

CCINP 2026 Mathématiques 1 MP-MPI

Proposition de corrigé (toute remarque constructive est la bienvenue!)

Exercice I

Q1. `SELECT DISTINCT email FROM ELEVES WHERE promo <> 2025;`

Q2. Les attributs demandés appartiennent à des tables différentes, donc une jointure est nécessaire. La fonction d'agrégation `SUM` permet de calculer le montant total, après avoir regroupé toutes les lignes associées à un même identifiant d'élève.

```
SELECT nom, prenom, SUM(montant)
FROM ELEVES e
JOIN PAIEMENTS p ON e.id = p.id_eleve
GROUP BY e.id      -- lignes distinctes en cas d'homonymie
ORDER BY nom, prenom;
```

Q3. Première interprétation : on cherche quels sont les élèves qui ont été insérés plusieurs fois dans la table, avec des identifiants différents ; dans ce cas, on veut un seul des identifiants associés à chacun de ces élèves, par exemple le plus petit.

On peut regrouper les lignes de la table `ELEVES` selon les valeurs des attributs autres que `id`, et faire une sélection des groupes (sélection en aval, avec `HAVING`) qui contiennent au moins deux lignes (ou, de manière équivalente, deux valeurs distinctes de la clé `id`).

```
SELECT MIN(id), email FROM ELEVES
GROUP BY nom, prenom, email, promo
HAVING COUNT(*) >= 2;
```

Deuxième interprétation : on veut tous les identifiants des lignes qui possèdent un doublon dans la table.

On peut effectuer une auto-jointure de la table `ELEVES` en prenant comme critère l'égalité de tous les attributs sauf `id`, et en sélectionnant les lignes obtenues ayant deux identifiants distincts ; enfin on élimine les doublons dans les résultats.

```
SELECT DISTINCT e1.id, e1.email
FROM ELEVES e1
JOIN ELEVES e2 ON e1.nom = e2.nom AND e1.prenom = e2.prenom
                AND e1.email = e2.email AND e1.promo = e2.promo
WHERE e1.id <> e2.id;
```

Q4. On peut faire une différence ensembliste des résultats de deux requêtes (remarque : afin d'effectuer une opération ensembliste, il n'est pas nécessaire que les noms des attributs des deux tables soient identiques, seul le type et l'ordre doivent être les mêmes) :

```
SELECT id FROM ELEVES
EXCEPT
SELECT id_eleve AS id FROM PAIEMENTS;    -- renommage facultatif
```

ou utiliser une sous-requête pour formuler le critère de sélection :

```
SELECT id FROM ELEVES
WHERE NOT id IN (
    SELECT id_eleve AS id FROM PAIEMENTS    -- renommage facultatif
);
```

Exercice II

Q5. Soit $t \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left| \underbrace{P(X=n)}_{\geq 0} t^n \right| = P(X=n) |t|^n \leq P(X=n);$$

or la suite $(\{X=n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est formée d'événements deux à deux incompatibles, donc par σ -additivité de la probabilité P la série $\sum_{n \geq 0} P(X=n)$ converge (et a pour somme la probabilité $P(X \in \mathbb{N})$, à savoir 1);

par comparaison, la série à termes réels définissant $G_X(t)$ converge absolument, donc elle converge. Cela établit que la fonction G_X est définie sur $[-1, 1]$.

Q6. Soit $t \in [-1, 1]$: par définition de G_X et de la distribution de Poisson de paramètre λ , on a

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \right) t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} \exp(\lambda t)$$

donc $\boxed{\forall t \in [-1, 1] \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}}$

Remarques :

- Le raisonnement et le résultat obtenu restent valables dans le cas où $\lambda = 0$.
- Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ , le rayon de convergence de la série entière définissant G_X est égal à $+\infty$, donc on pourrait définir G_X sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R} \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

Q7. D'après **Q5.**, les rayons de convergence des séries entières définissant G_X et G_Y sont tous les deux supérieurs ou égaux à 1, donc le produit de Cauchy de ces séries entières est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 aussi; de plus, sur l'intervalle ouvert $] -1, 1 [$, qui est inclus dans les intervalles ouverts de convergence des deux séries entières, on a

$$\forall t \in] -1, 1 [\quad G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X=n-k) P(Y=k) \right) t^n$$

En fait, l'égalité est valable pour tout $t \in [-1, 1]$, puisque d'après **Q5.** les séries définissant $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ convergent absolument.

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire $X+Y$; celle-ci est l'image du couple (X, Y) par la fonction $s : (x, y) \mapsto x+y$, de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient, à l'aide d'un changement d'indice de sommation et en exploitant l'indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \\ x+y=n}} P((X,Y)=(x,y)) \\ &\stackrel{(x,y)=(n-k,k)}{=} \sum_{k=0}^n P((X,Y)=(n-k,k)) \stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_{k=0}^n P(X=n-k) P(Y=k). \end{aligned}$$

L'identité cherchée en découle :

$$\forall t \in] -1, 1 [\quad G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n) t^n = G_{X+Y}(t)$$

Q8. La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après **Q6.** et **Q7.** (on utilise ici l'hypothèse d'indépendance entre X et Y), la fonction génératrice de Z vérifie :

$$\forall t \in] -1, 1 [\quad G_Z(t) = G_X(t) G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

Or, d'après **Q6.**, la fonction génératrice d'une variable aléatoire Z' suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ est égale à la fonction génératrice de Z en restriction à l'intervalle ouvert $] -1, 1 [$; par unicité du développement en série entière, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(Z'=n) = P(Z=n)$.

Ainsi Z et Z' suivent la même loi, à savoir :

$Z \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda + \mu.$

Comme observé en **Q6.**, le résultat obtenu est valable aussi dans le cas où $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$.

Problème

Partie I – Calcul d’une intégrale

Q9. On note h la fonction définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \quad h(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \in \mathbb{C}$$

On fixe $x \in]0, +\infty[$. La fonction $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|h(x, t)| = \frac{x}{x^2 + t^2} = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$; or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $-\infty$ et en $+\infty$ (critère de Riemann), donc par comparaison $h(x, \cdot)$ est intégrable en ces points. Il en résulte que $h(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l’intégrale définissant $g(x)$ converge.

Cela établit que g est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q10. On fixe encore $x \in]0, +\infty[$. En effectuant le changement de variable affine $t = xu$ (bijetif strictement croissant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) dans l’intégrale convergente définissant $g(x)$ on obtient l’expression voulue :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x^2 u^2} e^{ixu} x \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \, du$$

Par inégalité triangulaire intégrale,

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \right| \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} \, du = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Cette majoration indépendante de $x \in]0, +\infty[$ montre que la fonction g est bornée.

Q11. On note H la fonction définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, u) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \quad H(x, u) = \frac{e^{ixu}}{1 + u^2}$$

- Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x, u) = \frac{1}{1 + u^2}$; on note alors H_0 la fonction $u \mapsto \frac{1}{1 + u^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction rationnelle H_0 est continue sur $\mathbb{R}$; pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, la fonction $H(x, \cdot)$ est le produit de H_0 et de la fonction continue $u \mapsto e^{ixu}$, donc $H(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $(x, u) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ on a $|H(x, u)| = H_0(u)$, et la fonction H_0 est positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (résultat établi en **Q10**).

Par passage à la limite sous le signe intégral (théorème de convergence dominée), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(u) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} \, du = \pi.$$

Q12. On reprend la fonction h introduite à la question **Q9**.

- Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $h(\cdot, t)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$; on a (voir aussi **Q13**) :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{-2x(3t^2 - x^2)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it}$$

- Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on a déjà établi en **Q9** que $h(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; de plus les fonctions $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (produits de fonctions rationnelles et $t \mapsto e^{it}$), et $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $\pm\infty$ il résulte que $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- On considère un segment quelconque $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. Pour $x \in [a, b]$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2b(3t^2 + b^2)}{(a^2 + t^2)^3}$$

et la fonction $\varphi_{a,b} : t \mapsto \frac{2b(3t^2 + b^2)}{(a^2 + t^2)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi_{a,b}(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^4}\right)$, donc par comparaison à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ qui est intégrable en $\pm\infty$ on déduit que $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par dérivation à l'ordre 2 sous le signe intégral, il résulte que la fonction g est de classe C^2 en restriction à tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, donc g est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) dt$$

Q13. On note ψ la fonction rationnelle définie par : $\psi(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2} = x(x^2 + t^2)^{-1}$; on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) &= (x^2 + t^2)^{-1} - 2x^2(x^2 + t^2)^{-2} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) &= -2x(x^2 + t^2)^{-2} + (-4x)(t^2 - x^2)(x^2 + t^2)^{-3} \\ &= (t^2 - x^2)(x^2 + t^2)^{-2}, & &= -2x(3t^2 - x^2)(x^2 + t^2)^{-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) &= -2xt(x^2 + t^2)^{-2}, & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) &= -2x(x^2 + t^2)^{-2} - 2xt(-4t)(x^2 + t^2)^{-3} \\ & & &= -2x(x^2 - 3t^2)(x^2 + t^2)^{-3} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0}$ (autrement dit, la fonction ψ est harmonique).

On remarque que, pour $(x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $h(x, t) = \psi(x, t)e^{it}$ d'où $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t)e^{it}$. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé; d'après **Q12.** et la relation qu'on vient d'établir,

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t)e^{it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t)e^{it} dt$$

On constate que

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)e^{it} \right| = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O} \left(\frac{1}{t^3} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad \text{et} \quad |\psi(x, t)e^{it}| = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$$

donc on peut légitimement effectuer deux intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} g''(x) &= - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)e^{it} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)e^{it} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)e^{it} dt \\ &= \left[\psi(x, t)e^{it} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t)i^2 e^{it} dt = (-i^2) \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) dt = g(x) \end{aligned}$$

donc $g''(x) - g(x) = 0$. Cela montre que g est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Q14. Les racines de $X^2 - 1$, qui est le polynôme caractéristique de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants (E_0) , sont -1 et 1 ; vu que g est une solution de (E_0) dans $C^2(]0, +\infty[, \mathbb{C})$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^x.$$

On sait d'après **Q10.** que g est une fonction bornée, donc $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(g(x) - \alpha e^{-x}) = 0$; en utilisant la valeur de la limite en 0 établie en **Q11.** on obtient $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \pi e^{-x}}$$

Partie II – Formule sommatoire de Poisson

Q15. On introduit deux suites de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = f(x + n) = \frac{1}{1 + (x + n)^2} \quad \text{et} \quad \phi_n(x) = f(x - n) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé. Les séries $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_n(x)$ sont à termes positifs; pour $n \rightarrow +\infty$ on a

$f_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\phi_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ on déduit que $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_n(x)$ sont convergentes aussi, donc $F(x)$ est un réel bien défini.

De plus, on a

$$F(x + 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x + 1 + n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x + 1 - n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x + (n + 1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x - (n - 1))$$

On effectue un changement d'indice par décalage dans les deux sommes (qui préserve la convergence et la somme des séries) :

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \sum_{m=1}^{+\infty} f(x+m) + \sum_{m=0}^{+\infty} f(x-m) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} f(x+m) + \left(f(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} f(x-m) \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} f(x+m) + \sum_{m=1}^{+\infty} f(x-m) \end{aligned}$$

donc $F(x+1) = F(x)$. On conclut que F est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodique.

Q16. On reprend les notations introduites dans **Q15.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions f_n et ϕ_n sont des fonctions rationnelles, donc continues sur $[0, 1]$. De plus, pour $x \in [0, 1]$, par croissance de la fonction carré sur $[0, +\infty[$ et décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ on a

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+n^2} \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad 0 \leq \phi_n(x) = \frac{1}{1+(n-x)^2} \leq \frac{1}{1+(n-1)^2}$$

donc $\|f_n\|_{\infty, [0,1]} = f_n(0)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\phi_n\|_{\infty, [0,1]} = \phi_n(1)$; les séries $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_n(1)$ étant convergentes, il en résulte que les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_n$ convergent normalement, donc

uniformément, sur $[0, 1]$. D'après le théorème de continuité d'une limite uniforme, on déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n$ sont des fonctions continues sur $[0, 1]$, donc leur somme F est continue sur $[0, 1]$ aussi.

On sait d'après **Q15.** que F est 1-périodique, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [n, n+1]$ on a $F(x) = F(x-n)$, et $x-n \in [0, 1]$; il en résulte, par composition, que la restriction de la fonction F au segment $[n, n+1]$ est continue. La continuité en un point étant une propriété locale, la fonction F est continue en tout point de la réunion d'ouverts $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; de plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction F est continue à gauche et à droite en n , donc F est continue en n . On conclut que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q17. Soit $k \in \mathbb{Z}$ fixé; on note e_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e_k(t) = e^{-2i\pi kt}$; on remarque que la fonction exponentielle est $(2i\pi)$ -périodique, donc e_k est 1-périodique, de plus $\forall t \in \mathbb{R} \quad |e_k(t)| = 1$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on a, par linéarité de la somme de séries convergentes :

$$F(t)e^{-2i\pi kt} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} (t-n) \right) e_k(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)e_k(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(t)e_k(t)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $f_n e_k$ et $\phi_n e_k$ sont continues sur $[0, 1]$, et pour tout $t \in [0, 1]$ on a $|f_n(t)e_k(t)| = |f_n(t)|$ et $|\phi_n(t)e_k(t)| = |\phi_n(t)|$, donc

$$\|f_n e_k\|_{\infty, [0,1]} = \|f_n\|_{\infty, [0,1]} = f_n(0) \quad \text{et} \quad \|\phi_n e_k\|_{\infty, [0,1]} = \|\phi_n\|_{\infty, [0,1]} = \phi_n(1)$$

or on a déjà établi en **Q15.** la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_n(1)$, donc les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n e_k$ et $\sum_{n \geq 1} \phi_n e_k$ convergent normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$. Cela autorise à intégrer terme à terme sur le segment $[0, 1]$: les sommes sont continues sur $[0, 1]$ et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)e_k(t) \right) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)e_k(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e_k(t) dt \\ \text{et} \quad \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(t)e_k(t) \right) dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \phi_n(t)e_k(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n)e_k(t) dt \end{aligned}$$

puis, par linéarité de l'intégrale,

$$c_k(F) = \int_0^1 F(t)e_k(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e_k(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n)e_k(t) dt.$$

On effectue un changement de variable par translation dans chaque intégrale et on exploite la 1-périodicité de la fonction e_k :

$$\begin{aligned}
c_k(F) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e_k(u-n) \, du + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-n+1} f(u) e_k(u+n) \, du \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e_k(u) \, du + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-n+1} f(u) e_k(u) \, du
\end{aligned}$$

En explicitant la définition de la somme d'une série et la relation de Chasles, on peut exprimer $c_k(F)$ à l'aide des limites de deux suites convergentes :

$$\begin{aligned}
c_k(F) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \int_n^{n+1} f(u) e_k(u) \, du + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_{-n}^{-n+1} f(u) e_k(u) \, du \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N+1} f(u) e_k(u) \, du + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^0 f(u) e_k(u) \, du
\end{aligned}$$

Pour conclure, on observe que la fonction f est d'intégrale convergente sur $] -\infty, +\infty[$, puisque f est continue et admet une primitive, arctan, qui est convergente en $-\infty$ et en $+\infty$; pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|f(t)e_k(t)| = f(t)$, donc la fonction $f e_k$ est intégrable sur $] -\infty, +\infty[$ et par conséquent l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e_k(t) \, dt$ est convergente et

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} \, dt &= \int_{-\infty}^0 f(t) e_k(t) \, dt + \int_0^{+\infty} f(t) e_k(t) \, dt \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{N+1} f(t) e_k(t) \, dt + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^0 f(t) e_k(t) \, dt = c_k(F).
\end{aligned}$$

C'est une version de la formule sommatoire de Poisson, valable pour la fonction f : le $k^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de la fonction F , qui est la «1-périodisée» de la fonction f , est égal à la valeur en k de la transformée de Fourier de f .

Q18. On distingue deux cas.

— Si $n+k=0$, alors

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1$$

— Si $n+k \neq 0$, une primitive de la fonction continue $t \mapsto e^{-2i\pi(n+k)t}$ est $t \mapsto \frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)}$, qui est 1-périodique; d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} \, dt = \left[\frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)} \right]_0^1 = 0.$$

Conclusion :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{Z}^2 \quad \int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} \, dt = \delta_{n, -k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n+k=0, \\ 0 & \text{si } n+k \neq 0. \end{cases}$$

Partie III – Applications

Q19. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on peut utiliser l'expression de $c_k(F)$ établie en **Q17.** Si $k=0$ alors

$$c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi \quad (\text{voir calcul fait en Q11.});$$

si $k < 0$ alors $-2\pi k > 0$ et on peut exploiter l'expression intégrale de la fonction g établie en **Q10.** et son expression trouvée en **Q14.** :

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(-2\pi k)t}}{1+t^2} \, dt = g(-2\pi k) = \pi e^{2\pi k}$$

enfin si $k > 0$ on utilise la relation admise $c_k(F) = c_{-k}(F)$, que l'on démontre facilement en utilisant la parité de f et un changement de variable :

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-2i\pi(-k)(-t)} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi(-k)u} \, du = c_{-k}(F).$$

Pour résumer, en tenant compte des différents cas :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(F) = \pi e^{-2\pi|k|}$$

Q20. D'après le résultat de **Q19.** on peut déterminer une expression de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ en calculant la somme de deux séries géométriques de raisons respectives $e^{-2\pi(1-ix)}$ et $e^{-2\pi(1+ix)}$, dont le module est égal à $e^{-2\pi} < 1$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{2i\pi n x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{-2i\pi n x} \\ &= \pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2\pi(1-ix)})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2\pi(1+ix)})^n - 1 \right) = \pi \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi(1-ix)}} + \frac{1}{1 - e^{-2\pi(1+ix)}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Puisque la fonction exponentielle est continue et $(2\pi i)$ -périodique sur $\mathbb{C}$, en utilisant l'expression trouvée on déduit que G est continue (par composition, quotient et combinaison linéaire) et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

Q21. Pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$, on note $g_{n,k}$ la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_{n,k}(x) = c_n(F) e^{2i\pi n x} e^{-2i\pi k x} = c_n(F) e^{-2i\pi(n-k)x}$$

de sorte que, par linéarité de la somme de séries convergentes,

$$\begin{aligned} c_k(G) &= \int_0^1 G(t) e^{-2i\pi k t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi n t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi n t} \right) e^{-2i\pi k t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_{n,k}(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n,k}(t) \right) dt \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|g_{n,k}(x)| = |c_n(F)|$, donc d'après le résultat de **Q19.** $\|g_{n,k}\|_{\infty, [0,1]} = |c_n(F)| = \pi e^{-2\pi|n|}$; la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \pi e^{-2\pi n}$ est convergente, donc les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_{n,k}$ et $\sum_{n \geq 1} g_{-n,k}$ convergent normalement sur le segment $[0,1]$ et leurs sommes sont continues. Cela permet d'intégrer terme à terme : en utilisant le résultat de **Q18.**,

$$\begin{aligned} c_k(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_{n,k}(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_{-n,k}(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \int_0^1 e^{-2i\pi(n-k)x} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \int_0^1 e^{-2i\pi(-n-k)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \delta_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \delta_{-n,k} = c_k(F) \end{aligned}$$

Les fonctions F et G sont continues et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ (résultats établis aux questions **Q15.**, **Q16.** et **Q20.**) et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $c_k(F) = c_k(G)$; d'après le résultat d'unicité admis, on conclut que $F = G$.

Q22. D'après **Q20.** et **Q21.**, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a (après quelques calculs)

$$F(x) = G(x) = \pi \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi(1-ix)}} + \frac{1}{1 - e^{-2\pi(1+ix)}} - 1 \right) = \frac{\pi \operatorname{sh}(2\pi)}{\operatorname{ch}(2\pi) - \cos(2\pi x)}$$