

Corrigé de l'épreuve Mathématiques, Mines-Ponts II, 2026, filière PSI.
Version provisoire du 01/05/2026

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*

Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

Probabilité qu'un entier choisi au hasard et uniformément dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ soit sans facteur à la puissance k

Partie 1 : Calcul de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$

(1) On a, par linéarité de l'intégrale et somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 e^{i\theta} \sum_{k=1}^n (te^{i\theta})^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} (te^{i\theta})^k dt \\ &= \boxed{\int_0^1 e^{i\theta} \frac{1 - (te^{i\theta})^n}{1 - te^{i\theta}} dt}. \end{aligned}$$

(2) De là,

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1}{1 - te^{i\theta}} dt + \int_0^1 e^{i\theta} \frac{t^n e^{in\theta}}{1 - te^{i\theta}} dt.$$

Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la fonction continue $t \mapsto 1 - te^{i\theta}$ ne s'annule pas sur le segment $[0, 1]$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe donc un réel $m > 0$ tel que

$$\forall t \in [0, 1], |1 - te^{i\theta}| \geq m.$$

On a alors

$$0 \leq \left| \int_0^1 e^{i\theta} \frac{t^n e^{in\theta}}{1 - te^{i\theta}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{m} dt = \frac{1}{m(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1}{1 - te^{i\theta}} dt,$$

ce qui signifie que la série $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} dt}.$$

(3) Comme une série de nombres complexes converge si et seulement la série des parties réelles et la série des parties imaginaires convergent, on en déduit en prenant la partie imaginaire que $\sum \frac{\sin(k\theta)}{k}$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} \right) dt.$$

Or,

$$\frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta}(1 - te^{-i\theta})}{1 + t^2 - 2t \cos(\theta)} = \frac{e^{i\theta} - t}{1 + t^2 - 2t \cos(\theta)}$$

et donc

$$\operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\theta}}{1 - te^{i\theta}} \right) = \frac{\sin(\theta)}{1 + t^2 - 2t \cos(\theta)}.$$

Suivons alors l'indication : la fonction

$$t \mapsto u_\theta(t) = \arctan \left(\frac{t \sin(\theta)}{1 - t \cos(\theta)} \right).$$

Comme $\theta \in]0, \pi[$, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$u'_\theta(t) = \frac{\sin(\theta)(1 - t \cos(\theta)) + t \sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 - t \cos(\theta))^2} \frac{1}{1 + \frac{t^2 \sin^2(\theta)}{(1 - t \cos(\theta))^2}} = \frac{\sin(\theta)}{1 + t^2 - 2t \cos(\theta)}.$$

Finalement, il vient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = u_\theta(1) - u_\theta(0) = \arctan \left(\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \right).$$

Or,

$$\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \sin^2(\theta/2)} = \frac{1}{\tan(\theta/2)}.$$

En utilisant la formule classique

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2,$$

il vient

$$\arctan \left(\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan(\theta/2)).$$

Et comme $\theta/2 \in]0, \pi/2[$, on obtient au bout du bout

$$\boxed{\forall \theta \in]0, \pi[, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi - \theta}{2}}.$$

Remarquons que cette formule est encore valable pour $\theta = \pi$.

(4) Posons pour $n \geq 1$,

$$v_n : t \mapsto \frac{\cos(nt)}{n^2}.$$

Chaque v_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |v_n(t)| = \frac{1}{n^2}.$$

Comme série de Riemann d'exposant $2 > 1$, la série $\sum \sup_{t \in \mathbb{R}} |v_n(t)|$ est convergente. Ceci montre que

la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente sur

$\mathbb{R}$. On en déduit que $t \mapsto S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme limite uniforme de fonctions continues.

(5) Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. Posons

$$\theta \mapsto V_n(\theta) = \sum_{k=1}^n v_n(\theta).$$

Chaque V_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et

$$\forall \theta \in [0, \pi], V'_n(\theta) = - \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}.$$

La suite (V'_n) converge simplement vers $\theta \mapsto \frac{\theta - \pi}{2}$ sur $]0, \pi]$ mais on a mieux. Soit $a \in]0, \pi]$. Raffinons l'argument développé en (2) : la fonction

$$(t, \theta) \mapsto |1 - te^{i\theta}|$$

est continue et ne s'annule pas sur $[0, 1] \times [a, \pi]$, qui est fermé et borné. D'après le théorème des bornes atteintes, on en déduit comme en (2) (la partie imaginaire d'un nombre complexe est bornée par son module) que

$$\forall \theta \in [a, \pi], \left| V'_n(\theta) - \frac{\theta - \pi}{2} \right| \leq \frac{1}{m_a(n+1)}$$

où

$$m_a = \min_{(t, \theta) \in [0, 1] \times [a, \pi]} |1 - te^{i\theta}| > 0.$$

Ceci montre que la suite (V'_n) converge uniformément vers $\theta \mapsto \frac{\theta - \pi}{2}$ sur $[a, \pi]$. On en déduit que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, \pi]$ pour tout $a > 0$ et que

$$\forall \theta \in [a, \pi], S'(\theta) = \frac{\theta - \pi}{2}.$$

Par intégration entre a et θ , il vient

$$\forall \theta \in [a, \pi[, S(\theta) = \frac{(\theta - a)^2}{4} - \frac{\pi(\theta - a)}{2} + S(a).$$

Comme S est continue en 0, on peut passer à la limite quand a tend vers 0 et il vient

$$\forall \theta \in]0, \pi], S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0).$$

Cette égalité est encore vraie en $\theta = 0$ donc

$$\boxed{\forall \theta \in [0, \pi], S(\theta) = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + S(0)}.$$

Commentaire personnel : ce début de sujet me semble plutôt soutenu.

(6) A x fixé, notons pour $n \geq 1$,

$$t \mapsto w_n(t) = \frac{\cos(nt)}{n^2(n^2 + x^2)}.$$

La fonction w_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, w'_n(t) = -\frac{\sin(nt)}{n(n^2 + x^2)} \text{ et } w''_n(t) = -\frac{\cos(nt)}{n^2 + x^2}.$$

En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |w_n(t)| \leq 1/n^4, |w'_n(t)| \leq 1/n^3 \text{ et } |w''_n(t)| \leq 1/n^2.$$

Par domination par des séries de Riemann convergentes, les séries $\sum w_n$, $\sum w'_n$ et $\sum w''_n$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ (la convergence simple suffit pour les deux premières) et le théorème de $\mathcal{C}^2$ -dérivation des séries de fonctions permet d'assurer que $g_x = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g''_x(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2 + x^2}.$$

De là,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, g''_x(t) - x^2 g_x(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(nt)}{n^2 + x^2} + \frac{x^2 \cos(nt)}{n^2(n^2 + x^2)} \right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2} = -S(t)}.$$

(7) On écrit $P(t) = at^2 + bt + c$. On a

$$P''(t) - x^2 P(t) = 2a - ax^2 t^2 - bx^2 t - x^2 c = -\frac{t^2}{4} + \frac{\pi t}{2} - S(0).$$

Il suffit de poser

$$a = \frac{1}{4x^2}, b = -\frac{\pi}{2x^2} \text{ et } c = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2x^2} + S(0) \right).$$

(8) D'après (6), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'_x(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n(n^2 + x^2)}$$

$$\text{et donc } g'_x(0) = g'_x(\pi) = 0.$$

D'après (6) et (7) dont on reprend les notations, $g_x - P$ est solution de l'équation homogène sur $[0, \pi[$

$$y'' - x^2 y = 0.$$

Il existe donc A et B tels que

$$\forall t \in [0, \pi[, g_x(t) = P(t) + Ae^{xt} + Be^{-xt}.$$

Par continuité de toutes ces fonctions, cette relation est encore valable en π .

Les conditions $g'_x(0) = g'_x(\pi) = 0$ donnent

$$0 = -\frac{\pi}{2x^2} + Ax - Bx \text{ et } 0 = 0 + Axe^{\pi x} - Bxe^{-\pi x}.$$

On obtient $B = Ae^{2\pi x}$ puis

$$Ax = \frac{\pi}{2x^2(1 - e^{2\pi x})} \text{ et } Bx = \frac{\pi e^{2\pi x}}{2x^2(1 - e^{2\pi x})}.$$

On obtient enfin

$$g''_x(0) = P''(0) + Ax^2 + Bx^2 = \frac{1}{2x^2} + \frac{\pi}{2x} \frac{1 + e^{2\pi x}}{1 - e^{2\pi x}} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \frac{1 + e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}}.$$

(9) D'après (6), on a aussi

$$g''_x(0) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

En comparant les deux expressions, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 + x^2} = -1 + \pi x \frac{1 + e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} = -1 + \pi x + 2\pi x \frac{e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} = -1 + \pi x + \frac{2\pi x}{e^{2\pi x} - 1}.$$

On obtient enfin

$$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x} - 1} = 1 - \pi x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 + x^2}.$$

Partie 2 : Développement en série entière de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ et applications

(10) On reconnaît à nouveau une somme géométrique. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k &= \frac{1}{n^2} \frac{1 - (-x^2/n^2)^{N+1}}{1 - (-x^2/n^2)} \\ &= \frac{1 - (-x^2/n^2)^{N+1}}{n^2 + x^2} \\ &= \frac{1}{n^2 + x^2} - \frac{(-x^2/n^2)^{N+1}}{n^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^N \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k + (-1)^{N+1} \frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}(n^2 + x^2)}.$$

Puis,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}(n^2 + x^2)}.$$

En observant que

$$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq 1,$$

il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |R_{N,n}(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2N+2}}{n^{2N+2}} = |x|^{2N+2} \zeta(2N+2).$$

(11) Pour $x \geq 2$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$$

pour tout n . La série de fonctions $x \mapsto \frac{1}{n^x}$ converge donc normalement et donc uniformément sur $[2, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Le théorème de la double-limite implique donc que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

On a alors, par linéarité de la somme de séries convergentes

$$(\star) : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^2} = x^2 \sum_{k=0}^N \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(-\frac{x^2}{n^2} \right)^k + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k x^{2k+2} \zeta(2k+2) + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x).$$

Or, comme $|x| < 1$,

$$0 \leq \left| x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_{N,n}(x) \right| \leq |x|^{2N+4} \zeta(2N+2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \times 1 = 0.$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans $(\star)$, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k+2} \zeta(2k+2) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} (-1)^{j+1} \zeta(2j) x^{2j}.$$

(12) En changeant x en $x/2\pi$ dans (9), on a

$$h(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(x/2\pi)^2}{n^2 + (x/2\pi)^2}.$$

Comme $|x/2\pi| < 1$, on peut appliquer (11) et il vient

$$h(x) = 1 - \frac{x}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(2k) \frac{x^{2k}}{2^{2k} \pi^{2k}} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}.$$

Ceci montre que h est développable en série entière et que le rayon de convergence de la série est supérieur ou égal à 2π .

On a

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} x^k.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, il vient

$$\boxed{b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2} \text{ et pour } k \geq 1, b_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{(2k)! \zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \text{ et } b_{2k+1} = 0}.$$

(13) Le développement en série entière de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ est égal à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a en suivant l'indication

$$\forall x \in]-2\pi, 2\pi[, 1 = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j x^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{(i+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} \right) x^n = 1.$$

A nouveau par unicité des coefficients d'un développement en série entière, il vient

$$\boxed{\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = 0}.$$

(14) En appliquant (13) pour $n = 2$, on a

$$\frac{b_0}{3!} + \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{2!} = 0$$

d'où

$$\boxed{b_2 = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}}.$$

En appliquant (13) pour $n = 4$, il vient

$$\frac{b_0}{5!} + \frac{b_1}{4!} + \frac{b_2}{2! \times 3!} + 0 + \frac{b_4}{4!} = 0$$

d'où

$$\boxed{b_4 = 24 \left(-\frac{1}{120} + \frac{1}{48} - \frac{1}{72} \right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}}.$$

A l'aide de (12), on en déduit que

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{2\pi^2}{2} \times b_2 = \frac{\pi^2}{6}}$$

et

$$\boxed{\zeta(4) = -\frac{8\pi^4}{24} \times b_4 = \frac{\pi^4}{90}}.$$

Partie 3 : Probabilité qu'un entier choisi au hasard et uniformément dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ soit sans facteur à la puissance k

(15) En développant

$$\prod_{i=1}^r (1 + x_i) = (1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_r),$$

il n'y a qu'une seule façon de fabriquer 1 : en prenant tous les 1. Les autres facteurs consistent à sélectionner $m \geq 1$ facteurs x_i , disons $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ avec $i_1 < \dots < i_m$ et à compléter avec les 1. Ceci rend la formule demandée évidente mais j'imagine que les correcteurs attendent plutôt une récurrence sur r .

(16) C'est du cours et c'est par ailleurs évident.

(17) Comme $\bigcup_{i=1}^r A_i = \bigcap_{i=1}^r \overline{A_i}$, on a à l'aide de (14) et (15) et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_r) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_r}) \\ &= 1 - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_r}}) \\ &= 1 - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\overline{A_1}} \cdots \mathbf{1}_{\overline{A_r}}) \\ &= 1 - \mathbb{E}((1 - \mathbf{1}_{A_1})(1 - \mathbf{1}_{A_2}) \cdots (1 - \mathbf{1}_{A_r})) \\ &= 1 - \mathbb{E} \left(1 + \sum_{m=1}^r \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} (-1)^{i_1} \cdots (-1)^{i_m} \right) \right) \\ &= 1 - 1 - \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} (-1)^m \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_{i_1}} \cdots \mathbf{1}_{A_{i_m}}) \\ &= \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}}) \\ &= \boxed{\sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})}. \end{aligned}$$

(18) Par définition,

$$S_n(k) = \bigcap_{j=1}^r \overline{A_n(p_j^k)} = \overline{\bigcup_{j=1}^r A_n(p_j^k)}.$$

Et donc par (17),

$$q_n(k) = P_n(S_n(k)) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^r A_n(p_j^k) \right) = 1 - \sum_{m=1}^r (-1)^{m+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} P_n(A_n(p_{i_1}^k) \cap \dots \cap A_n(p_{i_m}^k)).$$

Or, comme les p_{i_l} sont des entiers premiers deux à deux distincts, pour tout entier s , on a l'équivalence

$$(\forall l \in \llbracket 1; m \rrbracket, p_{i_l}^k \text{ divise } s) \Leftrightarrow p_{i_1}^k \cdots p_{i_m}^k \text{ divise } s.$$

Ceci signifie que

$$A_n(p_{i_1}^k) \cap \dots \cap A_n(p_{i_m}^k) = A_n(p_{i_1}^k \cdots p_{i_m}^k)$$

et donc finalement que

$$\boxed{q_n(k) = 1 + \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} P_n(A_n(p_{i_1}^k \cdots p_{i_m}^k))}.$$

(19) Commençons par remarquer que si la décomposition en facteurs premiers de $d \in \mathbb{N}^*$ contient un facteur premier p_i avec $i \geq r + 1$, alors $n/d^k < 1$ pour tout k et donc $\lfloor n/d^k \rfloor = 0$.

On a

$$\begin{aligned}
q_n(k) &= 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \text{card} (A_n(p_{i_1}^k \dots p_{i_m}^k)) \\
&= 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r (-1)^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \left\lfloor \frac{n}{(p_{i_1} \dots p_{i_m})^k} \right\rfloor \\
&= 1 + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} (-1)^m \left\lfloor \frac{n}{(p_{i_1} \dots p_{i_m})^k} \right\rfloor \\
&= \frac{1}{n} \mu(1) \lfloor n/1 \rfloor + \frac{1}{n} \sum_{m=1}^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r} \mu(p_{i_1} \dots p_{i_m}) \left\lfloor \frac{n}{(p_{i_1} \dots p_{i_m})^k} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Dans la somme précédente apparaissent explicitement tous les entiers $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ produits de facteurs premiers distincts mais comme $\mu(d) = 0$ si d possède un facteur carré, on a bien

$$q_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor.$$

(20) Avec les notations de l'énoncé, on a

$$q_n(k) = \int_1^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Soit f la fonction constante par morceaux sur $[1, +\infty[$ et définie par

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [d, d+1[, f(t) = \frac{1}{d^k}.$$

Comme $k \geq 2$, f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et comme $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et comme $\lfloor x \rfloor \leq x$, on a

$$\forall t \in [1, +\infty[, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \frac{\mu(d)}{d^k} \text{ et } |f_n(t)| \leq f(t).$$

Par convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \int_1^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}.$$

Partie 4 : Calcul de la somme $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}$

(21) Les inclusions $\boxed{F_N \subset E_N \subset F_{N^2}}$ sont immédiates.

La série $\sum w_m$ est à termes positifs et pour tout N ,

$$0 \leq \sum_{m=1}^N w_m \leq \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} \frac{1}{d^s} \frac{1}{(m/d)^s} = \sum_{(i,j) \in F_N} \frac{1}{i^s j^s} \leq \sum_{(i,j) \in E_N} \frac{1}{i^s j^s} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{i^s} \frac{1}{j^s} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i^s} \right)^2 \leq \zeta(s)^2.$$

Ceci montre que $\sum w_m$ est une série convergente et donc que la suite $(S_N)_{N \geq 1}$ est convergente.
Comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N w_m &= \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} \frac{|\mu(d)|}{d^s} \frac{1}{(m/d)^s} = \sum_{(i,j) \in F_N} \frac{|\mu(i)|}{i^s j^s} \\ &\leq \sum_{(i,j) \in E_N} \frac{|\mu(i)|}{i^s j^s} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{|\mu(i)|}{i^s} \frac{1}{j^s} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{|\mu(i)|}{i^s} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^s} \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{m=1}^{+\infty} w_m \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}.$$

En utilisant l'inclusion $E_N \subset F_{N^2}$, le même raisonnement montre que

$$\sum_{m=1}^{N^2} w_m = \sum_{(i,j) \in F_{N^2}} \frac{|\mu(i)|}{i^s j^s} \geq \sum_{(i,j) \in E_N} \frac{|\mu(i)|}{i^s j^s} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{|\mu(i)|}{i^s} \frac{1}{j^s} = \sum_{i=1}^N \frac{|\mu(i)|}{i^s} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j^s}.$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, il vient

$$\sum_{m=1}^{+\infty} w_m \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}$$

et enfin

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty} w_m = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|\mu(i)|}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}}.$$

(22) On a

$$\left| \sum_{i=1}^N u_i \sum_{j=1}^N v_j - \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} u_d v_{m/d} \right| = \left| \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} u_i v_j \right| \leq \sum_{(i,j) \in E_N \setminus F_N} |u_i| |v_j| = \sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| |v_j| - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| |v_j|.$$

D'après (21),

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{(i,j) \in E_N} |u_i| |v_j| - \sum_{(i,j) \in F_N} |u_i| |v_j| \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} w_m - \sum_{m=1}^{+\infty} w_m = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^N u_i \sum_{j=1}^N v_j - \sum_{m=1}^N \sum_{d|m} u_d v_{m/d} \right) = 0$$

et comme

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N u_i \sum_{j=1}^N v_j = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s},$$

il vient

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{d|m} u_d v_{m/d} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}.$$

Or,

$$\sum_{d|m} u_d v_{m/d} = \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^s} \frac{1}{(m/d)^s} = \frac{1}{m^s} \sum_{d|m} \mu(d).$$

Au bout du bout du bout, on a

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s}}.$$

- (23) Si $m \geq 2$, les seuls diviseurs contribuant non trivialement dans la somme sont les produits de nombres premiers distincts divisant m . Notons

$$q_1 < \dots < q_s$$

les nombres premiers divisant m . On a alors

$$\boxed{\sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{k=0}^s \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s} (-1)^k = \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{s}{k} = (1-1)^s = 0}.$$

- (24) A l'aide de (22) et (23), on a de suite

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} = 1$$

et donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^s} = \frac{1}{\zeta(s)}}.$$

- (25) A l'aide de (20) et de (14), il vient

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(k) = \frac{1}{\zeta(k)}, \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(2) = \frac{6}{\pi^2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n(4) = \frac{90}{\pi^4}}.$$

Commentaire personnel : sujet complètement inadapté à la filière PSI. De plus, la première partie est beaucoup trop technique et difficile pour les candidats visant Mines-Télécom.