

CCINP 2026 MP Maths 1 – Un corrigé

En cas d'erreur, me contacter : sergelaurent@sergial.org

Exercice 1

Q1 – On utilise DISTINCT pour éliminer les doublons :

```
SELECT DISTINCT email
FROM ELEVES
WHERE promo <> 2025 ;
```

Q2 – On réalise une jointure et une agrégation :

```
SELECT nom, prenom, SUM(montant) AS montantTotal
FROM ELEVES JOIN PAIEMENTS ON ELEVES.id=id_eleve
GROUP BY id_eleve
ORDER BY nom,prenom ;
```

Q3 – On réalise une autojointure avec pour critère des identifiants distincts et les autres attributs identiques :

```
SELECT E1.id, E1.email
FROM
    ELEVES AS E1 JOIN ELEVES AS E2
    ON E1.nom=E2.nom AND E1.prenom=E2.prenom AND E1.email=E2.email
    AND E1.promo=E2.promo AND E1.id<>E2.id ;
```

Q4 – On pourrait être tenté d'adapter la requête de Q2 en ajoutant une sélection sur un montant total nul. Ceci ne devrait pas être correct car les élèves ne figurant pas dans la table PAIEMENTS ne figureront pas dans la jointure. Je propose donc de faire la différence ensembliste entre les deux tables, réduites au seul attribut id.

```
SELECT *
FROM
    (SELECT DISTINCT id FROM ELEVES)
EXCEPT
    (SELECT DISTINCT id_eleve AS id FROM PAIEMENTS) ;
```

Exercice 2

Q5 – Pour $t \in [-1,1]$ on a $|P(X=n)t^n| \leq P(X=n)$ et la série $\sum_n P(X=n)$ converge (de somme 1). Par comparaison de séries à termes positifs :

La série $\sum_n P(X=n)t^n$ converge absolument donc converge

Q6 – On a sous réserve d'existence : $G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!}$. On reconnait une série exponentielle de rayon infini, donc la fonction caractéristique de X est définie sur $\mathbb{R}$ et $G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}}$$

Q7 – On a pour $|t| < 1$: $G_X(t)G_Y(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)t^n \right)$, les deux séries entières étant de rayons tous deux ≥ 1 . On a donc pour $|t| < 1$: $G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ avec :

$$c_n = \sum_{k=0}^n P(X=k)P(Y=n-k)$$

Par indépendance : $c_n = \sum_{k=0}^n P((X=k) \cap (Y=n-k))$. Les événements $(X=k) \cap (Y=n-k)$

étant deux à deux disjoints, on a : $c_n = P\left(\bigcup_{k=0}^n (X=k) \cap (Y=n-k)\right) = P(X+Y=n)$.

On a donc : $\boxed{\forall t \in]-1, 1[, G_X(t)G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)t^n = G_{X+Y}(t)}$.

Q8 – L'indépendance nous permet d'utiliser le résultat ci-dessus. Avec Q6 on obtient donc pour $|t| < 1$: $G_Z(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$. Comme la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ en caractérise la loi (c'est une conséquence de l'unicité du développement en série entière), on en déduit : $\boxed{Z \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda + \mu}$.

Problème

Partie I

Q9 – Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). En outre :

- $\left| \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right| \leq \frac{x}{x^2 + t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge absolument.
- $\left| \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \right| \leq \frac{x}{x^2 + t^2} \underset{t \rightarrow -\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ converge absolument.

On en déduit : la fonction $t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et g est définie sur $]0, +\infty[$.

Q10 – Avec le changement de variable affine $t = xu$ (strictement croissant) on a pour $x > 0$:

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x^2 u^2} e^{ixu} x du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du}$$

On a par suite dans $[0, +\infty[$: $|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{ixu}}{1+u^2} \right| du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan(u)]_{-\infty}^{+\infty}$ et finalement : $\forall x > 0, |g(x)| \leq \pi$: $\boxed{g \text{ est bornée sur }]0, +\infty[}$.

Q11 – Soit $\varphi : \begin{cases}]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, u) \mapsto \frac{e^{ixu}}{1+u^2} \end{cases}$

- Pour tout $x > 0$, $u \mapsto \varphi(x, u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $u > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ixu}}{1+u^2} = \frac{1}{1+u^2}$ et la fonction $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a enfin la domination, pour $x > 0$ et $u \in \mathbb{R}$: $\left| \frac{e^{ixu}}{1+u^2} \right| = \frac{1}{1+u^2}$ et $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (déjà vu à Q10).

Il résulte de ces trois points : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi}$.

Q12 – On définit $\psi : \begin{cases}]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) \mapsto \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} \end{cases}$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto \psi(x, t)$ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. En outre :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) = \frac{x^2 + t^2 - 2x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it} = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it}.$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) = \frac{-2x(x^2 + t^2)^2 - 4x(t^2 - x^2)(x^2 + t^2)}{(x^2 + t^2)^4} e^{it} = \frac{2x^3 - 6xt^2}{(x^2 + t^2)^3} e^{it}$$

- On a déjà vu que $t \mapsto \psi(x, t)$ est pour $x > 0$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{|t^2 - x^2|}{(x^2 + t^2)^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ ce qui montre son intégrabilité sur $\mathbb{R}$.
- On a la domination, pour $0 < a < b$, $x \in [a, b]$ et $t \in \mathbb{R}$: $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2b^3 + 6bt^2}{(a^2 + t^2)^3}$.

En outre, la fonction $t \mapsto \frac{2b^3 + 6bt^2}{(a^2 + t^2)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \leq \frac{2b^3 + 6bt^2}{(a^2 + t^2)^3} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^4}\right)$, ce qui montre son intégrabilité sur $\mathbb{R}$.

Il résulte de tous ces points :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0, g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3 - 6xt^2}{(x^2 + t^2)^3} e^{it} dt}$$

Q13 – On a déjà vu que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$. On regarde maintenant $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right)$:

$$\bullet \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = \frac{-2xt}{(x^2+t^2)^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = -2x \frac{(x^2+t^2)^2 - 4t^2(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^4} = \frac{-2x^3+6xt^2}{(x^2+t^2)^3}$$

On obtient donc : $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) = 0}$.

Par suite, toujours pour $x > 0$:

$$g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} dt$$

On fait alors une intégration par parties, sous réserve d'existence :

$$g''(x) = \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} dt$$

Or $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} = \frac{-2xt e^{it}}{(x^2+t^2)^2}$ et $\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} \right| = \frac{2x|t|}{(x^2+t^2)^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{2x}{|t|^3} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$. L'intégration

par parties est donc validée et $g''(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{x}{x^2+t^2} \right) e^{it} dt$. On recommence :

$$g''(x) = \left[\frac{ixe^{it}}{x^2+t^2} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{it}}{x^2+t^2} dt$$

De même $\frac{ixe^{it}}{x^2+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$ et $g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{it}}{x^2+t^2} dt = g(x)$. Ainsi :

$$\boxed{g \text{ est solution sur }]0, +\infty[\text{ de } y'' - y = 0}$$

Q14 – L'équation caractéristique de l'équation linéaire à coefficients constants ci-dessus est $r^2 - 1 = 0$, de solutions $r = \pm 1$. Il existe donc deux constantes complexes A et B telles que :

$$\forall x > 0, g(x) = Ae^x + Be^{-x}$$

Comme g est bornée sur $]0, +\infty[$ on a $A = 0$ et sachant $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \pi$ on a $B = \pi$. Donc :

$$\boxed{\forall x > 0, g(x) = \pi e^{-x}}$$

Partie II

Q15 – On a pour $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq f(x+n) = \frac{1}{1+(t+n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par

comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} f(x+n)$ converge. On montre de la même

façon la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} f(x-n)$. Ainsi : $\boxed{F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $x+1 \in \mathbb{R}$ et $x-1 \in \mathbb{R}$. Il y a des chances qu'on vous pardonne l'omission de cette mention.

• Toujours pour $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+1-n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} f(x-n)$$

On a changé $1+n$ en n dans la première somme, et $n-1$ en n dans la seconde.

Comme pour $n=0$ on a $f(x+n) = f(x-n)$, on peut réécrire :

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) = F(x)$$

De ces deux points : F est 1-périodique.

Q16 – On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(x) = f(x+n) + f(x-n)$, de sorte que

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Comme f est continue sur $[0,1]$, il nous suffit de prouver qu'il

en est de même pour $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^0([0,1], \mathbb{R})$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{1}{1+(x+n)^2} + \frac{1}{1+(x-n)^2} \leq \frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{1+(n-1)^2}$. En effet on

a : $0 \leq n \leq x+n \leq n+1$ d'où $(x+n)^2 \geq n^2 \geq 0$ et $-n \leq x-n \leq 1-n \leq 0$ d'où $(x-n)^2 \geq (1-n)^2$.

La majoration ne dépend pas de x et la série numérique $\sum \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{1+(n-1)^2} \right)$ converge car

$\left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{1+(n-1)^2} \right) \sim \frac{2}{n^2}$. Nous venons d'établir la convergence normale et donc uniforme

de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0,1]$.

On déduit de ces deux points la continuité sur $[0,1]$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ et finalement :

F est continue sur $[0,1]$.

Ainsi F est continue sur l'intervalle $[0,1]$, fermé de longueur 1 et continue sur cet intervalle.

On en déduit : F est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour le raccord, on a par périodicité $F(0) = F(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = F(1)$.

Q17 – On a $c_k(F) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto f(t+n) e^{-2i\pi kt}$ est continue sur $[0,1]$ et on a pour $t \in [0,1]$:

$$|f(t+n) e^{-2i\pi kt}| = f(t+n) \leq \frac{1}{1+n^2}$$

et on a déjà vu la convergence de la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$. Par convergence normale on a donc :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi k(u-n)} du$$

Or $e^{-2i\pi k(u-n)} = e^{-2i\pi ku} \underbrace{e^{2i\pi nk}}_{=1} = e^{-2i\pi ku}$. Donc $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du$. On

revient sur les sommes partielles : $\sum_{n=0}^N \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du = \int_0^{N+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du$. Or

$\int_0^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du$ converge car $u \mapsto f(u) e^{-2i\pi ku}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a l'équivalent

$|f(u) e^{-2i\pi ku}| \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$; ainsi $\int_0^{N+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du$ et finalement :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du$. Donc $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du$. On

montre de la même façon que $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt = \int_{-\infty}^0 f(u) e^{-2i\pi ku} du$ et on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du}$$

Q18 – On fait une dissociation des cas :

- Si $n+k=0$, alors $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = 1$
- Sinon : $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \frac{-1}{2i\pi(n+k)} \left[e^{-2i\pi(n+k)t} \right]_0^1 = \frac{-1}{2i\pi(n+k)} (1-1) = 0$

Partie III

Q19 – On a avec Q17 : $c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = \pi$. Par ailleurs, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$c_k(F) = c_{-k}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi ku}}{1+u^2} du$ et avec Q10 et Q14 : $c_k(F) = g(2\pi k) = \pi e^{-2\pi k}$. Cette formule

est compatible avec l'expression de $c_0(F)$, donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, c_k(F) = \pi e^{-2\pi k}}$.

Q20 – Les fonctions $x \mapsto c_n(F) e^{2i\pi nx}$ sont pour $n \in \mathbb{N}$ continues sur $\mathbb{R}$ et on a pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $|c_n(F) e^{2i\pi nx}| = \pi e^{-2\pi n}$ et la série géométrique $\sum \pi e^{-2\pi n}$ de raison $e^{-2\pi} \in [0, 1[$ converge,

donc par convergence normale la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi nx}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. De

la même façon en utilisant $c_{-n}(F) = c_n(F)$ on montre qu'il en est de même pour la fonction

$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}$. Ainsi : $\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

De plus sachant $e^{2i\pi n(x+1)} = e^{2i\pi nx}$ et $e^{-2i\pi n(x+1)} = e^{-2i\pi nx}$ on a $G(x+1) = G(x)$ et $\boxed{G \text{ est 1-périodique}}$.

Q21 – Avec $c_{-n}(F) = c_n(F)$ on a pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(G) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi(n-k)t} dt + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi(-n-k)t} dt$$

On montre de la même façon la convergence normale des deux séries de fonctions continues en cause et on obtient :

$$c_k(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 c_n(F) e^{2i\pi(n-k)t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 c_n(F) e^{2i\pi(-n-k)t} dt$$

Avec Q19, il y a un seul n dans les deux sommes qui annule $n - k$ ou $-n - k$ (selon le signe de k), donc toutes les intégrales sauf une sont nulles, et il reste :

- Si $k \in \mathbb{N}$: $c_k(G) = \int_0^1 c_k(F) dt = c_k(F)$ (issu de la première somme pour $k = n$)
- Si $k \leq -1$: $c_k(G) = \int_0^1 c_{-k}(F) dt = c_k(F)$ (issu de la seconde somme pour $k = -n$)

Finalement, F et G sont continues sur $\mathbb{R}$, 1-périodiques, et $\forall k \in \mathbb{Z}, c_k(G) = c_k(F)$, ce qui permet d'affirmer d'après le résultat admis : $\boxed{F = G}$.

Q22 – On calcule donc pour $x \in \mathbb{R}$ et avec les calculs de Q19 :

$$F(x) = G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{2i\pi n x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \pi e^{-2\pi n} e^{-2i\pi n x} = \pi \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n(1-ix)} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n(1+ix)} \right)$$

Il s'agit de sommes géométriques de raisons respectives $e^{-2\pi(1-ix)}$ et $e^{-2\pi(1+ix)}$ avec $\left| e^{-2\pi(1-ix)} \right| = \left| e^{-2\pi(1+ix)} \right| = e^{-2\pi} < 1$, donc :

$$F(x) = \pi \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi(1-ix)}} + \frac{1}{1 - e^{-2\pi(1+ix)}} - 1 \right) = \pi \left(-1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi(1-ix)}} \right) \right)$$

Je laisse aux courageux le soin d'achever le calcul.