

CONCOURS COMMUN INP

SESSION 2026 FILIÈRE MP

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2

m.laamoum2@gmail.com¹

EXERCICE I

On a : $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q.1 • J admet trois lignes identiques, donc $\text{rg}(J) \leq 1$. Comme $J \neq 0$, alors $\text{rg}(J) = 1$.

- La matrice J est symétrique et réelle donc elle est diagonalisable (d'après le théorème spectral).

Par le théorème du rang : $\dim(\text{Ker } J) = 3 - \text{rg}(J) = 2$. Donc 0 est valeur propre de multiplicité $m \geq 2$. Soit λ l'autre valeur propre de J .

La trace de J vaut

$$\text{Tr}(J) = 3 = \sum_{\mu \in \text{Sp}(J)} \mu = m \cdot 0 + \lambda.$$

donc $\lambda = 3$ et $\text{Sp}(J) = \{0, 3\}$.

Ainsi il existe une matrice P inversible telle que :

$$J = P.D.P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

Q.2 Comme $A = aJ + bI_3$ et que $J = P.D.P^{-1}$, alors :

$$A = P(aD + bI_3)P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 3a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

A est donc diagonalisable et semblable à :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3a+b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Q.3 A est diagonalisable donc π_A est scindé à racines simples, et on sait que les racines de π_A sont exactement les valeurs propres de A .

¹ <https://tinyurl.com/hb8n2vr9>

Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(\Delta) = \{b, 3a + b\}$. Donc $\boxed{\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)}$.

Q.4 On pose $\lambda = 3a + b$.

a) Méthode 1 :

On effectue la division euclidienne de X^n par $\pi_A = (X - b)(X - \lambda)$:

$$X^n = Q(X) \cdot \pi_A(X) + R_n(X) \text{ avec } R_n(X) = \alpha_n X + \beta_n.$$

En évaluant en les racines b et λ de π_A :

$$\begin{cases} \alpha b + \beta = b^n \\ \alpha \lambda + \beta = \lambda^n \end{cases}$$

Comme $\begin{vmatrix} b & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = b - \lambda = -3a \neq 0$, alors

$$\alpha_n = \frac{\begin{vmatrix} b^n & 1 \\ \lambda^n & 1 \end{vmatrix}}{-3a} = \frac{\lambda^n - b^n}{3a}, \quad \beta_n = \frac{\begin{vmatrix} b & b^n \\ \lambda & \lambda^n \end{vmatrix}}{-3a} = \frac{b\lambda^n - \lambda b^n}{-3a} = \frac{b\lambda}{3a} (b^{n-1} - \lambda^{n-1}).$$

Puisque $\pi_A(A) = 0$, on a $A^n = R(A) = \alpha_n A + \beta_n \text{I}_3$, donc :

$$\boxed{A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{3a} A + \frac{b\lambda}{3a} (b^{n-1} - \lambda^{n-1}) \text{I}_3 \text{ avec } \lambda = 3a + b}.$$

b) Méthode 2 :

- On a $J^2 = 3J$ et par récurrence $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \geq 1$.
- J et I_3 commutent, donc par la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aJ + b\text{I}_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k.$$

On sépare le terme $k = 0$ où $J^0 = \text{I}_3$:

$$A^n = b^n \text{I}_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \cdot 3^{k-1} J = b^n \text{I}_3 + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} \right] J = b^n \text{I}_3 + \frac{1}{3} [(3a + b)^n - b^n] J$$

$$\text{Donc : } \boxed{A^n = b^n \text{I}_3 + \frac{\lambda^n - b^n}{3} J \text{ avec } \lambda = 3a + b}.$$

$$\text{La relation } J = \frac{1}{a}(A - b\text{I}_3) \text{ donne } \boxed{A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{3a} A + \frac{b\lambda}{3a} (b^{n-1} - \lambda^{n-1}) \text{I}_3 \text{ avec } \lambda = 3a + b}.$$

EXERCICE II

Soit $n \geq 1$, $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} \in \mathbb{R}[X]$, $\omega_k = e^{i2k\pi/n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- j est racine de $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$. Puisque $j \neq 1$ donc $1 + j + j^2 = 0$.
- Soit $P(X) = 3 + 2X + X^2$.

On a $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = j$ et $\omega_2 = j^2$. On a $j^2 = \bar{j}$.

Puisque P a des coefficients réels : $P(j^2) = P(\bar{j}) = \overline{P(j)}$, donc

$$P(\omega_1)P(\omega_2) = P(j)\overline{P(j)} = |P(j)|^2 \geq 0$$

Ainsi $P(\omega_0)P(\omega_1)P(\omega_2) = 6|P(j)|^2 \in \mathbb{R}$. Donc $(*)$ est vérifiée.

Q.5 On a

$$\chi_J(X) = \det(XI_n - J) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & X & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}.$$

On le développe selon la première ligne, on obtient la somme de deux déterminants d'ordre $n-1$:

$$\chi_J(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix}$$

le premier déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} = X^{n-1}$$

et le second

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} = -1 \times (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & X & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} = -1$$

Donc $\boxed{\chi_J(X) = X^n - 1}$.

Q.6 On remarque que : $A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 M_2 + \dots + a_{n-1} M_{n-1}$ et on vérifie par récurrence que pour $2 \leq k \leq n-1$:
 $M_k = J^k$.

Par suite $\boxed{A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = P(J)}$.

Q.7 Les racines de $\chi_J = X^n - 1$ sont les $\omega_k = e^{i2k\pi/n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. J admet n valeurs propres deux à deux distinctes, donc J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$:

$$J = Q.\text{Diag}(1, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}).Q^{-1} \text{ avec } Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

Et on a pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ $J^k = Q.\text{Diag}(1, \omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_{n-1}^k).Q^{-1}$.

Par suite :

$$A = P(J) = Q.\text{Diag}(P(1), P(\omega_1), P(\omega_2), \dots, P(\omega_{n-1})).Q^{-1}.$$

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, de valeurs propres $P(\omega_k)$, $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- Si il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $P(\omega_k) = 0$ alors $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) = 0 \in \mathbb{R}$.
- Supposons que $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) \neq 0$.

Par la formule du déterminant en fonction des valeurs propres :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = P(1) \cdot P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}).$$

- Si $P(1) \neq 0$ alors $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) = \frac{\det(A)}{P(1)} \in \mathbb{R}$.
- Si $P(1) = 0$. Posons pour $\delta \in \mathbb{R}^*$, $P_\delta = P + \delta$.

On a $P_\delta \in \mathbb{R}[X]$ et $P_\delta(1) = \delta \neq 0$. D'après le cas précédent $P_\delta(\omega_1) \cdots P_\delta(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}$.

Ce qui donne : pour tout $\delta \in \mathbb{R}^*$ la partie imaginaire $\text{Im}(P_\delta(\omega_1) \cdots P_\delta(\omega_{n-1})) = 0$.

Par continuité de l'application $z \mapsto \text{Im}(z)$ on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Im}(P_\delta(\omega_1) \cdots P_\delta(\omega_{n-1})) = \text{Im}(P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1})) = 0$$

donc $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}$.

Ce qui prouve la propriété (*) .

PROBLÈME

Q.10 a) $(e_0, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F .

Soit $x \in E$, posons $z = x - \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$.

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\langle z | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle - \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle \underbrace{\langle e_i | e_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle x | e_j \rangle - \langle x | e_j \rangle = 0.$$

On a $z \perp e_j$ pour tout j , donc $z \in F^\perp$. De plus $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i \in F$. Par unicité du projeté orthogonal :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i.}$$

b) Soit $x \in E$. On décompose x comme suit : $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$. Puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F$, le théorème de Pythagore donne :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

De plus on a

$$\|p_F(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2.$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2}.$$

Q.11 On pose $F = \mathbb{R}_n[X]$, $I = [0, +\infty[$, et E est l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur I .

• Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a $(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2 \geq 0$, donc $\boxed{|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}}$.

• Pour $f, g \in E$ et $t \in I$:

$$|f(t)g(t)e^{-t}| \leq \frac{(f(t))^2 e^{-t} + (g(t))^2 e^{-t}}{2}.$$

Les fonctions $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ et $t \mapsto (g(t))^2 e^{-t}$ sont intégrables sur I , donc par comparaison, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur I .

Q.12 • E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$:

► La fonction nulle est dans E et $E \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

► Pour $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$[(\alpha f + \beta g)(t)]^2 = \alpha^2 (f(t))^2 + \beta^2 (g(t))^2 + 2\alpha\beta f(t)g(t)$$

l'inégalité Q11 donne $2\alpha\beta f(t)g(t) \leq \alpha^2 (f(t))^2 + \beta^2 (g(t))^2$, donc

$$[(\alpha f + \beta g)(t)]^2 \leq 2\alpha^2 (f(t))^2 + 2\beta^2 (g(t))^2$$

Par comparaison la fonction $t \mapsto (\alpha f(t) + \beta g(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur I , donc $\alpha f + \beta g \in E$.

Donc E est un s.e.v de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

- D'après Q11, l'expression $\langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$ est bien définie pour f, g dans E .

► La bilinéarité et la symétrie découlent de la linéarité de l'intégrale.

► Positivité : $\langle f | f \rangle = \int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t} dt \geq 0$.

► Si $\langle f | f \rangle = 0$ alors $\int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t} dt = 0$, or l'application $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ est continue et positive donc elle est nulle, par suite $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q.13 $F = \mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, On a $(P(t))^2 e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(t^{2n} e^{-t})$, donc l'application $t \mapsto (P(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur I , par suite $P \in E$. Ainsi $F \subset E$, donc c'est bien un sous-espace vectoriel de E .

Q.14 On pose $h_n(x) = x^n e^{-x}$ et $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$.

a) Soit $p \leq n$.

Par la formule de Leibniz :

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (x^n)^{(k)} (e^{-x})^{(p-k)}.$$

On a $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ pour $k \leq n$ et $(e^{-x})^{(p-k)} = (-1)^{p-k} e^{-x}$.

Ainsi pour $p \leq n$:
$$h_n^{(p)}(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{p-k} x^{n-k}.$$

Si $p < n$ alors $n - k \geq n - p \geq 1 > 0$, donc :
$$h_n^{(p)}(0) = 0 \quad \text{pour tout } p < n.$$

b) On a :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} x^{n-k}.$$

par le changement $j = n - k$:
$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{j!} x^j.$$

L_n est un polynôme de degré n , de coefficient de plus haut degré : $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Q.15 Soit $g \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Pour calculer $\langle g | h_n^{(n)} \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt$

on fait n intégrations par parties :

D'après Q14.a, pour $p \leq n$ $h_n^{(p)}(0) = 0$ et $h_n^{(p)}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^p t^n e^{-t}$.

Ce qui va permettre, en prenant une borne A , d'écrire la première intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[g(t) h_n^{(n-1)}(t) \right]_0^A - \int_0^A g'(t) h_n^{(n-1)}(t) dt \right).$$

On a $g(0) h_n^{(n-1)}(0) = 0$ et $g(t) h_n^{(p)}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} C_d (-1)^p t^{n+d} e^{-t}$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[g(t) h_n^{(n-1)}(t) \right]_0^A \right) = 0$ et

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = - \int_0^{+\infty} g'(t) h_n^{(n-1)}(t) dt.$$

On suppose pour $2 \leq k \leq n-1$ que

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t) h_n^{(n-k)}(t) dt.$$

alors

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^k \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[g^{(k)}(t) h_n^{(n-k-1)}(t) \right]_0^A - \int_0^A g^{(k)}(t) h_n^{(n-k-1)}(t) dt \right).$$

de même, la limite du terme entre crochets est nulle, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t) h_n^{(n-k-1)}(t) dt$$

Ainsi pour $k = n$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$$

Donc :

$$\langle g | h_n^{(n)} \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt$$

On a

$$\langle g | L_n \rangle = \int_0^{+\infty} g(t) L_n(t) e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$$

Ainsi $\boxed{\langle g | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt}.$

Q.16 Appliquons la formule de Q15 avec $g = L_i$:

$$\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t) t^j e^{-t} dt.$$

Or $\deg(L_i) = i < j$, donc $L_i^{(j)} = 0$. Ainsi $\boxed{\langle L_i | L_j \rangle = 0}$.

Q.17 Une intégration par parties donne $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

En appliquant la formule de Q15 avec $g = L_n$:

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

L_n est de degré n et le coefficient dominant de L_n est $\frac{(-1)^n}{n!}$, donc $L_n^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot n! = (-1)^n$.

Par suite $\langle L_n | L_n \rangle = 1$.

Donc $\boxed{\|L_n\| = 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

Q.18 On a montré :

- $\langle L_i | L_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ (Q16),
- $\langle L_n | L_n \rangle = 1$ pour tout n (Q17).

Donc $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthonormée de $F = \mathbb{R}_n[X]$.

Comme $\dim F = n+1$, alors $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de F .

Par Q10, on a pour tout $g \in E$, le projeté orthogonal sur F est :

$$p_F(g) = \sum_{k=0}^n \langle g | L_k \rangle L_k.$$

Q.19 Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, \dots, L_N)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_N[X]$. Par l'inégalité de Bessel (Q10b) appliquée dans E avec $F_N = \mathbb{R}_N[X]$:

$$\sum_{k=0}^N \langle g \mid L_k \rangle^2 \leq \|g\|^2 < +\infty.$$

La suite des sommes partielles est croissante (termes positifs) et majorée par $\|g\|^2$, donc la série $\sum_{n \geq 0} \langle g \mid L_n \rangle^2$ converge.

De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \mid L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

Q.20 Soit $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$

On a $(g_\alpha(t))^2 e^{-t} = e^{-(2\alpha+1)t}$. Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $2\alpha + 1 > 0$.

Donc pour tout $\alpha > -\frac{1}{2}$, $g_\alpha \in E$.

On a $g_\alpha^{(n)}(t) = (-\alpha)^n e^{-\alpha t}$. Donc d'après Q15 :

$$\langle g_\alpha \mid L_n \rangle = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(1+\alpha)t} dt.$$

Par le changement de variable $u = (1 + \alpha)t$:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-(1+\alpha)t} dt = \frac{1}{(1+\alpha)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{(1+\alpha)^{n+1}}.$$

Donc :

$$\langle g_\alpha \mid L_n \rangle = \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)^{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha \mid L_n \rangle^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(1+\alpha)^{2n+2}} = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \right)^n.$$

On pose $r = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$. Comme $\alpha > -\frac{1}{2}$ on a $(1+\alpha)^2 - \alpha^2 = 2\alpha + 1 > 0$, donc $r < 1$.

La série géométrique $\sum r^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}} = \frac{(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2} = \frac{(1+\alpha)^2}{1+2\alpha}.$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha \mid L_n \rangle^2 = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{(1+\alpha)^2}{1+2\alpha} = \frac{1}{1+2\alpha}.$$

Calculons $\|g_\alpha\|^2$:

$$\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

Ainsi $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha \mid L_n \rangle^2 = \frac{1}{1+2\alpha} = \|g_\alpha\|^2}.$