

CCINP 2026
Épreuve de Mathématiques 2
Un corrigé

EXERCICE 1

Q1. La matrice J est définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutes les colonnes sont identiques et non nulles. Le système de vecteurs colonnes est donc lié et engendré par un seul vecteur. Ainsi,

$$\text{rg}(J) = 1.$$

Pour diagonaliser J sans déterminant, nous allons chercher ses valeurs propres et la dimension de ses sous-espaces propres :

- Puisque $\text{rg}(J) = 1$, d'après le théorème du rang, la dimension du noyau $\ker(J)$ est :

$$\dim(\ker(J)) = 3 - \text{rg}(J) = 3 - 1 = 2$$

Ainsi, 0 est une valeur propre de multiplicité au moins 2.

- La trace de la matrice est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{Tr}(J) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

La trace est aussi la somme des valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Si on note λ_3 l'autre valeur propre :

$$0 + 0 + \lambda_3 = 3 \implies \lambda_3 = 3.$$

En conclusion, la matrice J possède deux valeurs propres 0 (double) et 3 (simple). La somme des dimensions des sous-espaces propres ($2 + 1 = 3$) est égale à la taille de la matrice. J est donc semblable à la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q2. On remarque que la matrice A peut s'écrire en fonction de J et de la matrice identité I :

$$A = aJ + bI$$

Puisque J est diagonalisable, A l'est aussi. Si λ est une valeur propre de J , $\mu = a\lambda + b$:

- Pour $\lambda = 0$: $\mu_1 = b$ (multiplicité 2).
- Pour $\lambda = 3$: $\mu_2 = 3a + b$ (multiplicité 1).

A est donc semblable à la matrice diagonale :

$$D_A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3a + b \end{pmatrix}.$$

Q3. D'après la question précédente, la matrice A est diagonalisable. Le polynôme minimal π_A est donc scindé à racines simples dont les racines sont les valeurs propres de la matrice A , chacune avec une multiplicité de 1.

Les valeurs propres distinctes de A sont $\mu_1 = b$ et $\mu_2 = 3a + b$. Ainsi, le polynôme minimal est :

$$\pi_A = (X - b)(X - (3a + b)) = (X - b)(X - 3a - b).$$

Q4. (a) La division euclidienne de X^n par $\pi_A(X) = (X - b)(X - \lambda)$ avec $\lambda = 3a + b$ montre qu'il existe α et β des réels tels que :

$$X^n = \pi_A(X)Q(X) + \alpha X + \beta$$

En évaluant aux racines b et λ , on obtient le système :

$$\begin{cases} b^n = \alpha b + \beta \\ \lambda^n = \alpha \lambda + \beta \end{cases}.$$

La résolution donne :

$$\alpha = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{\lambda - b}$$

Comme $\pi_A(A) = 0$, on en déduit :

$$A^n = \alpha A + \beta I = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b} A + \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{\lambda - b} I.$$

(b) On remarque que $J^2 = 3J$. Par récurrence, pour tout $k \geq 1$:

$$J^k = 3^{k-1} J.$$

Comme aJ et bI commutent, la formule de binôme de Newton donne :

$$A^n = (aJ + bI)^n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k (aJ)^k (bI)^{n-k}.$$

$$A^n = \binom{n}{0} b^n I + \sum_{k=1}^n \mathbb{C}_n^k a^k b^{n-k} (3^{k-1} J)$$

$$A^n = b^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{C}_n^k (3a)^k b^{n-k} \right) J$$

En utilisant $\sum_{k=1}^n \mathbb{C}_n^k (3a)^k b^{n-k} = (3a + b)^n - b^n$ et en posant $\lambda = 3a + b$:

$$A^n = b^n I + \frac{\lambda^n - b^n}{3} J$$

EXERCICE 2

Q5. $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine troisième de l'unité. Comme $j \neq 1$:

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - 1}{1 - j} = 0.$$

Soit $P(X) = 2X^2 + X + 3$. On a $P(j) = 2j^2 + j + 3$ et $P(j^2) = 2j^4 + j^2 + 3 = 2j + j^2 + 3$. D'où :

$$P(j)P(j^2) = (3 + j + 2j^2)(3 + 2j + j^2) \tag{1}$$

$$= 9 + 6j + 3j^2 + 3j + 2j^2 + 1 + 6j^2 + 4 + 2j \tag{2}$$

$$= 14 + 11j + 11j^2 = 14 + 11(j + j^2). \tag{3}$$

Comme $j + j^2 = -1$, on a $P(j)P(j^2) = 14 - 11 = 3 \in \mathbf{R}$.

Q6. Le polynôme caractéristique $\chi_J(X) = \det(XI - J)$ se calcule en développant par rapport à la première colonne :

$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}$$

Ainsi, on a bien

$$\chi_J(X) = X \cdot (X^{n-1}) + (-1)^{n+1}(-1) \cdot \det(\text{sous-matrice})$$

$$\chi_J(X) = X^n + (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n-1} = X^n - 1.$$

Q7. On vérifie que $J^k = \begin{pmatrix} O & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$ où $I_p = \mathbf{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Par identification des coefficients, on obtient :

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$$

D'où :

$$A = P(J)$$

La matrice A est donc l'image de la matrice J par le polynôme P .

Ainsi, on a bien

$$\chi_J(X) = X^n - 1$$

.

Q8. Le polynôme caractéristique de J est $X^n - 1$. Ses valeurs propres sont les racines n -ièmes de l'unité $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ces n racines étant distinctes, J est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, donc J est semblable à :

$$\text{diag}(1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

Comme $A = P(J)$, A se diagonalise dans la même base de vecteurs propres que J . Ses valeurs propres sont les images des valeurs propres de J par le polynôme P :

$$\text{Sp}(A) = \{P(1), P(\omega_1), \dots, P(\omega_{n-1})\}$$

A est donc semblable dans $M_n(\mathbf{C})$ à la matrice :

$$D_A = \begin{pmatrix} P(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Q9. D'après les propriétés du déterminant et la diagonalisation de A :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = P(\omega_0) \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)$$

Comme $\omega_0 = 1$, on a :

$$\det(A) = P(1) \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \quad (4)$$

La matrice A est à coefficients réels, donc $\det(A) \in \mathbf{R}$. Le polynôme P est à coefficients réels, donc $P(1) \in \mathbf{R}$.

Si $P(1) \neq 0$, on en déduit que le produit (4) est réel :

$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \frac{\det(A)}{P(1)} \in \mathbf{R}$$

Si $P(1) = 0$, le résultat restant car dans ce cas le produit est nul.

PROBLÈME

Q10. (a) Soit F un sous-espace de dimension finie et $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F . Tout $x \in E$ se décompose de façon unique en $x = p_F(x) + z$ avec $z \in F^\perp$.

Comme $p_F(x) \in F$, on peut l'écrire $p_F(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j e_j$. L'orthogonalité implique que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$\langle x - p_F(x) | e_i \rangle = 0 \iff \langle x, e_i \rangle = \langle p_F(x) | e_i \rangle$$

En remplaçant $p_F(x)$:

$$\langle x|e_i\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^n \lambda_j e_j | e_i \right\rangle = \sum_{j=0}^n \lambda_j \langle e_j | e_i \rangle$$

Par orthonormalité, $\langle e_j | e_i \rangle = \delta_{ij}$, donc :

$$\langle x|e_i\rangle = \lambda_i$$

D'où la formule :

$$p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle e_i.$$

(b) Pour tout $x \in E$, on a la décomposition orthogonale $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$$

Comme $\|x - p_F(x)\|^2 \geq 0$, on en déduit que :

$$\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$$

En utilisant la base orthonormale $(e_0, \dots, e_n)$ de F , on a $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle e_i$. Par propriété des bases orthonormales :

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle^2$$

En remplaçant dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n \langle x|e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Q11. • Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, d'où $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. Ainsi :

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

• Soient $f, g \in E$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on pose $a = f(t)e^{\frac{-t}{2}}$ et $b = g(t)e^{\frac{-t}{2}}$. L'inégalité précédente donne :

$$|f(t)g(t)e^{-t}| \leq \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t} + \frac{1}{2}g(t)^2e^{-t}$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)^2e^{-t}$ et $t \mapsto g(t)^2e^{-t}$ sont intégrables par définition de E . Par comparaison, $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est absolument intégrable, donc intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q12. • E est un sous-ensemble non vide (la fonction nulle est un élément de E) des fonctions continues. Soient $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$(\lambda f + g)^2 e^{-t} = \lambda^2 f^2 e^{-t} + 2\lambda f g e^{-t} + g^2 e^{-t}.$$

Chaque terme est intégrable (par définition de E et d'après **Q11.**), donc par linéarité, $(\lambda f + g) \in E$. E est un sous-espace vectoriel.

• L'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$ est :

◇ Bilinéaire et symétrique par linéarité et commutativité du produit dans $\mathbf{R}$.

◇ Positive puisque $\langle f|f\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2e^{-t}dt \geq 0$.

◇ Définit car si $\langle f|f\rangle = 0$, la fonction sous-signe intégrale étant continue et positive, on a $f(t)^2e^{-t} = 0$ pour tout t , d'où $f = 0$.

C'est donc un produit scalaire.

Q13. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. P est continu sur $[0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, par croissance comparée, $P(t)^2e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt$ converge donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ainsi $F \subset E$, et comme F est un espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de E . D'où :

Q14. (a) D'après la formule de Leibniz, pour $p \leq n$ on a :

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \mathfrak{C}_p^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} e^{-x}$$

Si $p < n$, alors pour tout $k \in [0, p]$, l'exposant $n - k$ est strictement positif ($n - k \geq n - p \geq 1$). Chaque terme de la somme étant proportionnel à x^{n-k} , il s'annule en $x = 0$. On en déduit que pour tout $p < n$:

$$h_n^{(p)}(0) = 0.$$

(b) En utilisant la formule de Leibniz pour $p = n$: $h_n^{(n)}(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \mathfrak{C}_n^k \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^{n-k} x^{n-k}$. Alors

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathfrak{C}_n^k}{(n-k)!} (-1)^{n-k} x^{n-k}.$$

L_n est une somme de monômes, donc $L_n \in \mathbf{R}[X]$ et $\deg(L_n) = n$.

Le terme en x^n est obtenu pour $k = 0$, d'où le coefficient dominant de L_n :

$$\frac{1}{n!} \binom{n}{0} \frac{n!}{n!} (-1)^n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Q15. Soit g un élément de $\mathbf{R}[X]$.

• **Expression de $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$:** Par définition, on a :

$$\langle g | h_n^{(n)} \rangle = \int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) e^{-t} dt$$

En effectuant n intégrations par parties successives sur l'intégrale (en supposant que les termes de bord s'annulent grâce à $h_n^{(p)}(0) = 0$ pour $p < n$ et la décroissance de l'exponentielle à l'infini), on obtient :

D'où l'expression demandée :

$$\langle g | h_n^{(n)} \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$$

• **Expression de $\langle g | L_n \rangle$:** Utilisons la définition $L_n(t) = \frac{e^t}{n!} h_n^{(n)}(t)$ dans le produit scalaire de E :

$$\langle g | L_n \rangle = \int_0^{+\infty} g(t) \left(\frac{e^t}{n!} h_n^{(n)}(t) \right) e^{-t} dt$$

Les termes e^t et e^{-t} se simplifient, il reste :

$$\langle g | L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt$$

En appliquant le résultat des n intégrations par parties trouvé juste au-dessus :

$$\langle g | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$$

Comme $h_n(t) = t^n e^{-t}$, on obtient l'expression finale :

$$\langle g | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt.$$

Q16. Soient i et j deux entiers tels que $i < j$. En utilisant le résultat de la question **Q15.** avec $g = L_i$ et $n = j$:

$$\langle L_i | L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t) t^j e^{-t} dt$$

Or, d'après la question **Q14. b)**, $\deg(L_i) = i$. Comme $i < j$, la dérivée d'ordre j d'un polynôme de degré i est nulle ($L_i^{(j)} = 0$). La fonction sous-signe intégrale est donc nul, d'où :

$$\langle L_i | L_j \rangle = 0.$$

Q17. Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n! \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = n!.$$

D'après **Q15.** avec $g = L_n$, et comme $L_n^{(n)} = (-1)^n$ (dérivée du terme dominant) :

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-t} dt$$

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^{2n}}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \times n! = 1$$

On en conclut que $\|L_n\| = 1$.

Q18. D'après les questions **Q16.** et **Q17.**, la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormée. Comme son cardinal est $n+1 = \dim(F)$, c'est une base orthonormée de $F = \mathbf{R}_n[X]$.

Pour tout élément g de E , le projeté orthogonal de g sur F s'exprime dans cette base par la formule :

$$p_F(g) = \sum_{k=0}^n \langle g | L_k \rangle L_k$$

Q19. Soit $g \in E$. D'après l'inégalité de Bessel (**Q10. b**), pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{n=0}^N \langle g | L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2$$

La suite des sommes partielles est croissante (car les termes sont positifs) et majorée par $\|g\|^2$. Elle converge donc, ce qui assure la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$.

Par passage à la limite dans l'inégalité de Bessel, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2 \leq \|g\|^2.$$

Q20. g_α est continue sur $[0, +\infty[$. On étudie l'intégrabilité de $t \mapsto g_\alpha(t)^2 e^{-t}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt$$

L'intégrale converge car $2\alpha + 1 > 0$ (puisque $\alpha > -\frac{1}{2}$). Donc $g_\alpha \in E$.

D'après la question **Q15.** et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\langle g_\alpha | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} (-\alpha)^n e^{-\alpha t} t^n e^{-t} dt = \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(\alpha+1)t} dt.$$

Par changement de variable $u = (\alpha + 1)t$, on obtient :

$$\langle g_\alpha | L_n \rangle = \frac{\alpha^n}{n!(\alpha + 1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{\alpha^n}{(\alpha + 1)^{n+1}}$$

On calcule la somme de la série géométrique :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha^2)^n}{(\alpha + 1)^{2n+2}} = \frac{1}{(\alpha + 1)^2} \frac{1}{1 - \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2}} \\ &= \frac{1}{(\alpha + 1)^2} \frac{(\alpha + 1)^2}{(\alpha + 1)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha + 1} \end{aligned}$$

Comme $\|g_\alpha\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt = \frac{1}{2\alpha + 1}$, l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$ est établie.

• • • • •