

Correction CCINP 2026 - MPI

Exercice 1

Q1. J a trois colonnes non nulles donc

$$\boxed{\text{rg}(J) = 1.}$$

Ainsi $\dim \text{Ker } J = 2$ et on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\text{Ker } J$ et forment une famille libre, donc

$$\text{Ker } J = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi J ne peut avoir qu'une seule autre valeur propre, et elle est simple. Comme $\text{tr } J$ est la somme des valeurs propres de J , cette valeur propre est 3.

On pourrait aussi remarquer que $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension 2, et celui associé à 3 de dimension 1, donc

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable, semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

Q2. Il existe donc P inversible telle que $J = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Or $A = aJ + bI_3 = aPDP^{-1} + bPI_3P^{-1} = P(aD + bI_3)P^{-1}$.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}.}$$

Q3. A a deux valeurs propres : b et $3a + b$. Or $a \neq 0$ donc ces deux valeurs propres sont distinctes. Donc d'après le cours,

$$\boxed{\text{le polynôme minimal de } A \text{ est } (X - b)(X - 3a - b).}$$

Q4. (a) Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$X^n = Q\pi_A + \alpha X + \beta$$

donc $\lambda^n = Q(\lambda)\pi_A(\lambda) + \alpha\lambda + \beta = \alpha\lambda + \beta$ car $\pi_A(\lambda) = 0$.

De même $b^n = \alpha b + \beta$.

Ainsi, par pivot de Gauss, $\beta = \frac{b\lambda^n - \lambda b^n}{b - \lambda}$ et $\alpha = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b}$.

Puisque $\pi_A(A) = 0$, nous avons $A^n = \alpha A + \beta I_3$ donc

$$A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b} A + \frac{b\lambda^n - \lambda b^n}{b - \lambda} I_3.$$

(b) Un calcul rapide donne $J^2 = 3J$ et une récurrence sans piège donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J^k = 3^{k-1} J.$$

Puisque J et I_3 commutent, nous pouvons utiliser le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= (aJ + bI_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} J^k \\ &= b^n I_3 + j \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} J = b^n I_3 + j((3a+b)^n - b^n) J. \end{aligned}$$

Finalement :

$$A^n = b^n I_3 + j(\lambda^n - b^n) J.$$

Exercice 2

Q5. On sait que la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle, donc :

$$1 + j + j^2 = 0.$$

Posons $P = X^2 + 2X - 1$. Soit $\omega_1 = j$ et $\omega_2 = j^2$.

Alors, puisque P est réel :

$$P(\omega_2) = P(\omega_1) = \overline{P(\omega_1)}$$

donc $P(\omega_1)P(\omega_2) = P(\omega_1)\overline{P(\omega_1)} \in \mathbb{R}$ et finalement

$$P(\omega_1)P(\omega_2) \in \mathbb{R}.$$

Q6. Grâce à des développements par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \chi_J &= \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & X \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^n + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & X & -1 \end{vmatrix} \\
&= X^n + (-1)^n \times (-1)^{n-1} = X^n - 1
\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{\chi_J = X^n - 1}$$

Q7. On remarque que :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

c'est-à-dire qu'à chaque puissance, les colonnes de J se décalent d'une case vers la droite. Ainsi,

$$\boxed{P(J) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = A.}$$

Q8. $X^n - 1$ est scindé à racines simples donc J est diagonalisable. Les racines de χ_J sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ donc

$$\boxed{J \text{ est diagonalisable, semblable à } D = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1}).}$$

Q9. Il existe M inversible telle que $J = MDM^{-1}$ donc $\forall k \in [0, n-1], J^k = MD^k M^{-1}$. Ainsi :

$$A = P(J) = MP(D)M^{-1} = M \text{diag}(P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1}))M^{-1}.$$

Alors $\det A = \det M \times P(1) \times P(\omega) \times \cdots \times P(\omega^{n-1}) \times \frac{1}{\det M} = P(1)P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1})$.

Or A est réelle donc $\det A \in \mathbb{R}$ et P est réel donc $P(1) \in \mathbb{R}$.

• Si $P(1) \neq 0$, on peut donc conclure que $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}$.

• Si $P(1) = 0$, alors $\chi_A = X \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$.

Son coefficient de degré 1 est donc $(-1)^{n-1} P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1})$. Or A est réelle donc $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, ce qui permet aussi de conclure que $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas,

$$\boxed{P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}.}$$

On peut donner une autre démonstration plus rapide : les $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ sont deux à deux conjugués, sauf éventuellement si n est pair ou $-1 = \omega_{n/2}$. Donc les $P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})$ sont deux à deux conjugués, sauf $P(-1)$ si n est pair, mais alors $P(-1) \in \mathbb{R}$. Donc $P(\omega_1) \cdots P(\omega_{n-1}) \in \mathbb{R}$.

Problème

Q10. (a) Posons $y = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ et soit $g \in F$.

Alors nous savons que $g = \sum_{i=0}^n \langle g | e_i \rangle e_i$.

Donc :

$$\langle y | g \rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \langle x | e_i \rangle \langle g | e_k \rangle \langle e_i | e_k \rangle = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle \langle g | e_i \rangle$$

car $\langle e_i | e_k \rangle = \delta_{i,k}$.

De plus $\langle x | g \rangle = \sum_{i=0}^n \langle g | e_i \rangle \langle x | e_i \rangle$ donc $\langle x - y | g \rangle = 0$, d'où $x - y \in F^\perp$.

Par unicité de $p_F(x)$, $y = p_F(x)$, soit :

$$p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i.$$

(b) $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et $p_F(x) \perp (x - p_F(x))$, donc avec le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$$

donc

$$\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$$

De plus, $(e_0, \dots, e_n)$ étant orthonormale, et puisque $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$, $\|p_F(x)\|^2 =$

$\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2$, donc

$$\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Q11. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

Alors $0 \leq (|a| - |b|)^2 = a^2 + b^2 - 2|ab|$ donc

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Soit $f, g \in E$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{f^2(t) + g^2(t)}{2}$$

donc $|f(t)g(t)e^{-t}| \leq \frac{1}{2} (f^2(t)e^{-t} + g^2(t)e^{-t})$.

Puisque $f, g \in E$, $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} g^2(t)e^{-t} dt$ convergent. Donc par majoration,

$\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)e^{-t}| dt$ converge. Cela signifie que

$$t \mapsto f(t)g(t)e^{-t} \text{ est intégrable sur } I.$$

Q12. La fonction nulle est évidemment dans E .

Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $f + \lambda g$ est bien continue sur I et pour tout $t \in I$:

$$(f + \lambda g)^2(t)e^{-t} = f^2(t)e^{-t} + \lambda^2 g^2(t)e^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)e^{-t}$$

et $t \mapsto (f + \lambda g)^2(t)e^{-t}$ est donc la combinaison linéaire de trois fonctions intégrables sur I : elle l'est donc ainsi et $f + \lambda g \in E$.

Par conséquent,

$$E \text{ est un sev de } \mathcal{C}^0(I).$$

Le fait que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit un produit scalaire est quasiment une question de cours.

Si $f, g \in E$, $\langle f | g \rangle$ est bien définie grâce à la question précédente.

La symétrie, la bilinéarité et le caractère défini positif sont à rédiger mais ne posent pas de problème.

Soit $f \in E$ tel que $\langle f | f \rangle = 0$. Puisque $t \mapsto f^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur I , elle est nulle. Or $\forall t \in E, I, e^{-t} \neq 0$ donc $f = 0$ sur I .

$$\text{Finalement } \langle \cdot | \cdot \rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E.$$

Q13. On sait que E et F sont des sev de $\mathcal{C}^0(I)$. Il suffit donc de montrer que $F \subset E$.

Soit $P \in F$. Par croissances comparées, $P^2(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann, $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est intégrable sur I , ce qui assure que $F \subset E$.

$$\text{Alors } F \text{ est un sev de } E.$$

Q14. (a) Soit $h : x \mapsto x^n$. On montre aisément par récurrence que pour tout $p \leq n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_n^{(p)}(x) = \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} e^{-x}.$$

Ainsi, avec la formule de Leibniz :

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} e^{-x} (-1)^{p-k}$$

Si $p < n, \forall k \in [0, p], n - k > 0$ donc :

$$\text{si } p < n, \quad h_n^{(p)}(0) = 0.$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} n! e^{-x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} e^{-x} (-1)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} e^{-x} (-1)^{n-k} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} e^{-x} (-1)^{n-k}. \end{aligned}$$

$$L_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant égal à } \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Q15. Il y a ici une erreur d'énoncé : $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$ doit être remplacé par $\int_0^{+\infty} g h_n^{(n)}$.

g et $h_n^{(n)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc sous réserve de limite finie du crochet, on a par IPP :

$$\int_0^{+\infty} g h_n^{(n)} = [g' h_n^{(n-1)}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g' h_n^{(n-1)}.$$

Or $g' h_n^{(n-1)}$ est un polynôme multiplié par $x \mapsto e^{-x}$ grâce à la question **Q14a**, donc par croissances comparées elle est de limite nulle en $+\infty$.

De plus, toujours avec **Q14a**, $(g' h_n^{(n-1)})(0) = 0$. L'IPP est donc licite et on a :

$$\int_0^{+\infty} g h_n^{(n)} = - \int_0^{+\infty} g' h_n^{(n-1)}.$$

Le même raisonnement peut être itéré $(n-1)$ fois supplémentaires car toutes les dérivées de g sont des polynômes et la question **Q14a** s'applique toujours, et après récurrence on obtient :

$$\int_0^{+\infty} g h_n^{(n)} = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)} h_n.$$

Ensuite :

$$\langle g | L_n \rangle = \int_0^{+\infty} g(x) \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g h_n^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)} h_n$$

c'est-à-dire :

$$\langle g | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

Q16. Directement avec la question précédente :

$$\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t) t^j e^{-t} dt.$$

Mais $\deg L_i = i < j$ donc $L_i^{(j)} = 0$ et donc

$$\langle L_i | L_j \rangle = 0.$$

Q17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $(H_n) : \ll \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! \gg$.

$$\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$$

donc (H_0) est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie. Alors :

$$t^{n+1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad 0^{n+1} e^0 = 0 \quad \text{donc} \quad [-t^{n+1} e^{-t}]_0^{+\infty} = 0$$

et on a par IPP :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

et (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!}.$$

Nous avons vu à la question **Q14b** que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k}$$

donc $L_n^{(n)}(x) = (-1)^n$.

Alors, avec la question **Q15** :

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^{2n}}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

et donc avec le premier résultat :

$$\boxed{\langle L_n | L_n \rangle = 1}.$$

Q18. On en conclut que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthonormale de F . Elle est donc libre et comme $\dim F = n+1 = \text{card}(L_0, L_1, \dots, L_n)$,

$$\boxed{(L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } F}.$$

La question **Q10a** assure alors que :

$$\boxed{\forall g \in E, \quad p_F(g) = \sum_{i=0}^n \langle g | L_i \rangle L_i}.$$

Q19. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g | L_n \rangle^2$ est croissante car à termes réels positifs, et avec la question **Q10b**, elle est majorée par $\|g\|^2$. Donc

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g | L_n \rangle^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2}.$$

Q20. Soit $\alpha > -\frac{1}{2}$. La fonction g_α est bien continue sur I . Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{1}{2} < \beta < \alpha$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha x > \beta x$ donc $0 < g_\alpha(x) < e^{-\beta x}$ et $0 < g_\alpha^2(x) < e^{-2\beta x}$.

Donc $0 < g_\alpha^2(x) e^x < e^{(-1-2\beta)x}$ or $-1-2\beta < 0$ car $\beta > -\frac{1}{2}$ donc $x \mapsto e^{(-1-2\beta)x}$ est intégrable sur I et par comparaison, $x \mapsto g_\alpha^2(x) e^x$ est intégrable, donc

$$\boxed{g_\alpha \in E.}$$

De plus, $\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} g_\alpha^2(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\alpha)x} dx = \frac{1}{1+2\alpha}$.

On a vu à la question **Q14b** que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k}$$

donc :

$$\langle g_\alpha | L_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \int_0^{+\infty} e^{-(1+\alpha)x} x^{n-k} dx.$$

Comme à la question **Q17**, on montre par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+\alpha)x} x^j dx = \frac{j!}{(1+\alpha)^{j+1}}.$$

Donc :

$$\langle g_\alpha | L_n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{(1+\alpha)^{n-k+1}} = \frac{1}{1+\alpha} \times \left(1 - \frac{1}{1+\alpha}\right)^n = \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n.$$

Or $0 < \frac{1}{1+\alpha} < 2$ car $-\frac{1}{2} < \alpha$ donc $\frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\alpha} \in]-1, 1[$ donc $\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \in]0, 1[$.

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2$ converge et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 &= \frac{1}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\right)^n = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}} \\ &= \frac{1}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{1+2\alpha} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2.}$$