

CONCOURS COMMUN INP
SESSION 2026 FILIÈRE MP
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE I

On considère les tables :

- ELEVES(id, nom, prenom, email, promo)
- PAIEMENTS(id, id_eleve, montant, date_paiement), avec id_eleve clé étrangère vers ELEVES.id.

Q1. Extraction des emails distincts des élèves hors promotion 2025.

```
1 SELECT DISTINCT email
2 FROM ELEVES
3 WHERE promo <> 2025;
```

Q2. Calcul du montant total payé par élève.

```
1 SELECT E.nom, E.prenom, SUM(P.montant) AS total_paye
2 FROM ELEVES E
3 JOIN PAIEMENTS P ON E.id = P.id_eleve
4 GROUP BY E.id, E.nom, E.prenom
5 ORDER BY E.nom, E.prenom;
```

Q3. Détection des doublons.

```
1 SELECT nom, prenom, email, promo
2 FROM ELEVES
3 GROUP BY nom, prenom, email, promo
4 HAVING COUNT(*) >= 2;
```

Q4. Élèves sans paiement.

```
1 SELECT E.id
2 FROM ELEVES E
3 WHERE NOT EXISTS (
4     SELECT 1
5     FROM PAIEMENTS P
6     WHERE P.id_eleve = E.id
7 );
```

(Les solutions proposées pour les questions d'informatique sont données à titre indicatif)

¹<https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

EXERCICE II

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$.

Q5. Pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{P}(X = n) t^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$.

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ alors la série $\sum \mathbb{P}(X = n) t^n$ converge absolument pour tout $t \in [-1, 1]$.

Donc : G_X est bien définie sur $[-1, 1]$.

Q6. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. Soit $t \in [-1, 1]$, on a :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}.$$

On fait $\sum e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ et l'expression est valable sur $\mathbb{R}$.

Q7. X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $t \in]-1, 1[$. Les deux séries $\sum \mathbb{P}(X = n) t^n$ et $\sum \mathbb{P}(Y = n) t^n$ convergent absolument.

On peut donc appliquer le théorème du produit de Cauchy :

$$G_X(t) G_Y(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = j) t^j \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) \right) t^n.$$

X et Y sont indépendantes, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k).$$

Par suite :

$$G_X(t) G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = n) t^n = G_{X+Y}(t).$$

Ainsi $\boxed{\forall t \in]-1, 1[, G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)}$.

Q8. Soit $Z = X + Y$, X et Y indépendantes avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

D'après Q6 et Q7, pour $t \in]-1, 1[$ on a :

$$G_Z(t) = G_X(t) G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

Donc $\boxed{Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$.

PROBLÈME

Partie I – Calcul d'une intégrale

On pose pour $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$: $h(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$ et $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) dt$.

Q9. Soit $x > 0$ (fixé) et $t \in \mathbb{R}$:

$$|h(x, t)| = \frac{x}{x^2 + t^2} \underset{t \rightarrow \mp\infty}{\sim} \frac{x}{t^2}.$$

Donc $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$, par suite elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $g(x)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q10. Pour $x > 0$, on pose $t = xu$, donc $dt = x du$ et

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x^2 u^2} e^{ixu} x du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du.$$

$$\text{Donc : } g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du.$$

On a, par intégrabilité de la fonction $u \mapsto \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}$ sur $\mathbb{R}$:

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{ixu}|}{1 + u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \pi.$$

Donc g est bornée sur $]0, +\infty[$ par π .

Q11. En utilise la formule $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du$ et le théorème de convergence dominée :

► $\left| \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \right| \leq \frac{1}{1 + u^2}$ et la fonction (dominante) $u \mapsto \frac{1}{1 + u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

► $\frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + u^2}$.

Par le théorème de convergence dominée version continue : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi$.

Q12. On utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral.

► La fonction $h(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en x sur $]0, +\infty[$ pour tout t fixé.

On a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it} \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it}$$

► Pour $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$, on majore :

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2x(x^2 + 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} \leq \frac{2x(3x^2 + 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} \leq \frac{6x}{(x^2 + t^2)^2} \leq \frac{6b}{(a^2 + t^2)^2}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{6b}{(a^2 + t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout x dans $]0, +\infty[$

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it} dt.$$

Q13. ► Calcul des dérivées partielles :

▷ On a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{(x^2 + t^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} \quad (1)$$

donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} \quad (2)$$

▷ On a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{-2xt}{(x^2 + t^2)^2} \quad (3)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{-2x(x^2 + t^2)^2 + 8xt(x^2 + t^2)}{(x^2 + t^2)^4} = \frac{2x(3t^2 - x^2)}{(x^2 + t^2)^3} \quad (4)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) = \frac{2x(x^2 - 3t^2) + 2x(3t^2 - x^2)}{(x^2 + t^2)^3} = 0.$$

- L'équation différentielle :

Soit $x \in]0, +\infty[$. D'après Q12 on a :

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt.$$

Une première intégration par parties donne :

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} \right]_{-a}^a - i \int_{-a}^{+a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt \right)$$

la formule (3) implique $\lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} \right]_{-a}^a = 0$.

Par une deuxième intégration par parties :

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2 + t^2} \right) e^{it} dt = i \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right]_{-a}^a - i \int_{-a}^{+a} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} dt$$

Donc $g'' = g$, c'est-à-dire g est solution de $y'' - y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Q14. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' - y = 0$ est $X^2 - 1 = 0$.

Donc les solutions de $y'' - y = 0$ sur $]0, +\infty[$ sont de la forme $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$, avec $A, B \in \mathbb{C}$.

D'après Q10, $|g(x)| \leq \pi$ pour tout $x > 0$. Or $e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc nécessairement $A = 0$.

Ainsi $g(x) = Be^{-x}$.

D'après Q11, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$, donc $B = \pi$.

On conclut : $\boxed{g(x) = \pi e^{-x} \text{ pour tout } x > 0}$.

Partie II – Formule sommatoire de Poisson

On pose $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$.

Q15. ► Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+n) = \frac{1}{1+(x+n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad f(x-n) = \frac{1}{1+(x-n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Les séries $\sum_{n \geq 0} f(x+n)$ et $\sum_{n \geq 1} f(x-n)$ sont convergentes, donc F est définie sur $\mathbb{R}$.

► Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+1-n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} f(x-n) = F(x)$$

Donc F est 1-périodique.

Q16. Soit $x \in [0, 1]$. Posons $f_n^+(x) = f(x+n)$ et $f_n^-(x) = f(x-n)$.

On a $|f_n^+(x)| \leq \frac{1}{1+n^2}$ et $|f_n^-(x)| \leq \frac{1}{1+(n-1)^2}$. Donc les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^+$ et $\sum_{n \geq 1} f_n^-$ convergent normalement et donc uniformément sur $[0, 1]$. De plus elles sont continues sur $[0, 1]$. Le théorème de continuité des séries de fonctions donne la continuité de F sur $[0, 1]$.

Ainsi par périodicité F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17. On a

$$c_k(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi kt} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) \right) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Par convergence uniforme sur $[0, 1]$, on peut intervertir somme et intégrale :

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Pour chaque terme, le changement de variable $s = t+n$ (resp. $s = t-n$) donne :

$$\int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt = \int_n^{n+1} f(s) e^{-2i\pi ks} ds,$$

$$\int_0^1 f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt = \int_{-n}^{1-n} f(s) e^{-2i\pi ks} ds.$$

donc :

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(s) e^{-2i\pi ks} ds + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{1-n} f(s) e^{-2i\pi ks} ds$$

On a par Chasles

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N \int_n^{n+1} f(s) e^{-2i\pi ks} ds + \sum_{n=1}^N \int_{-n}^{1-n} f(s) e^{-2i\pi ks} ds \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{N+1} f(s) e^{-2i\pi ks} ds + \int_{-N}^0 f(s) e^{-2i\pi ks} ds \right) \end{aligned}$$

f est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc

$$c_k(F) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-2i\pi kt} dt.$$

Ainsi $\boxed{c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt}.$

Q18. Soit $k, n \in \mathbb{Z}$.

► Si $n + k \neq 0$:

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)} \right]_0^1 = \frac{e^{-2i\pi(n+k)} - 1}{-2i\pi(n+k)} = 0,$$

► Si $n + k = 0$:

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = 1.$$

Ainsi : $\boxed{\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \delta_{n+k,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = -k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}.$

Partie III – Applications

Q19. ► Calcul de $c_0(F)$:

D'après Q17 : $c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi.$

► Calcul de $c_k(F)$ pour $k > 0$:

D'après Q17 et Q10 :

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi kt}}{1+t^2} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi kt}}{1+t^2} dt} = \overline{g(2\pi k)}.$$

D'après Q14 $g(2\pi k) = \pi e^{-2\pi k} \in \mathbb{R}$, donc : $\boxed{c_k(F) = \pi e^{-2\pi k} \text{ pour tout entier } k > 0}.$

Q20. On a : $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}.$

Puisque $c_{-n}(F) = c_n(F) = \pi e^{-2\pi n}$ pour $n \geq 1$, et $c_0(F) = \pi$, on a :

$$|c_n(F) e^{2i\pi nx}| = \pi e^{-2\pi n}, \quad |c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}| = \pi e^{-2\pi n}.$$

La série $\sum_{n \geq 1} \pi e^{-2\pi n}$ converge, donc les deux séries qui définissent G convergent normalement sur $\mathbb{R}$, et chaque terme de ces deux séries est continu, donc G est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme $e^{2i\pi n(x+1)} = e^{2i\pi nx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $G(x+1) = G(x).$

Q21. F et G sont continues sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques.

On calcule $c_k(G)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par convergence normale, on peut intervertir intégrale et somme sur $[0, 1]$:

$$c_k(G) = \int_0^1 G(t) e^{-2i\pi kt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \int_0^1 e^{2i\pi(n-k)t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt$$

D'après Q18 :

$$\int_0^1 e^{2i\pi(n-k)t} dt = \delta_{n,k} \text{ et } \int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \delta_{n,-k}$$

Si $k \geq 0$: seul le terme $n = k$ de la première somme contribue, donnant $c_k(G) = c_k(F)$.

Si $k < 0$: seul le terme $n = -k$ de la deuxième somme contribue, donnant $c_k(G) = c_{-k}(F) = c_k(F)$.

Donc $c_k(G) = c_k(F)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par le résultat admis, $F = G$.

Q22. On a $F = G$, donc :

$$F(x) = c_0(F) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(F) e^{-2i\pi nx} = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} (e^{2i\pi nx} + e^{-2i\pi nx})$$

posons $r = e^{-2\pi}$ et $\theta = 2\pi x$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \pi + 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in\theta} \right) \\ &= \pi + 2\pi \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (re^{i\theta})^n \right) \quad (\text{série géométrique}) \\ &= \pi + 2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) \end{aligned}$$

écrivons

$$\frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{re^{i\theta}(1 - re^{-i\theta})}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{re^{i\theta} - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

donc

$$\operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = \frac{r\cos(\theta) - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

et

$$1 + 2\operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

Ainsi
$$F(x) = \pi \frac{1 - e^{-4\pi}}{1 - 2e^{-2\pi}\cos(2\pi x) + e^{-4\pi}}.$$