $p_{i_1} \dots p_{i_m} \leq n$. Comme il a été vu que $\frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$ lorsque $d > n$, on peut ignorer cette dernière close et écrire :

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \mu(p_{i_1} \dots p_{i_m}) \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1}^k \dots p_{i_m}^k} \right\rfloor$$

En reliant les deux calculs, on a bien : $q_n(k) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor$.

20 – Il est clair qu'avec la fonction de l'énoncé : $q_n(k) = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt$.

- Les f_n sont continues par morceaux sur $[1, +\infty[$.
- Pour $d \in \mathbb{N}^*$, $t \in [d, d+1[$, on a $f_n(t) = \frac{1}{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor$. Or l'encadrement $\frac{n}{d^k} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{d^k}$ montre que $\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{d^k}$ et de là : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{\mu(d)}{d^k}$. Donc $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers la fonction en escaliers (et donc continue par morceaux) f définie sur chaque $[d; d+1[$ par $f(t) = \frac{\mu(d)}{d^k}$.

- Reste la domination : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [1, +\infty[$ et $d = \lfloor t \rfloor$:

$$|f_n(t)| = \frac{1}{n} |\mu(d)| \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \leq \frac{1}{d^k} \text{ (majoration indépendante de } n)$$

On définit la fonction g en escaliers sur $[1, +\infty[$ par $\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [d, d+1[, g(t) = \frac{1}{d^k}$. On a alors (intégrale d'une fonction positive) : $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^k} = \zeta(k) < \infty$ (car $k \geq 2$). Donc g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Avec le théorème de convergence dominée : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$.

Partie 4

21 – Par définition même de F_n on a $F_n \subset E_n$. De plus, si $(i, j) \in E_n$ alors $1 \leq i, j \leq n$ donc $1 \leq ij \leq n^2$ et $(i, j) \in F_{n^2}$. Ainsi $F_n \subset E_n \subset F_{n^2}$.

On a $0 \leq w_m = \sum_{d|m} \frac{|\mu(d)|}{d^s} \times \frac{d^s}{m^s} \leq \sum_{d|m} \frac{1}{m^s}$. De là :

$$0 \leq S_N \leq \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} \frac{1}{m^s} = \sum_{m=1}^N \sum_{\substack{1 \leq d, q \\ dq=m}} \frac{1}{m^s} = \sum_{\substack{1 \leq d, q \\ dq \leq N}} \frac{1}{d^s q^s} = \sum_{(d, q) \in F_N} \frac{1}{d^s q^s} \leq \sum_{(d, q) \in E_N} \frac{1}{d^s q^s} = \left(\sum_{d=1}^N \frac{1}{d^s} \right) \left(\sum_{q=1}^N \frac{1}{q^s} \right) \leq \zeta(s)^2$$

Ainsi la suite croissante $(S_N)_N$ (car sommes partielles d'une série à termes positifs) est majorée et ainsi : la suite $(S_N)_N$ converge.

On a alors : $S_n = \sum_{m=1}^n \sum_{d|m} \frac{|\mu(d)|}{d^s} = \sum_{(d,q) \in F_n} \frac{|\mu(d)|}{d^s}$ et on pose $T_n = \sum_{(d,q) \in E_n} \frac{|\mu(d)|}{d^s}$ et on a par positivité avec l'inclusion ensembliste ci-dessus : $S_n \leq T_n \leq S_{n^2}$. Comme $(S_n)_n$ converge et en appelant ℓ sa limite, on a par suite extraite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n^2} = \ell$ et avec le lemme de la maréchaussée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$\text{Or } T_n = \sum_{d=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{|\mu(d)|}{d^s q^s} = \left(\sum_{d=1}^n \frac{|\mu(d)|}{d^s} \right) \left(\sum_{q=1}^n \frac{1}{q^s} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^s} \right) \zeta(s)$$

Finalement :

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \sum_{d|N} |u_d| v_{\frac{N}{d}} = \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^s} \right) \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^s} \right)$$

22 – Toujours en recyclant les calculs précédents :

$$\left| \left(\sum_{i=1}^N u_i \right) \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) - \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right| = \left| \sum_{(i,j) \in E_N} u_i v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} u_i v_j \right| = \left| \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} u_i v_j \right| \leq \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} |u_i v_j|$$

Ainsi par positivité des v_j et sachant $F_n \subset E_n$:

$$\left| \left(\sum_{i=1}^N u_i \right) \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) - \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right| \leq \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j$$

$$\text{Or } \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| v_j - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| v_j = T_N - S_N \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \left(\sum_{i=1}^N u_i \right) \left(\sum_{i=1}^N v_i \right) - \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}} \right| = 0 \text{ et}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i \right) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} v_i \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{d|m} u_d v_{\frac{m}{d}}, \text{ c'est-à-dire : } \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^s} \frac{1}{(\frac{m}{d})^s} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{m^s}$$

$$\text{On a donc laborieusement montré : } \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d|m} \mu(d).$$

23 – Le résultat étant immédiat pour $m=1$, on suppose désormais $m \geq 2$. On considère la décomposition de m en facteurs premiers : $m = q_1^{\alpha_1} \cdots q_N^{\alpha_N}$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{N}^*$, $q_1, \dots, q_N$ premiers et deux à deux distincts. En ne gardant que les diviseurs de m sans facteur carré :

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \mu(d) &= \mu(1) + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \mu(q_{i_1} \cdots q_{i_k}) \right) = 1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k \text{card} \left\{ (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, N \rrbracket^k, i_1 < \dots < i_k \right\} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-1)^k = (1-1)^N \end{aligned}$$

$$\text{Donc pour } m \geq 2 : \sum_{d|m} \mu(d) = 0.$$

$$24 - \text{Ainsi } \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \left(\sum_{d|m} \mu(d) \right) = 1 \text{ et l'égalité de Q22 devient } \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \right) \zeta(s) = 1 \text{ et finalement :}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

25 – Il résulte de l'égalité ci-dessus et de Q20 que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \frac{1}{\zeta(k)}$.

Avec les résultats de la partie 3, on a montré l'approximation : pour n 'grand', la probabilité pour qu'un nombre entre 1 et n soit sans facteur à la puissance k est approximativement $\frac{1}{\zeta(k)}$

Avec les valeurs obtenues à la question 14 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(2) = \frac{6}{\pi^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(4) = \frac{90}{\pi^4}$.