

PROBLÈME 1

Calcul d'une intégrale via les nombres complexes

Partie I - Lemme préliminaire

- Q1.** Le polynôme $X^2 - 2aX + 1$ est unitaire et à coefficients complexes donc scindé; notons α et β ses racines (éventuellement confondues), on peut écrire $X^2 - 2aX + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)$, d'où le résultat.
- Q2.** En développant le membre de droite de l'égalité précédente, on obtient $X^2 - 2aX + 1 = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$. Par unicité des coefficients, $\alpha + \beta = 2a$ et $\alpha\beta = 1$.
- Q3.** Supposons que $|\alpha| \geq 1$; en particulier, $\alpha \neq 0$ et on a donc, d'après l'une des égalités précédentes, $\beta = \frac{1}{\alpha}$ d'où $|\beta| = \frac{1}{|\alpha|} \leq 1$. Comme on a $|\beta| \geq 1$ par hypothèse, on en déduit $|\beta| = 1$ puis $|\alpha| = 1$. L'inégalité triangulaire nous permet de conclure que $2|a| = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2$, donc $|a| \leq 1$.
- Q4.** La conclusion de la question précédente, $|a| \leq 1$, est en contradiction avec l'hypothèse $|a| > 1$ de la partie. On en déduit que les hypothèses de la question étaient fausses. Il est faux que $|\alpha| \geq 1$ et $|\beta| \geq 1$, autrement dit on a $|\alpha| < 1$ ou $|\beta| < 1$.
- Q5.** Si $a = 2$, le polynôme $X^2 - 2aX + 1$ se réécrit $X^2 - 4X + 1 = (X - 2)^2 - 3 = (X - 2 - \sqrt{3})(X - 2 + \sqrt{3})$. Les nombres α et β sont donc respectivement égaux à $2 \pm \sqrt{3}$.

Partie II - Calcul d'une intégrale

II.1 - Une première expression en série trigonométrique

- Q6.** Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $|\cos t| \leq 1 < |a|$ donc en particulier $a \neq \cos t$, ainsi $a - \cos t \neq 0$.
- Q7.** La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ par composition (le dénominateur ne s'annulant pas d'après la question précédente). Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a, par parité et 2π -périodicité du cosinus :

$$f(-t) = \frac{1}{a - \cos(-t)} = \frac{1}{a - \cos t} = f(t) \quad \text{et} \quad f(t + 2\pi) = \frac{1}{a - \cos(t + 2\pi)} = \frac{1}{a - \cos t} = f(t)$$

- Q8.** La fonction f étant paire et 2π -périodique, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $b_n = 0$ et :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt; \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt.$$

- Q9.** La fonction f est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ (en particulier, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier est donc égale à sa régularisée; mais s'agissant d'une fonction continue, elle est par ailleurs égale à sa régularisée. La fonction f est donc égale à sa série de Fourier :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt).$$

II.2 - Une seconde expression en série trigonométrique

- Q10.** On utilise la formule d'Euler pour le cosinus, puis on multiplie numérateur et dénominateur par $-2e^{it}$: pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{1}{a - \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})} = \frac{-2}{e^{it} - 2a + e^{-it}} = \frac{-2e^{it}}{e^{2it} - 2ae^{it} + 1}.$$

- Q11.** On reconnaît au dénominateur de la question précédente l'expression $z^2 - 2az + 1$ avec $z = e^{it} \in \mathbf{C}$. D'après la première partie, on peut réécrire ce dénominateur sous la forme $(z - \alpha)(z - \beta)$, ce qui donne la première expression demandée.

Dans un second temps, on ramène le membre de droite de l'égalité au même dénominateur :

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \left(\frac{\alpha e^{-it}}{1-\alpha e^{-it}} + \frac{1}{1-\alpha e^{it}} \right) = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \frac{(1-\alpha e^{it})\alpha e^{-it} + 1-\alpha e^{-it}}{(1-\alpha e^{-it})(1-\alpha e^{it})} = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \frac{-\alpha^2 + 1}{(1-\alpha e^{-it})(1-\alpha e^{it})}.$$

Le facteur $1-\alpha^2$ se simplifie, on multiplie alors cette fraction au numérateur et au dénominateur par $-\beta e^{it}$, en se souvenant que $\alpha\beta = 1$:

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \frac{-\alpha^2 + 1}{(1-\alpha e^{-it})(1-\alpha e^{it})} = \frac{-2e^{it}}{e^{it}(1-\alpha e^{-it})(-\beta)(1-\alpha e^{it})} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it}-\alpha)(-\beta+e^{it})},$$

et on retrouve bien la première expression de cette question.

Q12. C'est une série géométrique, de rayon 1 et de somme $\frac{1}{1-z}$.

Q13. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|\alpha e^{-it}| = |\alpha| < 1$ d'après la première partie, on peut donc écrire le développement en série entière de la question précédente :

$$\frac{\alpha e^{-it}}{1-\alpha e^{-it}} = \alpha e^{-it} \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha e^{-it})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} e^{-i(n+1)t}.$$

De même, $|\alpha e^{it}| < 1$ donc

$$\frac{1}{1-\alpha e^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha e^{it})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{int}.$$

On effectue un changement d'indice dans la première expression :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} e^{-i(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{-int};$$

et on isole le terme $n = 0$ dans la deuxième avant de regrouper les deux sommes et d'appliquer la formule d'Euler :

$$\frac{\alpha e^{-it}}{1-\alpha e^{-it}} + \frac{1}{1-\alpha e^{it}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{-int} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{int} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n (e^{int} + e^{-int}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos(nt).$$

Q14. On multiplie l'expression de la question précédente par $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ pour retrouver $f(t)$: pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{4\alpha}{1-\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos(nt) = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2} \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \cos(nt)$$

avec les expressions de γ_n données dans l'énoncé.

Q15. Exception faite du terme d'indice $n = 0$, la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est géométrique de raison α . En particulier, la suite $(|\gamma_n|)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est géométrique de raison $|\alpha| \in]0; 1[$, c'est donc le terme général d'une série convergente. Ceci démontre que la série de terme général γ_n est absolument convergente.

II.3 - Conclusion

Q16. On a montré deux expressions différentes de $f(t)$ pour tout réel t :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) \quad \text{et} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \cos(nt).$$

Par différence, on a bien :

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \gamma_n) \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nt).$$

Q17. a) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et périodique de période $T > 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t+T) = \varphi(t)$. Par dérivation des fonctions composées, on a donc $\varphi'(t+T) = \varphi'(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ce qui prouve que φ' est T -périodique.

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ par opérations, la fonction $\cos$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$; en particulier, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$.

c) Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n = 0$, remarquons que $\int_0^{2\pi} f''(t) dt = [f'(t)]_0^{2\pi} = 0$ puisque la fonction f' est 2π -périodique (d'après la question précédente). Ceci prouve donc l'égalité souhaitée.

Supposons maintenant $n > 0$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$ et la fonction $t \mapsto \cos(nt)$ continue, par double intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt &= \left[f(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f'(t) \sin(nt) dt \\ &= -\frac{1}{n} \left[f'(t) \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f''(t) \frac{-\cos(nt)}{n} dt = -\frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt, \end{aligned}$$

les deux crochets étant successivement nuls car les fonctions $t \mapsto f(t) \sin(nt)$ et $t \mapsto f'(t) \cos(nt)$ sont 2π -périodiques. Ceci démontre le résultat attendu.

d) D'après les expressions établies dans la question Q8 et la question précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt.$$

En passant à la valeur absolue, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| |\cos(nt)| dt \leq \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt,$$

la dernière inégalité par croissance de l'intégrale car $|\cos(nt)| \leq 1$ pour tout $t \in [0; 2\pi]$ et les bornes de l'intégrale sont bien croissantes ($0 \leq 2\pi$).

e) On peut réécrire l'inégalité de la question précédente sous la forme : $\forall n \geq 1 \quad |a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ avec $M \in \mathbf{R}$ une quantité indépendante de n . On sait que la série de terme général $\frac{M}{n^2}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $2 > 1$), on en déduit que la série de terme général $|a_n|$ est convergente, par théorème de comparaison (le terme $|a_n|$ étant évidemment positif). Autrement dit, la série de terme général a_n est absolument convergente.

On a montré à la question Q15 que la série de terme général γ_n est absolument convergente. La série de terme général u_n est donc, comme somme de deux séries absolument convergentes, une série absolument convergente.

Q18. D'après le théorème admis dans l'énoncé, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$ c'est-à-dire $a_n = \gamma_n$. Écrivons explicitement cette égalité pour $n = 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \cos(t)} dt = \frac{4\pi\alpha}{1-\alpha^2};$$

on reconnaît bien l'égalité demandée pour $n = 0$.

De même, pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \cos(t)} \cos(nt) dt = \frac{4\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}, \quad \text{soit} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt = \frac{4\pi\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}.$$

Q19. D'après la question Q5, pour $a = 2$, on a $\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$; choisissons arbitrairement le signe + (on pourrait obtenir un résultat final identique en prenant le signe -). Ainsi, d'après le cas $n = 0$ de la question précédente :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \cos(t)} = \frac{4\pi(2 + \sqrt{3})}{1 - (2 + \sqrt{3})^2} = \frac{4\pi(2 + \sqrt{3})}{1 - 4 - 4\sqrt{3} - 3} = \frac{4\pi(2 + \sqrt{3})}{-6 - 4\sqrt{3}} = -\frac{2\pi(2 + \sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3})}{9 - 12} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

PROBLÈME 2

Matrices aléatoires

Partie I - Généralités sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$

Q20. Le produit AB^T est donné par :

$$AB^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 & a_1 b_3 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_2 & a_3 b_3 + a_4 b_4 \end{pmatrix},$$

on a donc bien $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^T) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = \sum_{k=1}^4 a_k b_k$.

Q21. Il s'agit de démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Il est clair, dans un premier temps, que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien défini sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors, la trace étant invariante par transposition :

$$\langle B, A \rangle = \text{Tr}(BA^T) = \text{Tr}((BA^T)^T) = \text{Tr}(AB^T) = \langle A, B \rangle,$$

ce qui démontre la symétrie.

Soient maintenant $A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité de la trace :

$$\langle \lambda A_1 + A_2, B \rangle = \text{Tr}((\lambda A_1 + A_2)B^T) = \text{Tr}(\lambda A_1 B^T + A_2 B^T) = \lambda \text{Tr}(A_1 B^T) + \text{Tr}(A_2 B^T) = \lambda \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle.$$

Ceci démontre la linéarité à gauche; on en déduit la linéarité à droite par symétrie, donc la bilinéarité.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors, d'après la question précédente, $\langle A, A \rangle = \sum_{k=1}^4 a_k^2 \geq 0$.

Enfin, supposons que $\langle A, A \rangle = 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^4 a_k^2 = 0$. S'agissant d'une somme de réels positifs, nécessairement chaque terme est nul; on a donc $a_k = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; autrement dit $A = 0$.

On a ainsi montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Q22. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On rappelle qu'une matrice est symétrique si et seulement si elle est égale à sa transposée, et antisymétrique si et seulement si elle est égale à l'opposé de sa transposée. On vérifie donc :

$$\left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T); \quad \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T).$$

D'autre part, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\langle A + A^T, A - A^T \rangle = \|A\|^2 - \underbrace{\langle A, A^T \rangle + \langle A^T, A \rangle}_{=0 \text{ par symétrie}} - \|A^T\|^2;$$

mais on peut remarquer, toujours d'après la question **Q20**, que $\|A^T\|^2 = \langle A^T, A^T \rangle$ est la somme des carrés des coefficients de A^T ; ceux-ci sont les mêmes que ceux de A , mais dans un ordre différent, les deux sommes sont donc identiques¹ : ainsi $\|A^T\| = \|A\|$. Le produit scalaire calculé ci-dessus est donc nul et les deux matrices étudiées sont orthogonales.

Q23. Il s'agit de vérifier que les sous-espaces vectoriels constitués respectivement des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sont supplémentaires.

Dans un premier temps, si A est une matrice à la fois symétrique et antisymétrique, alors $A = A^T = -A$ donc $A = 0$; les deux sous-espaces vectoriels sont donc en somme directe.

Dans un second temps, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on peut écrire :

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = M + N,$$

où M est symétrique et $N = \frac{1}{2}(A - A^T)$ est antisymétrique, d'après la question précédente.

On a donc démontré que toute matrice A peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique; la somme des deux sous-espaces vectoriels étant directe, cette décomposition est unique.

1. On vient en fait de démontrer que la transposition est une isométrie dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ muni de cette structure euclidienne.

Q24. Le sous-espace $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ est de dimension finie (puisque c'est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qui est de dimension finie). D'après le théorème de la projection,

$$d(A, \mathcal{S}_2(\mathbf{R})) = \|A - p(A)\|,$$

où $p(A)$ désigne le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_2(\mathbf{R})$.

Les deux questions précédentes nous permettent d'écrire $A = M + N$ avec $M \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})$ et $N \in \mathcal{S}_2(\mathbf{R})^\perp$; on en déduit que $p(A) = M$ et que $A - p(A) = N$. On a donc bien :

$$d(A, \mathcal{S}_2(\mathbf{R})) = \|N\| = \frac{1}{2} \|A - A^T\|.$$

Partie II - Matrice de Rademacher

Q25. On a $X_1(\Omega) = \{-1; 1\}$ donc $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) - \mathbf{P}(X_1 = -1) = 0$. D'autre part, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbf{V}(X_1) = \mathbf{E}(X_1^2) - \mathbf{E}(X_1)^2 = 1 - 0 = 1$ car X_1^2 est une variable aléatoire certaine de valeur 1.

Q26. On a $T_1(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$ et, par indépendance de X_1 et Y_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_1 = -2) &= \mathbf{P}(X_1 = -1 \cap Y_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = -1)\mathbf{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(T_1 = 2) &= \mathbf{P}(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{4} \\ \mathbf{P}(T_1 = 0) &= \mathbf{P}((X_1 = 1 \cap Y_1 = -1) \sqcup (X_1 = -1 \cap Y_1 = 1)) = \mathbf{P}(X_1 = 1 \cap Y_1 = -1) + \mathbf{P}(X_1 = -1 \cap Y_1 = 1) \\ &= \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}(Y_1 = -1) + \mathbf{P}(X_1 = -1)\mathbf{P}(Y_1 = 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(le symbole $\sqcup$ dénotant une union d'événements incompatibles).

Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(T_1) = \mathbf{E}(X_1 + Y_1) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(Y_1) = 0$. Enfin, X_1 et Y_1 étant indépendantes, on peut écrire $\mathbf{V}(T_1) = \mathbf{V}(X_1 + Y_1) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(Y_1) = 2$.

Q27. On a $Z(\Omega) = \{-1; 1\}$ et, par les mêmes arguments que précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_1 = 1) &= \mathbf{P}((X_1 = 1 \cap Y_1 = 1) \sqcup (X_1 = -1 \cap Y_1 = -1)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \\ \mathbf{P}(Z_1 = -1) &= \mathbf{P}((X_1 = 1 \cap Y_1 = -1) \sqcup (X_1 = -1 \cap Y_1 = 1)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire Z_1 suit donc également une loi de Rademacher; on en déduit, d'après la question **Q25**, que $\mathbf{E}(Z_1) = 0$ et $\mathbf{V}(Z_1) = 1$.

Partie III - Matrice géométrique

Q28. On a $\mathbf{E}(X_2) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X_2) = \frac{1-p}{p^2}$.

Q29. a) On applique le résultat de la **partie I** :

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \|\Sigma_2 - \Sigma_2^T\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & X_2 - Y_2 - X_2 - Y_2 \\ X_2 + Y_2 - X_2 + Y_2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & -2Y_2 \\ 2Y_2 & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-2Y_2)^2 + (2Y_2)^2 + 0^2} = Y_2 \sqrt{2} \end{aligned}$$

car Y_2 est à valeurs positives donc $\sqrt{Y_2^2} = Y_2$.

b) D'après la question précédente et par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(T_2) = \sqrt{2}\mathbf{E}(Y_2) = \frac{\sqrt{2}}{p}$. De plus, $\mathbf{V}(T_2) = \sqrt{2}^2 \mathbf{V}(Y_2) = \frac{2(1-p)}{p^2}$.

Q30. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\mathbf{P}(|T_2 - \mathbf{E}(T_2)| \geq \delta) \leq \frac{\mathbf{V}(T_2)}{\delta^2}$. D'après les valeurs calculées à la question précédente, on a donc :

$$\mathbf{P}\left(\left|T_2 - \frac{\sqrt{2}}{p}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{2(1-p)}{\delta^2 p^2}.$$

Q31. a) D'après la question précédente, il s'agit de résoudre :

$$\frac{2(1-\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}\delta^2} = \frac{1}{4} \iff \frac{4}{\delta^2} = \frac{1}{4} \iff \delta^2 = 16 \iff \delta = 4.$$

b) En reformulant les réponses des deux questions précédentes : $\mathbf{P}(|T_2 - 2\sqrt{2}| \geq 4) \leq \frac{1}{4}$. En passant à l'événement contraire et en utilisant le fait que $T_2 = d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbf{R}))$, on a bien :

$$\mathbf{P}(|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2) - 2\sqrt{2}| < 4) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Partie IV - Matrice de Poisson

Q32. On a $\mathbf{E}(X_3) = \mathbf{V}(X_3) = \lambda$.

Q33. a) On a, par indépendance de X_3 et Y_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_3 = 0) &= \mathbf{P}(X_3 = 0 \cup Y_3 = 0) = \mathbf{P}(X_3 = 0) + \mathbf{P}(Y_3 = 0) - \mathbf{P}(X_3 = 0 \cap Y_3 = 0) \\ &= \mathbf{P}(X_3 = 0) + \mathbf{P}(Y_3 = 0) - \mathbf{P}(X_3 = 0)\mathbf{P}(Y_3 = 0) \\ &= e^{-\lambda} + e^{-\lambda} - e^{-\lambda}e^{-\lambda} = 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

b) La matrice Σ_3 est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul : ainsi la probabilité que Σ_3 soit inversible est $1 - 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}$.

Q34. a) La variable aléatoire T_3 est une somme de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, elle est donc à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme X_3 et Y_3 sont à valeurs entières et positives, l'événement $T_3 = n$, c'est-à-dire $X_3 + Y_3 = n$, peut s'écrire comme la réunion disjointe :

$$(X_3 + Y_3 = n) = (X_3 = 0 \cap Y_3 = n) \sqcup (X_3 = 1 \cap Y_3 = n-1) \sqcup \dots \sqcup (X_3 = n-1 \cap Y_3 = 1) \sqcup (X_3 = n \cap Y_3 = 0).$$

On peut donc sommer les probabilités, puis utiliser l'indépendance de X_3 et Y_3 :

$$\mathbf{P}(T_3 = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_3 = k \cap Y_3 = n-k) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_3 = k)\mathbf{P}(Y_3 = n-k).$$

b) On poursuit le calcul de la question précédente, en utilisant le binôme de Newton pour évaluer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n$:

$$\mathbf{P}(T_3 = n) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} = e^{-2\lambda} \lambda^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} = e^{-2\lambda} \lambda^n \frac{2^n}{n!} = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!}.$$

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 2λ .

Q35. Valeurs propres et vecteurs propres de Σ_3 .

a) Il suffit de calculer le produit de la matrice par ce vecteur :

$$\begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3(X_3 - Y_3) \\ X_3 \end{pmatrix} = X_3 \begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de Σ_3 associé à la valeur propre X_3 .

b) On peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_3 \end{pmatrix} = Y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que Y_3 est une valeur propre de Σ_3 , associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q36. a) Les événements $(X_3 = n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales et toujours par indépendance de X_3 et Y_3 ,

$$\mathbf{P}(X_3 = Y_3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_3 = n \cap Y_3 = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_3 = n) \mathbf{P}(Y_3 = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_3 = n)^2$$

puisque les variables X_3 et Y_3 sont de même loi.

b) On a montré aux questions précédentes que X_3 et Y_3 sont des valeurs propres de Σ_3 .

Si $X_3 \neq Y_3$, alors Σ_3 est une matrice d'ordre 2 admettant deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

En revanche, si $X_3 = Y_3$, alors $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & X_3 \end{pmatrix}$ qui admet X_3 comme valeur propre double, mais le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 < 2. En effet, $\Sigma_3 - X_3 I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 donc possède un noyau de dimension 1. La matrice Σ_3 n'est donc pas diagonalisable.

c) D'après les deux questions précédentes,

$$\mathbf{P}(D_\lambda) = 1 - \mathbf{P}(X_3 = Y_3) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_3 = n)^2 = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2} = 1 - e^{-2\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2}.$$

Q37. a) On somme les inverses des carrés des factorielles à l'aide d'une boucle et on multiplie le résultat par e^{-2} :

```
1 import math
2 def Approx_Sum(N):
3     S = 0
4     for k in range(N+1):
5         S += 1 / math.factorial(k) ** 2
6     return S * math.exp(-2)
```

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral au point 0 : pour tout $x \geq 0$,

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t (x-t)^n dt.$$

c) La fonction exponentielle est croissante sur $[0; x]$. De plus, pour tout $t \in [0; x]$, $x-t \geq 0$ donc $(x-t)^n e^t \leq (x-t)^n e^x$. Par croissance de l'intégrale (car $0 \leq x$), on a donc :

$$\int_0^x e^t (x-t)^n dt \leq e^x \int_0^x (x-t)^n dt \leq e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \leq e^x \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En injectant dans la formule de la question précédente :

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \frac{1}{n!} e^x \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

d) Commençons par rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle, de rayon infini : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ainsi, par relation de Chasles, le membre de gauche de la question précédente peut se réécrire $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. En particulier, pour $x = 1$, on trouve le résultat souhaité :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} e^1$$

e) Il suffit de multiplier l'inégalité de la question précédente par e^{-2} . Le résultat est bien positif car c'est le reste d'une série à termes positifs.

- f) Il s'agit de trouver N_0 tel que $\frac{e^{-1}}{(N_0+1)!} \leq 10^{-2}$, soit $100e^{-1} \leq (N_0+1)!$. En calculant les factorielles des premiers entiers naturels, on trouve $4! = 24$ et $5! = 120$ donc

$$(3+1)! = 24 < 36 \leq 100e^{-1} \leq 37 < 120 = (4+1)!$$

L'entier $N_0 = 4$ est donc le plus petit qui convienne.

- g) D'après le calcul précédent, $|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^4 \frac{e^{-2}}{(k!)^2}| \leq 10^{-2}$. Par ailleurs, disposant du résultat avec deux chiffres significatifs, $|\sum_{k=0}^4 -0,31| \leq 10^{-2}$. Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - 0,3 \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^4 \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \right| + \left| \sum_{k=0}^4 \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - 0,31 \right| + |0,31 - 0,3| \\ &\leq 10^{-2} + 10^{-2} + 10^{-2} \leq 10^{-1}, \end{aligned}$$

ainsi 0,3 est la valeur approchée de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2}$ cherchée.

On en déduit $\mathbf{P}(D_1) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda}}{(k!)^2} \simeq 0,7$ à 10^{-1} près.

- h) Pour chaque terme de la somme, on calcule $k!$, ce qui impose d'effectuer récursivement le produit de tous les entiers de 1 à k et devient progressivement plus coûteux à mesure qu'on avance dans la boucle (coût approximativement linéaire en k , donc coût pour une somme de N termes approximativement quadratique en N).

Il serait plus économique de calculer la factorielle au fil de la somme en initialisant une variable `fact` = 1 et en ajoutant dans la boucle l'instruction `fact *= (k+1)`. Ceci permet de calculer chaque terme en temps approximativement constant (et donc une somme de N termes en temps approximativement linéaire en N).

Dans notre cas, N_0 est suffisamment petit pour que la différence ne soit pas perceptible.

- Q38.** a) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $0 \leq \frac{1}{(k!)^2} \leq \frac{1}{k!}$. Par théorème de comparaison des séries entières, la série entière $\sum \frac{x^k}{(k!)^2}$ est de rayon supérieur à $\sum \frac{x^k}{k!}$ dont on sait qu'elle est de rayon infini (série exponentielle). La série étudiée est donc de rayon de convergence infini.
- b) Cette fonction est la somme d'une série entière, elle est donc continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire ici sur $]-\infty; +\infty[= \mathbf{R}$.
- c) Remarquons que $\lambda^{2k} = (\lambda^2)^k$. En notant f la fonction somme de la question b), on peut écrire, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $g(\lambda) = 1 - e^{-2\lambda} f(\lambda^2)$ qui est donc continue sur $\mathbf{R}$ par composition.

- Q39.** D'après la question **Q36**, en reprenant les notations de la question précédente, on a $g(\lambda) = \mathbf{P}(D_\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.

La fonction g est continue sur $\mathbf{R}$. On a $g(0) = 1 - 1 = 0$ par calcul direct. Enfin, d'après **Q37**, $g(1) = \mathbf{P}(D_1) \geq 0,6$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\frac{1}{2} \in]0; 0,6[$, il existe donc $\mu \in]0; 1[$ tel que $g(\mu) = \frac{1}{2}$ (et donc, puisque $\mu > 0$, tel que $\mathbf{P}(D_\mu) = \frac{1}{2}$).

- Q40.** On peut procéder par dichotomie : on conserve en mémoire un intervalle $[a; b]$ (initialement $[0; 0,6]$) tel que $\mu \in [a; b]$. On calcule alors une valeur approchée de $g(\frac{a+b}{2})$. Suivant si cette valeur est inférieure ou supérieure à $\frac{1}{2}$, on remplace l'une des deux bornes a ou b par $\frac{a+b}{2}$ et on réitère le procédé. On obtient relativement rapidement μ avec une assez bonne précision (puisque la largeur de l'intervalle $[a; b]$ est divisée par 2 à chaque itération).

FIN