

CCINP 2026 — Mathématiques 1

FILIÈRE MP-MPI

Un corrigé – J. Larochette – Lycée Leconte de Lisle, la Réunion

EXERCICE I

Q1.

```
1 SELECT DISTINCT email FROM eleves WHERE promo != 2025;
```

 SQL

Q2.

```
1 SELECT nom, prenom, sum(montant)
2 FROM eleves e JOIN paiements ON e.id = id_eleve
3 GROUP BY id_eleve
4 ORDER BY nom, prenom;
```

 SQL

Ici, on assume qu'un id d'élève ne peut pas être associé à plusieurs couples (nom, prenom).
Sinon, on peut toujours remplacer la clause GROUP BY par GROUP BY id_eleve, nom, prenom.

Q3.

```
1 SELECT DISTINCT e1.id, e1.email
2 FROM eleves e1, eleves e2
3 WHERE e1.id != e2.id
4 AND (e1.nom, e1.prenom, e1.email, e1.promo) = (e2.nom, e2.prenom, e2.email, e2.promo);
```

 SQL

ou bien

```
1 SELECT DISTINCT e1.id, e1.email
2 FROM eleves e1 JOIN eleves e2
3 ON (e1.nom, e1.prenom, e1.email, e1.promo) = (e2.nom, e2.prenom, e2.email, e2.promo)
4 WHERE e1.id != e2.id;
```

 SQL

ou bien

```
1 SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
2 WHERE EXISTS(SELECT * FROM eleves
3 WHERE id != e.id
4 AND (nom, prenom, email, promo) = (e.nom, e.prenom, e.email, e.promo));
```

 SQL

ou bien

```
1 SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
2 WHERE 0 < (SELECT COUNT(*) FROM eleves
3 WHERE id != e.id
4 AND (nom, prenom, email, promo) = (e.nom, e.prenom, e.email, e.promo));
```

 SQL

ou bien

```
1 SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
2 WHERE id IN (SELECT id FROM eleves
3 WHERE id != e.id
4 AND (nom, prenom, email, promo) = (e.nom, e.prenom, e.email, e.promo));
```

 SQL

ou bien

```
1 SELECT DISTINCT id, email FROM eleves e
2 WHERE email IN (SELECT email FROM eleves
3                 GROUP BY nom, prenom, email, promo
4                 HAVING COUNT(*) > 1);
```

SQL

Q4.

```
1 SELECT id FROM eleves
2 WHERE id NOT IN (SELECT id_eleve FROM paiements);
```

SQL

ou bien

```
1 SELECT id FROM eleves e
2 WHERE NOT EXISTS (SELECT * FROM paiements WHERE e.id = id_eleve);
```

SQL

ou bien

```
1 SELECT id FROM eleves e
2 WHERE 0 = (SELECT COUNT(*) FROM paiements WHERE id_eleve = e.id);
```

SQL

ou bien

```
1 SELECT id FROM eleves
2 EXCEPT
3 SELECT id_eleve FROM paiements;
```

SQL

ou bien

```
1 SELECT id
2 FROM eleves e LEFT JOIN paiements ON e.id = id_eleve
3 WHERE id_eleve IS NULL;
```

SQL

EXERCICE II

Q5. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, donc le rayon de convergence de la série entière définissant G_X est au moins égal à 1. Comme il y a convergence absolue en $t = \pm 1$, G_X est définie (au moins sur) $[-1, 1]$.

Autre argument possible : pour tout $t \in [-1, 1]$, $|\mathbb{P}(X = n)t^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$, donc la série $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge normalement donc simplement sur $[-1, 1]$.

Q6. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $G_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$ est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, si $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

en reconnaissant une série exponentielle (donc convergente).

Q7. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et $t \in]-1, 1[$, ce qui assure que t soit dans les intervalles ouverts de convergence de G_X et G_Y donc de leur produit de Cauchy, par produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} G_X(t)G_Y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) \right) t^n \underset{X \perp Y}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = n) t^n = G_{X+Y}(t). \end{aligned}$$

Q8. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes.

Alors, avec les questions précédentes, pour $t \in]-1, 1[$,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant $\mathcal{G}(\lambda + \mu)$.

Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que $X + Y \sim \mathcal{G}(\lambda + \mu)$.

PROBLÈME

Partie I – Calcul d'une intégrale

Q9. Soit $x > 0$ et $f : t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it}$.

Alors f est continue par opérations sur $\mathbb{R}$. Puis,

$$|f(t)| = \frac{x}{x^2 + t^2} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{x}{t^2}$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ par comparaison à une intégrale de Riemann avec $2 > 1$.

Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale définissant g converge et g est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q10. Soit $x > 0$. On effectue un changement de variable $t = xu$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Alors

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (xu)^2} e^{ixu} x du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} du$$

On en déduit que, pour tout $x > 0$, dans $[0, +\infty]$,

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \right| du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = [\text{Arctan}(u)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi < +\infty$$

donc g est bornée sur $]0, +\infty[$.

Q11. On utilise le théorème de convergence dominée en posant $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, u) & \longmapsto & \frac{e^{ixu}}{1 + u^2} \end{cases}$

H1 Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $h(x, u) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} H(u) = \frac{1}{1 + u^2}$.

H2 H et toutes les $u \mapsto h(x, u)$ pour $x > 0$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

H3 Pour tout $(x, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$|h(x, u)| = \varphi(u) = \frac{1}{1 + u^2}$$

où φ est positive, continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ (et d'intégrale égale à π comme vu précédemment).

(Bien sûr, un $\leq$ suffisait).

Par théorème de convergence dominée, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi$.

Q12. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètre, ce qui n'est possible qu'avec la première forme

de g . On pose donc, cette fois, $h_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, t) & \longmapsto & \frac{x}{x^2 + t^2} e^{it} \end{cases}$

H1 Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h_1(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} : (x, t) \mapsto \frac{x^2 + t^2 - 2x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it} = \frac{t^2 - x^2}{(x^2 + t^2)^2} e^{it}$$

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} : (x, t) \mapsto \frac{-2x(x^2 + t^2)^2 - 4x(t^2 - x^2)(x^2 + t^2)}{(x^2 + t^2)^4} e^{it} = \frac{-2x(x^2 + t^2) - 4x(t^2 - x^2)}{(x^2 + t^2)^4} e^{it} = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it}$$

H2 Pour tout $x > 0$ et tout $k \in \{0, 1, 2\}$, $\frac{\partial^k h_1}{\partial x^k}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

H3 Soit $x > 0$.

- $|h_1(x, t)| \sim \frac{x}{t^2}$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, donc, par comparaison à une fonction de Riemann intégrable, $t \mapsto h_1(x, t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.
- $\left| \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, t) \right| \sim \frac{1}{t^2}$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, donc, par comparaison à une fonction de Riemann intégrable, $t \mapsto \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

H3 Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in [a, b]$ où $0 < a < b$,

$$\left| \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{2b(b^2 + 3t^2)}{(a^2 + t^2)^3} = \psi(t)$$

où ψ est positive, continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ car, lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, $\psi(t) \sim \frac{6b}{t^4}$ où l'on reconnaît une fonction de Riemann intégrable au voisinage de $\pm\infty$ car $4 > 1$.

Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $g'' : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3} e^{it} dt$.

Q13. Soit $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On pose $\zeta(x, t) = \frac{x}{x^2 + t^2}$. Comme dans la question précédente, on calcule

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(x, t) = \frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3}.$$

Ensuite,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) = -\frac{2xt}{(x^2 + t^2)^2} = -2xt(x^2 + t^2)^{-2},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x, t) = -2x(x^2 + t^2)^{-2} + 8xt^2(x^2 + t^2)^{-3} = -\frac{2x(x^2 + t^2) - 8xt^2}{(x^2 + t^2)^3} = -\frac{2x(x^2 - 3t^2)}{(x^2 + t^2)^3}.$$

Bref, $\Delta \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ est constamment nulle.

On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$g''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x, t) e^{it} dt$$

Effectuons une double intégration par partie en intégrant $t \mapsto \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x, t)$ puis $t \mapsto \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t)$ et en dérivant deux fois $t \mapsto e^{it}$. Soit $A, B \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x, t) e^{it} dt &= \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) e^{it} \right]_A^B - i \int_A^B \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) e^{it} dt \\ &= \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) e^{it} \right]_A^B - i \left(\left[\zeta(x, t) e^{it} \right]_A^B - i \int_A^B \zeta(x, t) e^{it} dt \right) \\ &= \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) - i \zeta(x, t) \right) e^{it} \right]_A^B - \int_A^B \zeta(x, t) e^{it} dt \end{aligned}$$

avec $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t) - i \zeta(x, t) \right| \leq \frac{2x|t|}{(x^2 + t^2)^2} + \frac{x}{x^2 + t^2} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$.

Ainsi, en faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, on obtient, pour tout $x > 0$, $g''(x) = g(x)$.

Q14.

- On tire de la question précédente qu'il existe des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que $g : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$ (car $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x})$ est un système fondamental de solution de l'équation différentielle trouvée.)
- Comme g est bornée au voisinage de $+\infty$ (question **Q10**), $A = 0$.
- Comme $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \pi$ (question **Q11**), $B = \pi$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $g(x) = \pi e^{-x}$.

Partie II – Formule sommatoire de Poisson

Q15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$0 \leq f(x \pm n) = \frac{1}{1 + (x \pm n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$), par comparaisons de termes généraux positifs, $\sum f(x + n)$ et $\sum f(x - n)$ convergent et F est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, si $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \in \mathbb{R}$ et

$$F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+(n+1)) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-(n-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x+n) + f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) = F(x)$$

donc F est 1-périodique.

Q16. On remarque que $F : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (f(x+n) + f(x-n))$ avec $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ continue sur $[0, 1]$.

Appliquons le théorème de continuité des séries de fonctions à $f_n : x \mapsto f(x+n) + f(x-n) = \frac{1}{1+(x+n)^2} + \frac{1}{1+(x-n)^2}$ sur $[0, 1]$.

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est bien continue sur $[0, 1]$.

H2 Pour tout $x \in [0, 1]$, pour tout $n \geq 2$,

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+n^2+2nx+x^2} + \frac{1}{1+n^2-2nx+x^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2-2n} \leq \frac{2}{n^2-2n}$$

donc $0 \leq N_{\infty, [0,1]}(f_n) \leq \frac{2}{n^2-2n} \sim \frac{2}{n^2}$ qui est un terme général de série convergente.

Par comparaison de séries à termes généraux positifs, on obtient la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.

On en déduit que F est continue sur $[0, 1]$, et, par 1-périodicité démontrée à la question précédente, continue sur $\mathbb{R}$, en remarquant que la continuité à droite de 0 et celle à gauche de 1 avec $F(0) = F(1)$ donne bien la continuité en tout entier.

Q17. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$c_k(F) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) e^{-2i\pi kt} dt$$

Or la convergence normale de $\sum f_n$ et le fait que $e^{-2i\pi kt}$ soit de module 1 assure la convergence normale donc uniforme de $\sum f_n(t) e^{-2i\pi kt}$ sur le segment $[0, 1]$.

On peut donc intervertir.

$$c_k(F) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) e^{-2i\pi kt} dt = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n) e^{-2i\pi kt} dt$$

On effectue le changement de variable $u = t + n$ dans l'intégrale de la première somme et $u = t - n$ celle de la deuxième somme. On obtient

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi k(u-n)} du + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-(n-1)} f(u) e^{-2i\pi k(u+n)} du \\ &= \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi kt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-(n-1)} f(u) e^{-2i\pi ku} du \end{aligned}$$

en utilisant le fait que si $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{\pm 2i\pi kn} = 1$.

Or, en revenant aux sommes partielles et en utilisant la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du &= \int_1^{N+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt \\ \sum_{n=1}^N \int_{-n}^{-(n-1)} f(u) e^{-2i\pi ku} du &= \int_{-N}^0 f(u) e^{-2i\pi ku} du \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-2i\pi kt} dt \end{aligned}$$

On a donc bien $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt$.

Q18. Soit $n, k \in \mathbb{Z}$.

Si $n + k = 0$, alors $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = 1$.

Si $n + k \neq 0$, alors $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi(n+k)t}}{-2i\pi(n+k)} \right]_0^1 = 0$.

Ainsi, $\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t} dt = \delta_{n,-k}$.

Partie III – Applications

Q19. D'après **Q17**, $c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \pi$.

Soit $k > 0$. D'après **Q17**, **Q10**, **Q14** et en commençant par un changement de variable $u = -t$ (on remarque que f est paire), $c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi kt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{2i\pi ku} du = g(2k\pi) = \pi e^{-2k\pi}$ (valable pour $k = 0$).

Q20. G est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $n \geq 1$, $|c_n(F) e^{2i\pi nx}| = c_n(F) = \pi e^{-2n\pi}$ est un terme général de série géométrique convergente, et $|c_{-n}(F) e^{-2i\pi nx}| = c_{-n}(F) = c_n(F)$.

Ensuite, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \pi + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n\pi} (e^{2i\pi nx} + e^{-2i\pi nx}) = \pi + 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n\pi} \cos(2\pi nx)$.

On en tire alors la 1-périodicité de G .

Reste à appliquer le théorème de continuité des séries de fonctions à $g_n : x \mapsto e^{-2n\pi} \cos(2\pi nx)$.

H1 Pour tout $n \geq 1$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.

H2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, $|g_n(x)| \leq e^{-2n\pi}$ terme général de série convergente indépendant de x .

Donc $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Finalement, G est continue sur $\mathbb{R}$.

Q21. Vu le résultat admis et les résultats précédents, comme F et G sont continues sur $\mathbb{R}$ et 1 périodiques, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(F) = c_k(G)$.

Or, si $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(G) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) e^{2i\pi(n-k)t} dt + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) e^{2i\pi(-n-k)t} dt$$

avec $|c_n(F) e^{2i\pi(n-k)t}| = c_n(F) = c_{-n}(F) = |c_{-n}(F) e^{2i\pi(-n-k)t}|$ terme général de série convergente (c'est toujours $\pi e^{-2n\pi}$), il y a donc convergence normale donc uniforme et on peut intervertir avec l'intégrale sur le segment $[0, 1]$.

Ainsi, en utilisant **Q18**,

$$c_k(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \int_0^1 e^{2i\pi(n-k)t} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \int_0^1 e^{2i\pi(-n-k)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \delta_{n,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \delta_{n,-k} = c_k(F)$$

car n prend exactement une fois soit la valeur de $k \geq 0$, soit la valeur de $-k \geq 1$.

Le résultat admis nous permet alors de conclure que $F = G$.

Q22. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= G(x) = \pi + 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n\pi} \cos(2\pi nx) = -\pi + 2\pi \Re \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n\pi} e^{2i\pi nx} \right) = -\pi + 2\pi \Re \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2\pi+2i\pi x})^n \right) \\ &= -\pi + 2\pi \Re \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi+2i\pi x}} \right) \quad \text{avec } |e^{-2\pi+2i\pi x}| = e^{-2\pi} < 1 \\ &= -\pi + 2\pi \Re \left(\frac{1 - e^{-2\pi-2i\pi x}}{|1 - e^{-2\pi+2i\pi x}|^2} \right) \\ &= -\pi + 2\pi \frac{1 - e^{-2\pi} \cos(2\pi x)}{(1 - e^{-2\pi} \cos(2\pi x))^2 + e^{-4\pi} \sin^2(2\pi x)} \\ &= -\pi + 2\pi \frac{1 - e^{-2\pi} \cos(2\pi x)}{1 - 2e^{-2\pi} \cos(2\pi x) + e^{-4\pi}} \\ &= \pi \frac{1 - e^{-4\pi}}{1 - 2e^{-2\pi} \cos(2\pi x) + e^{-4\pi}}. \end{aligned}$$

FIN