

# C.C.I.N.P. MATHÉMATIQUES

Corrigé et commentaires

## PROBLÈME 1 Calcul d'une intégrale via les nombres complexes

### I Lemme préliminaire

**Q1.** D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le trinôme du second degré unitaire admet deux racines complexes (éventuellement confondues) donc il existe  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{C}$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 - 2az + 1 = (z - \alpha)(z - \beta)$ .

**Q2.** Il s'agit du lien coefficients-racines pour un trinôme du second degré : en développant,

$$(z - \alpha)(z - \beta) = z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta$$

donc, par identification des coefficients,  $\boxed{\alpha + \beta = 2a}$  et  $\boxed{\alpha\beta = 1}$ .

**Q3.** Raisonnons par l'absurde en supposant que  $|\alpha| > 1$  ou  $|\beta| > 1$ , par multiplication, on aurait alors  $|\alpha\beta| > 1$  ce qui est contradictoire avec  $\alpha\beta = 1$ . Ainsi  $\boxed{|\alpha| = |\beta| = 1}$ . D'où, par inégalité triangulaire,  $|2a| \leq |\alpha| + |\beta| \leq 1 + 1 \leq 2$  i.e.  $\boxed{|a| \leq 1}$ .

**Q4.** Comme on a supposé que  $|a| > 1$ , la question précédente constitue un raisonnement par l'absurde dont la conclusion est que  $\boxed{|\alpha| < 1}$  ou  $\boxed{|\beta| < 1}$ .

**Q5.** Pour  $a = 2$ ,  $\{\alpha, \beta\} = \left\{ \frac{-4 \pm \sqrt{4a^2 - 4}}{2} \right\} = \boxed{\left\{ -2 \pm \sqrt{a^2 - 1} \right\}}$ .

### II Calcul d'une intégrale

#### II.1 - Une première expression en série trigonométrique

**Q6.** Comme  $-1 \leq \cos \leq 1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $|a| > 1$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\cos t \neq a$  i.e.  $a - \cos t \neq 0$ .

**Q7.**  $\cos$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc, par soustraction,  $a - \cos$  aussi et, enfin, par division,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

En outre, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(-t) = \frac{1}{a - \cos(-t)} = \frac{1}{a - \cos t} = f(t)$  et

$$f(t + 2\pi) = \frac{1}{a - \cos(t + 2\pi)} = \frac{1}{a - \cos t} = f(t)$$

donc  $f$  est paire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .

**Q8.** Les coefficients de Fourier de  $f$  sont :  $\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt}$  et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt}.$$

**Q9.**  $f$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$ . De plus, comme  $f$  est paire, tous les  $b_n$  sont nuls si bien que,

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)}$ .

## II.2 - Une seconde expression en série trigonométrique

**Q10.** Pour  $t \in \mathbb{R}$  fixé, d'après les formules d'Euler,

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{1}{a - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}} = \frac{-2e^{-it}}{-2ae^{it} + (e^{it})^2 + 1} = \boxed{\frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1}}.$$

**Q11.** Pour  $t \in \mathbb{R}$ , d'après la question précédente et la factorisation de la question **Q1**,

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1} = \boxed{\frac{-2e^{it}}{(e^{it} - \alpha)(e^{it} - \beta)}}.$$

De plus, d'après la question **Q2**,  $\beta = \frac{1}{\alpha}$  donc, pour  $t \in \mathbb{R}$ , d'une part

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it} - \alpha)\left(e^{it} - \frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{-2\alpha}{(1 - \alpha e^{-it})(\alpha e^{it} - 1)}$$

et, d'autre part,

$$\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \left( \frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}} \right) = \frac{-2\alpha}{(1 - \alpha e^{-it})(\alpha e^{it} - 1)} \frac{\alpha e^{-it}(1 - \alpha e^{it}) + 1 - \alpha e^{-it}}{1 - \alpha^2} = \frac{-2\alpha}{(1 - \alpha e^{-it})(\alpha e^{it} - 1)}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \left( \frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}} \right)}.$$

**Q12.** La série entière  $\sum_{n \geq 0} z^n$  a pour rayon de convergence 1 et pour somme  $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}}$  pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ .

**Q13.** D'après la question précédente comme  $\alpha e^{-it}$  et  $\alpha e^{it}$  sont de module strictement inférieur à 1, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}} &= \alpha e^{-it} \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha e^{-it})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha e^{it})^n = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{int}} \\ &= \sum_{n'=1}^{+\infty} \alpha^{n'} e^{-in't} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{int} \quad (\text{avec le changement d'indice } n' = n + 1) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n [e^{-int} + e^{int}] = \boxed{1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos(nt)}. \end{aligned}$$

**Q14.** D'après les questions **Q11** et **Q13**, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos(nt) \right] = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\alpha^{n+1}}{1 - \alpha^2} \cos(nt) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \cos(nt)}$$

avec

$$\boxed{\gamma_n = \begin{cases} 4\alpha^{n+1}/(1 - \alpha^2) & \text{si } n \geq 1 \\ 2\alpha/(1 - \alpha^2) & \text{si } n = 0 \end{cases}}.$$

**Q15.**  $(\gamma_n)_{n \geq 1}$  est géométrique de raison  $\alpha$  et  $|\alpha| < 1$  donc la série  $\boxed{\sum_{n \geq 0} \gamma_n}$  converge absolument.

### II.3 - Conclusion

**Q16.** Pour  $t \in \mathbb{R}$ , par linéarité de la sommation des séries et d'après les questions **Q9** et **Q14**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - \gamma_n) \cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \cos(nt) = f(t) - f(t) = \boxed{0}.$$

- Q17.**
- a Si  $h$  est  $T$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h(t+T) = h(t)$ . En dérivant cette égalité, on en déduit que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h'(t+T) = h'(t)$  donc  $h'$  est aussi  $T$ -périodique.
  - b Les fonctions  $\cos$  et  $t \mapsto a$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  donc, par soustraction, c'est aussi le cas de  $a - \cos$  puis, par division,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . En intégrant par partie à l'aide des fonctions  $f$  et  $t \mapsto \sin(nt)$  puis des fonctions  $f'$  et  $t \mapsto \cos(nt)$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, 2\pi]$ ,

$$\begin{aligned} n^2 \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt &= n \int_0^{2\pi} f(t) n \cos(nt) dt = n \left( \left[ f(t) \sin(nt) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t) \sin(nt) dt \right) \\ &= \int_0^{2\pi} f'(t) (-n) \sin(nt) dt = \left[ f'(t) \cos(nt) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt \\ &= f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt = \boxed{- \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt} \end{aligned}$$

car  $f'$  est  $2\pi$ -périodique d'après la question **Q17a**.

- d Pour  $n \geq 1$ , d'après la question précédente et la question **Q8**,

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n^2 \pi} \left| \int_0^{2\pi} f''(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t) \cos(nt)| dt \leq \boxed{\frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt}$$

par inégalité triangulaire et par croissance de l'intégration ( $|\cos| \leq 1$  sur  $\mathbb{R}$ ).

- e La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  est de paramètre 2 donc convergente. Par linéarité, c'est aussi le cas de  $\sum \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt$  puis, d'après le théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, les inégalités de la question précédente montrent que la série  $\sum |a_n|$  converge. Ainsi, la série  $\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n}$  converge absolument.

Enfin, pour  $n \geq 0$ , d'après l'inégalité triangulaire,  $|u_n| \leq |a_n| + |\gamma_n|$ . Or les séries  $\sum |a_n|$  et  $\sum |\gamma_n|$  convergent (d'après la question **Q15**) donc, d'après le théorème de comparaison par inégalité,  $\sum |u_n|$  converge autrement dit la série  $\boxed{\sum u_n}$  converge absolument.

**Q18.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après les questions **Q8** et **Q14**,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos(t)} dt = \pi a_n = \pi \gamma_n = \frac{4\pi \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^2}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(0t)}{a - \cos(t)} dt = 2\pi a_0 = 2\pi \gamma_0 = \frac{4\pi \alpha^{0+1}}{1 - \alpha^2}$$

donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos(t)} dt = \frac{4\pi \alpha^{n+1}}{1 - \alpha^2}}.$

**Q19.** D'après la question précédente et la question **Q5**,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \cos(t)} = \frac{4\pi \alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{4\pi(\sqrt{3} - 2)}{1 - (\sqrt{3} - 2)^2} = \frac{4\pi(\sqrt{3} - 2)}{-6 + 4\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}.$$

## PROBLÈME 2

### Matrices aléatoires

#### I Généralités sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

**Q20.** Calculons, en ne mentionnant que les coefficients diagonaux puisque ce sont les seuls qui interviennent dans la trace :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 & * \\ * & a_3 b_3 + a_4 b_4 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^4 a_k b_k.$$

**Q21.** D'après la question précédente,  $\langle A, B \rangle$  est le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^4$  des vecteurs  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  et  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  ce qui fait que l'application est bien bilinéaire symétrique définie positive. En conclusion, l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Q22.** Calculons :  $\left( \frac{A + A^T}{2} \right)^T = \frac{A^T + (A^T)^T}{2} = \frac{A + A^T}{2}$  et  $\left( \frac{A - A^T}{2} \right)^T = \frac{A^T - (A^T)^T}{2} = -\frac{A - A^T}{2}$

donc  $\boxed{\frac{A + A^T}{2}}$  est symétrique et  $\boxed{\frac{A - A^T}{2}}$  antisymétrique. Enfin :

$$\left\langle \frac{A + A^T}{2}, \frac{A - A^T}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} \text{Tr} \left( (A + A^T)(A - A^T)^T \right) = \frac{1}{4} \text{Tr} \left( AA^T - A^2 + (A^T)^2 - A^T A \right),$$

or  $\text{Tr}(AA^T) = \text{Tr}(A^T A)$  et  $\text{Tr}((A^T)^2) = \text{Tr}((A^2)^T) = \text{Tr}(A^2)$  donc, par linéarité de  $\text{Tr}$ ,

$$\left\langle \frac{A + A^T}{2}, \frac{A - A^T}{2} \right\rangle = \frac{1}{4} \left[ \text{Tr}(AA^T) - \text{Tr}(A^2) + \text{Tr}(A^2) - \text{Tr}(AA^T) \right] = 0$$

et les matrices  $\boxed{\frac{A + A^T}{2}}$  et  $\boxed{\frac{A - A^T}{2}}$  sont orthogonales.

**Q23.** Fixons  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Raisonnons par analyse et synthèse :

- si  $A$  s'écrit  $A = M + N$  avec  $M$  symétrique et  $N$  antisymétrique, alors, par linéarité de la transposition,  $A^T = M^T + N^T = M - N$  d'où, en additionnant les deux égalités,  $A + A^T = 2M$  i.e.  $\boxed{M = (A + A^T)/2}$ ; puis,  $N = A - M = A - (A + A^T)/2 = \boxed{(A - A^T)/2}$  ce qui montre l'unicité des matrices  $M$  et  $N$ ;
- d'après la question précédente, les matrices  $M = (A + A^T)/2$  et  $N = (A - A^T)/2$  sont respectivement symétrique et antisymétrique, de plus  $M + N = A$  ce qui montre l'existence de la décomposition de  $A$ .

En résumé, toute matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est somme, d'une manière unique, d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

**Q24.** Fixons à nouveau  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . D'après les deux questions précédentes,  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  et l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

En particulier,  $d(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \left\| A - p_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}^\perp(A) \right\|$  où  $p_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}^\perp$  est le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ .

Ainsi,  $A - p_{\mathcal{S}_2(\mathbb{R})}^\perp(A) = \frac{A - A^T}{2}$  et  $\boxed{d(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2} \|A - A^T\|}$ .

#### II Matrice de Rademacher

**Q25.** Par définition,

$$E(X_1) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} x \mathbb{P}(X_1 = x) = -1 \times P(X_1 = -1) + 1 \times P(X_1 = 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{0}$$

et  $V(X_1) = E([X_1 - E(X_1)]^2) = E(X_1^2) = E(1) = \boxed{1}$  car  $X_1^2$  est une variable certaine de valeur  $1^2 = (-1)^2 = 1$ .

**Q26.** Comme  $X_1(\Omega) = \{-1, 1\} = Y_1(\Omega)$  et que  $X_1$  et  $Y_1$  sont indépendantes,

$$T_1(\Omega) = \{-1 - 1, -1 + 1, 1 - 1, 1 + 1\} = \boxed{\{-2, 0, 2\}}.$$

De plus, par indépendance de  $X_1$  et  $Y_1$ ,

$$P(T_1 = -2) = P([X_1 = -1] \cap [Y_1 = -1]) = P(X_1 = -1)P(Y_1 = -1) = \boxed{\frac{1}{4}},$$

$$P(T_1 = 2) = P([X_1 = 1] \cap [Y_1 = 1]) = P(X_1 = 1)P(Y_1 = 1) = \boxed{\frac{1}{4}},$$

$$P(T_1 = 0) = 1 - P(T_1 = -2) - P(T_1 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Méthode 1 : (en utilisant la loi de  $T_1$ )

Par définition,

$$E(T_1) = \sum_{x \in T_1(\Omega)} xP(T_1 = x) = -2P(T_1 = -2) + 0P(T_1 = 0) + 2P(T_1 = 2) = -2\frac{1}{4} + 0 + 2\frac{1}{4} = \boxed{0},$$

$$\begin{aligned} V(T_1) &= E([T_1 - E(T_1)]^2) = E(T_1^2) = \sum_{x \in T_1(\Omega)} x^2P(T_1 = x) \\ &= (-2)^2P(T_1 = -2) + 0^2P(T_1 = 0) + 2^2P(T_1 = 2) = 4\frac{1}{4} + 0 + 4\frac{1}{4} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

Méthode 2 : (en utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance)

Par linéarité de l'espérance,  $E(T_1) = E(X_1) + E(Y_1) = 0 + 0 = \boxed{0}$  et, par indépendance de  $X_1$  et  $Y_1$ ,  $V(T_1) = V(X_1) + V(Y_1) = 1 + 1 = \boxed{2}$ .

**Q27.** Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente,

$$Z_1(\Omega) = \{-1(-1), -1 \times 1, 1 \times (-1), 1 \times 1\} = \boxed{\{-1, 1\}}.$$

De plus, par incompatibilité de  $X_1 = 1$  et  $X_1 = -1$ ,

$$P(Z_1 = 1) = P([X_1 = Y_1 = -1] \cap [X_1 = Y_1 = 1]) = P(T_1 = -2) + P(T_1 = 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(Z_1 = -1) = 1 - P(Z_1 = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Méthode 1 : (en utilisant la loi de  $Z_1$ )

Par définition,

$$E(Z_1) = \sum_{x \in Z_1(\Omega)} xP(Z_1 = x) = -1P(Z_1 = -1) + 1P(Z_1 = 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{0},$$

$$\begin{aligned} V(Z_1) &= E([Z_1 - E(Z_1)]^2) = E(Z_1^2) = \sum_{x \in Z_1(\Omega)} x^2P(Z_1 = x) \\ &= (-1)^2P(Z_1 = -1) + 1^2P(Z_1 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

Méthode 2 : (en utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance)

Par indépendance de  $X_1$  et  $Y_1$ ,  $E(Z_1) = E(X_1)E(Y_1) = 0 \times 0 = \boxed{0}$  et, par définition,

$$V(Z_1) = E([Z_1 - E(Z_1)]^2) = E(Z_1^2) = E(X_1^2 Y_1^2) = E(X_1^2)E(Y_1^2) = V(X_1)V(Y_1) = 1 \times 1 = \boxed{1}$$

par indépendance de  $X_1^2$  et  $Y_1^2$  (d'après le lemme des coalitions).

### III Matrice géométrique

**Q28.**  $\boxed{E(X_2) = \frac{1}{p}}$  et  $\boxed{V(X_2) = \frac{1-p}{p^2}}.$

**Q29.** a D'après **Q24**,

$$\begin{aligned} T_2 = d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) &= \frac{1}{2} \|\Sigma_2 - \Sigma_2^T\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & X_2 - Y_2 \\ X_2 + Y_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & X_2 + Y_2 \\ X_2 - Y_2 & 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & -2Y_2 \\ 2Y_2 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2Y_2)^2 + (2Y_2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8Y_2^2} = |Y_2| \sqrt{2} = \boxed{Y_2 \sqrt{2}} \end{aligned}$$

puisque  $Y_2$  est à valeurs positives.

b Par déformation affine,

$$E(T_2) = E(Y_2 \sqrt{2}) = E(Y_2) \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{p} \quad \text{et} \quad V(T_2) = V(Y_2 \sqrt{2}) = V(Y_2) \sqrt{2}^2 = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

**Q30.** D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,  $T_2$  admettant une variance, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$P(|T_2 - E(T_2)| \geq \delta) \leq \frac{V(T_2)}{\delta^2} \quad i.e. \quad \boxed{P\left(\left|T_2 - \frac{\sqrt{2}}{p}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{2(1-p)}{\delta^2 p^2}}.$$

**Q31.** a D'après la question précédente,  $P(|T_2 - 2\sqrt{2}| \geq \delta) \leq \frac{4}{\delta^2}$  donc il suffit de choisir  $\delta = 4$  pour avoir  $\boxed{P(|T_2 - 2\sqrt{2}| \geq \delta) \leq \frac{1}{4}}$ .

b D'après la question précédente,  $1 - P(|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) - 2\sqrt{2}| < 4) \leq \frac{1}{4}$  donc

$$P(|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) - 2\sqrt{2}| < 4) \geq 1 - \frac{1}{4}.$$

En conclusion, avec une probabilité d'au moins  $3/4$ ,  $|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) - 2\sqrt{2}| < 4$ .

## IV Matrice de Poisson

**Q32.**  $\boxed{E(X_3) = \lambda = V(Y_3)}$ .

**Q33.** a Par indépendance de  $X_3$  et  $Y_3$ ,

$$\begin{aligned} P(Z_3 = 0) &= P(X_3 Y_3 = 0) = P([X_3 = 0] \cup [Y_3 = 0]) = P(X_3 = 0) + P(Y_3 = 0) - P([X_3 = 0] \cap [Y_3 = 0]) \\ &= P(X_3 = 0) + P(Y_3 = 0) - P(X_3 = 0)P(Y_3 = 0) = e^{-\lambda} + e^{-\lambda} - e^{-\lambda}e^{-\lambda} = \boxed{2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}. \end{aligned}$$

b  $\Sigma_3$  est inversible ssi son déterminant  $Z_3$  est non nul donc la probabilité que  $\Sigma_3$  soit inversible vaut  $P(Z_3 \neq 0) = 1 - P(Z_3 = 0) = \boxed{1 - 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} = (1 - e^{-\lambda})^2}$ .

**Q34.** a Comme  $X_3(\Omega) = \mathbb{N} = Y_3(\Omega)$  et que  $X_3$  et  $Y_3$  sont indépendantes,

$$T_3(\Omega) = \left\{ x + y ; (x, y) \in \mathbb{N}^2 \right\} = \boxed{\mathbb{N}}.$$

De plus, pour  $n \in \mathbb{N}$ , d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements associé à  $X_3$ ,

$$\begin{aligned} P(T_3 = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k) P_{[X_3=k]}(T_3 = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k) P_{[X_3=k]}(k + Y_3 = n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k) P(Y_3 = n - k) \quad (\text{par indépendance de } X_3 \text{ et } Y_3) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^n P(X_3 = k) P(Y_3 = n - k)} \quad (\text{car } Y_3(\Omega) = \mathbb{N}). \end{aligned}$$

b Pour  $n \in T_3(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} P(T_3 = n) &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda} = \lambda^n e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-2\lambda} (1+1)^n = \frac{(2\lambda)^n}{n!} e^{-2\lambda} \end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi,  $T_3$  suit une loi de Poisson de paramètre  $2\lambda$ .

**Q35.** a Calculons :

$$\Sigma_3 \begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3(X_3 - Y_3) \\ X_3 \end{pmatrix} = X_3 \begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc  $\begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $\Sigma_3$  associé à la valeur propre  $X_3$ .

b La deuxième colonne de  $\Sigma_3$  a tous ses coefficients non diagonaux non nuls et celui de la diagonale vaut  $Y_3$  donc  $Y_3$  est valeur propre de  $\Sigma_3$  et un vecteur propre associé est  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Q36.** a D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements associé à  $X_3$ ,

$$\begin{aligned} P(X_3 = Y_3) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)P_{[X_3=k]}(X_3 = Y_3) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)P_{[X_3=k]}(k = Y_3) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)P(Y_3 = k) \quad (\text{par indépendance de } X_3 \text{ et } Y_3) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)^2 \quad (\text{puisque } X_3 \text{ et } Y_3 \text{ suivent la même loi}). \end{aligned}$$

b Si  $X_3 \neq Y_3$ , d'après la question **Q35**,  $\Sigma_3$  qui est d'ordre 2 admet deux valeurs propres distinctes donc  $\Sigma_3$  est diagonalisable. Si  $X_3 = Y_3$ , le polynôme caractéristique  $\chi_{\Sigma_3} : z \mapsto (z - X_3)^2$  de  $\Sigma_3$  admet  $X_3$  pour racine double mais

$$\dim E_{X_3}(\Sigma_3) = \dim \text{Ker}(\Sigma_3 - X_3 I_2) = \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

donc  $\Sigma_3$  n'est pas diagonalisable.

En résumé,  $\Sigma_3$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $X_3 \neq Y_3$ .

c D'après les deux questions précédentes,

$$P(D_\lambda) = P(X_3 \neq Y_3) = 1 - P(X_3 = Y_3) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)^2 = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right)^2 = 1 - e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

**Q37.** a On utilise une boucle `for` pour calculer la somme.

```
1 function Approx_Sum(N):
2     S=0
3     for k=range(N+1):
4         S+=math.factorial(k)**(-2)
5     return S*math.exp(-2)
```

b Méthode 1 : (à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale)

Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \geq 0$ . D'après la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à l'ordre  $n$  à la fonction  $\exp$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre 0 et  $x$ ,

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \exp^{(k)}(0) \frac{(x-0)^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt \quad i.e. \quad \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

Méthode 2 : (à l'aide d'une récurrence et d'une intégration par partie)

Fixons  $x \geq 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{E}_n$  l'égalité «  $e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt$  ».

Tout d'abord,

$$\frac{1}{0!} \int_0^x (x-t)^0 e^t dt = \int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1 = e^x - \sum_{k=0}^0 \frac{x^k}{k!}$$

donc  $\mathcal{E}_0$  est vraie.

Supposant alors  $\mathcal{E}_n$  vraie pour un certain entier naturel  $n$ , en intégrant par partie à l'aide des fonctions  $\exp$  et  $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$  qui sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[0, x]$ ,

$$\int_0^x (x-t)^n e^t dt = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} e^t \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} e^t dt = 0 + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^x (x-t)^{n+1} e^t dt.$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence,

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-t)^{n+1} e^t dt$$

et  $\mathcal{E}_{n+1}$  est vraie.

Finalement, par principe de récurrence, pour tout  $x \geq 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt.$$

**c** Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \geq 0$ . Par croissance de  $\exp$  sur  $[0, x]$ , pour tout  $t \in [0, x]$ ,  $e^t \leq e^x$ . D'où, par multiplication par  $(x-t)^n$  qui est positif pour  $t \in [0, x]$ ,  $(x-t)^n e^t \leq (x-t)^n e^x$  puis, par croissance de l'intégration,  $\int_0^x (x-t)^n e^t dt \leq \int_0^x (x-t)^n e^x dt$ .

Or  $\int_0^x (x-t)^n e^x dt = e^x \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x$  donc, d'après l'égalité de la question précédente,

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$$

**d** Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition de  $\exp$ ,  $e = e^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ . D'où, d'après l'inégalité de la question précédente,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} e^1 \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

**e** Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $k \geq 0$ ,  $(k!)^2 \geq k! \geq 1$  donc, par décroissance et positivité de la fonction inverse sur  $[1, +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{1}{(k!)^2} \leq \frac{1}{k!}$  puis, comme  $e^{-2} > 0$ ,  $0 \leq \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \leq \frac{e^{-2}}{k!}$ . Ainsi, par croissance de la sommation des séries et l'inégalité de la question précédente,

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{k!} \quad i.e. \quad 0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \leq e^{-2} \frac{e}{(n+1)!}$$

et finalement

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \leq \frac{e^{-1}}{(n+1)!}.$$

**f** D'après la question précédente, pour avoir  $\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^{N_0} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \right| \leq 10^{-2}$ , il suffit d'avoir  $\frac{e^{-1}}{(N_0+1)!} \leq 10^{-2}$  i.e.  $100e^{-1} \leq (N_0+1)!$ . Compte tenu de l'encadrement donné de  $100e^{-1}$ , il suffit d'avoir  $37 \leq (N_0+1)!$  ce qui arrive déjà pour  $N_0 = 4$  puisque  $(4+1)! = 120$ .

**g** D'après la question précédente,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \simeq \sum_{k=0}^{N_0} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \simeq 0,31 \simeq [0,3]$ . Puis, d'après la question

**Q36c**,  $P(D_1) = 1 - e^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \simeq 0,69 \simeq [0,7]$ .

**h** Il n'est pas judicieux de recourir à la fonction `math.factorial()` dans une boucle `for` car cela requiert de recalculer consécutivement chaque factorielle alors que chacune peut être obtenue au fur et à mesure à partir de la précédente par multiplication par un seul facteur.  $N_0$  étant très faible, cela ne pose pas de problème ici.

**Q38.** a Pour  $x \in \mathbb{R}^*$  et pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{x^k}{(k!)^2} \right|} = \frac{|x|}{(k+1)^2}$  donc la limite de ce quotient lorsque  $k$

tend vers  $+\infty$  est nulle. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(k!)^2}$  converge. En

conclusion, le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(k!)^2}$  vaut  $+\infty$ .

b Étant la somme d'une série entière de rayon de convergence  $+\infty$ , la fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence donc, en particulier, elle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

c La fonction  $\lambda \mapsto e^{-2\lambda}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc, par multiplication avec la fonction de la question précédente,  $\lambda \mapsto e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Enfin, par soustraction avec la fonction constante de valeur 1 (qui est continue sur  $[0, +\infty[$ ),  $g$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Q39.** D'après la question précédente, la fonction  $g$  est continue sur le segment  $[0, 1]$ .

De plus,  $g(0) = 1 - e^0 = 0$  et  $g(1) = P(D_1) \simeq 0,69$  d'après la question **Q37g**.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\mu \in ]0, 1[$  tel que  $g(\mu) = \frac{1}{2}$  autrement dit tel que les variables aléatoires indépendantes  $X_3$  et  $Y_3$  suivent la loi de Poisson de paramètre  $\mu$  et tel que la matrice  $\Sigma_3$  soit diagonalisable avec probabilité  $1/2$ .

**Q40.** Une méthode numérique pertinente pour approcher  $\mu$  est la dichotomie :  $P(D_0) = 0$  et  $P(D_1) \simeq 0,69$  donc on détermine numériquement la position de  $P(D_{1/2})$  par rapport à  $\frac{1}{2}$  et on recommence avec le milieu d'un des deux segments  $[0, 1/2]$  ou  $[1/2, 1]$ ...

**FIN**