

CONCOURS COMMUN INP 2026
Épreuve de mathématiques II, MP, quatre heures
(corrigé)

EXERCICE 1

Q1. On a : $\text{rang}(J) = \dim \left(\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1$.

La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable par le théorème spectral. Déterminons une matrice diagonale qui lui est semblable : cela revient à déterminer ses valeurs propres avec leurs multiplicités.

Par le théorème du rang : $\dim(\ker(J)) = 2$, donc 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité 2 : il ne reste plus qu'une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, nécessairement simple, à déterminer.

On la trouve en écrivant que la trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicités, donc : $3 = \text{tr}(J) = 0 \times 2 + \lambda$, d'où : $\lambda = 3$.

En résumé, 0 est valeur propre double et 3 valeur propre simple, donc J est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q2. On reprend la notation D de la question précédente. Soit $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $J = PDP^{-1}$. On a : $A = aJ + bI_3 = P(aD + bI_3)P^{-1}$, donc A est semblable à la matrice diagonale :

$$aD + bI_3 = \begin{pmatrix} 3a + b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Q3. Par la question précédente, la matrice A est diagonalisable et son spectre est $\{b, 3a + b\}$ (les deux valeurs propres sont bien distinctes puisque a est supposé non nul). Par le critère polynomial de diagonalisation, on a donc bien : $\pi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} (X - \lambda) = (X - b)(X - 3a - b)$.

Q4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de division euclidienne, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que : $X^n = \pi_A Q + R$, avec : $\deg(R) < 2$. On peut écrire : $R = \alpha X + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant l'égalité de division euclidienne en les racines b et $\lambda = 3a + b$ de π_A , on obtient le système :

$$\begin{cases} b^n &= \alpha b + \beta, \\ \lambda^n &= \alpha \lambda + \beta. \end{cases}$$

La résolution donne :

$$\alpha = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b}, \quad \text{et} : \quad \beta = \frac{b\lambda^n - \lambda b^n}{b - \lambda}.$$

On en déduit :

$$A^n = \pi_A(A)Q(A) + R(A) = \frac{\lambda^n - b^n}{\lambda - b}A + \frac{b\lambda^n - \lambda b^n}{b - \lambda}I_3.$$

(b) On a immédiatement : $J^2 = 3J$. On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $J^{k+1} = 3J^k$, et par une récurrence facile :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad J^k = 3^{k-1}J.$$

Les matrices J et I_3 commutent, donc par la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aJ)^k (bI_3)^{n-k} = b^n I_3 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} J,$$

avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} - b^n = (3a+b)^n - b^n,$$

d'où le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = b^n I_3 + \frac{(3a+b)^n - b^n}{3} J.$$

EXERCICE 2

Q5. Comme j est différent de 1, on a : $1 + j + j^2 = \frac{j^3-1}{j-1} = 0$.

Considérons $P \in \mathbb{R}[X]$ (on n'a même pas besoin qu'il soit de degré 2, généralisant là la consigne de l'énoncé). Démontrons que $P(j)P(j^2)$ est un nombre réel. On a : $j^2 = \bar{j}$ (résulte aisément de $1 = j^3 = |j|^2$). Par conséquent :

$$P(j)P(j^2) = P(j)P(\bar{j}) \stackrel{(P \in \mathbb{R}[X])}{=} P(j)\overline{P(j)} = |P(j)|^2 \in \mathbb{R},$$

d'où (*).

Remarque. Cet argument s'adapte à n quelconque. En effet, comme P est à coefficients réels :

$$\overline{\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)} = \prod_{k=1}^{n-1} \overline{P(\omega_k)} = \prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{\omega_k}) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} P(\overline{\omega}),$$

or l'application $z \mapsto \bar{z}$ est une bijection de $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ dans lui-même (de réciproque elle-même), donc le calcul ci-dessus peut se poursuivre en écrivant :

$$\overline{\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k)} = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} P(\omega) = \prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k).$$

Un nombre invariant par conjugaison complexe est réel, d'où le résultat : $\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}$. Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, de borner le degré de P par $n-1$.

Les questions suivantes seraient donc évitables si le seul et unique objectif de l'exercice était de démontrer (*); évidemment, son intérêt est ailleurs, et nous allons démontrer (*) en respectant la progression des questions.

Q6. Si $(E_1, \dots, E_n)$ désigne la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on constate que l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad JE_i = E_{i-1}, \quad JE_1 = E_n.$$

Par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad J^k E_i = \begin{cases} E_{n+i-k} & \text{si } i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \\ E_{i-k} & \text{sinon,} \end{cases}$$

En particulier : $J^n = I_n$, donc π_J divise $X^n - 1$.

On en déduit aussi que la famille $(E_n, JE_n, \dots, J^{n-1}E_n) = (E_n, E_{n-1}, \dots, E_1)$ est libre. Par conséquent le polynôme minimal de J est de degré strictement supérieur à $n-1$ (sinon, l'égalité $\pi_J(J)E_n = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ donnerait une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille $(E_n, JE_n, \dots, J^{n-1}E_n)$). Ainsi π_J divise $X^n - 1$ et est de degré au moins n , donc : $\pi_J = X^n - 1$.

Or, par le théorème de Cayley-Hamilton, π_J divise χ_J . Comme ils sont unitaires et de même degré, on conclut : $\chi_J = \pi_J = X^n - 1$.

Autre démonstration. On peut effectuer l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{i=2}^n X^{i-1}C_i$ pour avoir :

$$\chi_J = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ X^n - 1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}(X^n - 1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ X & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = X^n - 1.$$

L'approche ci-dessus permet néanmoins d'anticiper sur la question suivante.

Q7. Le calcul de $J^k E_i$, dans la question précédente, permet d'en déduire, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$J^k = \begin{pmatrix} 0_{M_{n-k,k}(\mathbb{C})} & I_{n-k} \\ I_k & 0_{M_{k,n-k}(\mathbb{C})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 1 \\ 1 & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n-k \text{ lignes} \\ \downarrow k \text{ lignes} \end{matrix}$$

$\xleftarrow{k \text{ col.}} \quad \xrightarrow{n-k \text{ col.}}$

puis :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = P(J).$$

(L'énoncé n'exigeait pas le détail des calculs.)

Q8. On a : $\chi_J = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$. Ainsi χ_J est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc J est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$J = Q \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-1} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Notons D la matrice diagonale ci-dessus. On déduit une diagonalisation de A ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q D^k Q^{-1} \\ &= Q \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_0^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_1^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_{n-1}^k \end{pmatrix} Q^{-1} \end{aligned}$$

$$= Q \begin{pmatrix} P(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Q9. Des matrices semblables ont le même déterminant. Donc, par la question précédente :

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k).$$

Or A est à coefficients réels, donc : $\det(A) \in \mathbb{R}$. On en déduit :

$$\prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.$$

Ceci vaut pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Dédoublons-en (*). Si $P(\omega_0) = P(1) \in \mathbb{R}$ n'est pas nul, il suffit de diviser par $P(1)$ le produit précédent. Comme $\mathbb{R}$ est un corps :

$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \frac{1}{P(1)} \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}.$$

Pour en déduire le résultat sans hypothèse sur P , nous proposons deux approches qui nous ramènent au cas précédent.

Première approche, analytique. Si $P(1) = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ le polynôme $P_\varepsilon = P + \varepsilon$ est un polynôme réel de degré au plus $n - 1$, qui vérifie : $P_\varepsilon(1) = \varepsilon \neq 0$. Par ce qui précède :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \prod_{k=1}^{n-1} (P(\omega_k) + \varepsilon) = \prod_{k=1}^{n-1} P_\varepsilon(\omega_k) \in \mathbb{R}.$$

On prend la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{C}$ (en tant que sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie), on en déduit : $\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) \in \mathbb{R}$. Ainsi (*) est vrai, que $P(1)$ soit nul ou non.

Deuxième approche, algébrique. Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors (*) est trivial. Supposons P non nul. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P = (X - 1)^m Q$, et : $Q(1) \neq 0$. Le polynôme Q est réel de degré au plus $n - 1$ (car P l'est), donc on peut lui appliquer ce qui précède. On a : $\prod_{k=1}^{n-1} Q(\omega_k) \in \mathbb{R}$.

Or :

$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1)^m \prod_{k=1}^{n-1} Q(\omega_k) = \left((-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) \right)^m \prod_{k=1}^{n-1} Q(\omega_k),$$

et on sait que l'on a : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$, donc : $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k) = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. En évaluant en 1 cette dernière égalité, on en déduit :

$$\prod_{k=1}^{n-1} P(\omega_k) = \left((-1)^{n-1} n \right)^m \prod_{k=1}^{n-1} Q(\omega_k) \in \mathbb{R},$$

d'où le résultat.

On a conclu dans tous les cas.

Remarque. L'identité $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = n$ peut aussi se démontrer en remarquant qu'il s'agit de la dérivée de $X^n - 1$ en 1.

PROBLÈME

Q10. (a) Posons $y = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$ et démontrons que ce vecteur vérifie bien la propriété d'unicité caractérisant $p_F(x)$.

Comme les e_i sont tous dans F , qui est un espace vectoriel, on a bien : $y \in F$. De plus, comme $(e_0, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée, on a : $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker), donc :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle x - y | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle - \langle y | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle - \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle \langle e_i | e_j \rangle = \langle x | e_j \rangle - \langle x | e_j \rangle = 0,$$

donc $x - y$ est orthogonal à tous les vecteurs de $(e_0, \dots, e_n)$, qui engendrent F . C'est-à-dire : $x - y \in F^\perp$.

En résumé : $y \in F$, et : $x - y \in F^\perp$, donc par unicité du projeté orthogonal :

$$p_F(x) = y = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i.$$

(b) Soit $x \in E$. Comme $p_F(x)$ est dans F et $x - p_F(x)$ dans $F^\perp$, ces deux vecteurs sont orthogonaux. On en déduit, par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2,$$

d'où la première inégalité (dite de Bessel).

Par orthonormalité de $(e_0, \dots, e_n)$ et le théorème de Pythagore, on a :

$$\|p_F(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2.$$

Combiné à l'inégalité ci-dessus, cela nous donne la seconde inégalité de l'énoncé :

$$\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Q11. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a : $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, donc en développant ce carré et en isolant $|ab|$, on a bien :

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

En utilisant cette inégalité avec $a = f(t)$ et $b = g(t)$, où f et g sont deux fonctions de E , on obtient :

$$\forall t \in I, \quad |f(t)g(t)|e^{-t} \leq \frac{1}{2}f(t)^2e^{-t} + \frac{1}{2}g(t)^2e^{-t}.$$

Ainsi $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est continue sur I (c'est un produit de fonctions continues) et dominée par une combinaison linéaire de fonctions intégrables : elle est intégrable sur I par le théorème de comparaison des fonctions intégrables.

Q12. Il est clair que E est inclus dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^I$ et qu'il n'est pas vide : il contient la fonction nulle. Démontrons qu'il est stable par combinaison linéaire.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. On a :

$$\forall t \in I, \quad (f(t) + \lambda g(t))^2 e^{-t} = (f(t))^2 e^{-t} + 2\lambda f(t)g(t)e^{-t} + \lambda^2 g(t)^2 e^{-t}.$$

On reconnaît une combinaison linéaire de trois fonctions intégrables (pour la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$, cela résulte de la question précédente), donc $t \mapsto (f(t) + \lambda g(t))^2 e^{-t}$ est intégrable sur I . D'où : $f + \lambda g \in E$.

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$, donc un espace vectoriel.

Vérifions que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E . Il est correctement défini d'après la question précédente, bilinéaire par linéarité de l'intégrale et distributivité du produit par rapport à l'addition, symétrique par commutativité du produit de fonctions réelles. Il reste à vérifier la positivité et le caractère défini.

Soit $f \in E$. La fonction exponentielle est positive et f^2 aussi (puisque f est à valeurs réelles), donc par croissance de l'intégrale on a : $\langle f | f \rangle = \int_I (f(t))^2 e^{-t} dt \geq 0$. De plus, l'intégrande étant continu et positif, on a par séparation de l'intégrale :

$$\langle f | f \rangle = 0 \iff \forall t \in I, (f(t))^2 e^{-t} = 0 \iff \forall t \in I, (f(t))^2 = 0 \iff f = 0,$$

puisque l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est un produit scalaire.

Q13. L'énoncé voulait sans doute dire qu'on identifie $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales sur I (au lieu de $\mathbb{R}$).

On sait déjà que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$, au même titre que E . Il s'agit seulement de vérifier que l'on a : $F \subseteq E$.

Soit $P \in F$. Une application polynomiale est continue sur I . De plus, par le théorème des croissances comparées : $(P(t))^2 e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. Comme la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de l'infini (on a : $2 > 1$), par comparaison il en est de même de $t \mapsto (P(t))^2 e^{-t}$, d'où le résultat : $P \in E$. Ceci vaut pour tout $P \in F$, donc F est bien un sous-espace vectoriel de E .

Q14. (a) Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n, g(x) = e^{-x}$ (de sorte que : $h_n = f \cdot g$). Ces deux fonctions sont dérivables et on a :

$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(p)}(x) = \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}, \quad g^{(p)}(x) = (-1)^p e^{-x}.$$

Par la formule de dérivation de Leibniz, on a pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)}(x) g^{(p-k)}(x) = n! \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} e^{-x}.$$

Si $p < n$, alors pour tout entier $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ on a : $n - k \geq p + 1 - k \geq 1$, donc X^{n-k} admet 0 pour racine. On en déduit :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad h_n^{(p)}(0) = 0.$$

(b) Le calcul de la question précédente donne directement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}.$$

On a donc : $L_n \in \mathbb{R}[X]$. Il est de degré n et son coefficient dominant est obtenu pour $k = 0$ dans cette somme : il est égal à $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Q15. Notons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) dt$ converge par la question **Q13**, puisque son intégrande est un produit de deux polynômes et de $t \mapsto e^{-t}$.

Posons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$P_k : \ll \int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t)dt \gg.$$

Nous allons démontrer que P_k est vrai pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par récurrence sur k .

On a P_0 . Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On suppose P_k . Intégrons par parties l'intégrale $\int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t)dt$, en dérivant $g^{(k)}$ et en intégrant $h_n^{(n-k)}$ (on choisit pour primitive $h_n^{(n-k-1)}$). Pour intégrer par parties, on doit s'assurer de l'existence de la limite quand $t \rightarrow +\infty$ de $g^{(k)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t)$. Par la question **Q14.(a)**, l'application $h_n^{(n-k-1)}$ est de la forme $t \mapsto P(t)e^{-t}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Or on a aussi $g^{(k)} \in \mathbb{R}[X]$ puisque g est polynomiale par hypothèse, donc par le théorème des croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g^{(k)}(t)P(t)e^{-t} = 0.$$

Par la formule de l'intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t)dt$ converge (ce qu'on savait déjà) et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t)dt &= \left[g^{(k)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t)dt \\ &= - \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t)dt. \end{aligned} \quad (\text{Q14.(a)})$$

Par hypothèse de récurrence P_k , on a donc :

$$\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)h_n^{(n-k)}(t)dt = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)h_n^{(n-k-1)}(t)dt,$$

d'où P_{k+1} .

Par principe de récurrence, on a P_k pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier, pour $k = n$:

$$\int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)dt.$$

Or, par définition de L_n :

$$\langle g \mid L_n \rangle = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} g(t)h_n^{(n)}(t)dt,$$

donc par le calcul qui précède :

$$\langle g \mid L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)h_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)t^n e^{-t}dt,$$

d'où le résultat.

Q16. Par la question **Q14.(b)**, pour que L_i et L_j soient deux éléments de F , il suffit de prendre i et j inférieurs ou égaux à n .

Ceci étant dit, on applique la question précédente en remplaçant n par j dans le raisonnement, et en posant $g = L_i \in \mathbb{R}[X]$. Comme L_i est de degré $i < j$ par la question **Q14.(b)**, on a : $L_i^{(j)} = 0$. On en déduit :

$$\langle L_i \mid L_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} L_i^{(j)}(t)t^j e^{-t}dt = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^{+\infty} 0dt = 0.$$

Remarque. Par symétrie du produit scalaire, on a également $\langle L_i \mid L_j \rangle = 0$ si $i > j$, donc finalement dès que i et j sont distincts. On utilisera cette observation dans la question **Q18**.

Q17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On intègre par parties Γ_{n+1} , en dérivant $t \mapsto t^{n+1}$ et en intégrant $t \mapsto e^{-t}$. Par croissances comparées : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -t^{n+1}e^{-t} = 0$, donc la formule de l'intégration par parties est licite et on a :

$$\Gamma_{n+1} = \left[-t^{n+1}e^{-t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n(-e^{-t})dt = (n+1)\Gamma_n.$$

Ceci vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n > 0$ (l'application $t \mapsto t^n e^{-t}$ est positive, continue et non identiquement nulle sur I), on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\Gamma_n}{\Gamma_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma_{k+1}}{\Gamma_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = n!,$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n = n!\Gamma_0 = n!$ (on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$).

Par la question **Q14.(b)**, on a : $L_n^{(n)} = (-1)^n$. Donc, par la question **Q15** et le calcul qu'on vient d'effectuer :

$$\langle L_n | L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \Gamma_n = 1.$$

Q18. Les deux questions précédentes démontrent que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad \langle L_i | L_j \rangle = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

donc la famille $(L_0, \dots, L_n)$, effectivement incluse dans F par la question **Q14.(b)**, en est une famille orthonormée. Son cardinal est égal à la dimension de F , donc c'en est plus précisément une base orthonormée.

Le projeté orthogonal de $g \in E$ sur F est donc, par la question **Q10.(a)** :

$$p_F(g) = \sum_{k=0}^n \langle g | L_k \rangle L_k.$$

Q19. Soit $g \in E$. Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de F , par la question **Q10.(b)** on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \langle g | L_k \rangle^2 \leq \langle g | g \rangle.$$

La série $\sum_{k \geq 0} \langle g | L_k \rangle^2$ est donc à termes positifs et majorée : elle converge.

Quand $n \rightarrow +\infty$, l'inégalité ci-dessus donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \langle g | L_k \rangle^2 \leq \langle g | g \rangle.$$

Q20. Soit $\alpha > -\frac{1}{2}$ (et non $\alpha \in \mathbb{R}$ comme le prétend l'énoncé). On a :

$$\forall t \in I, \quad (g_\alpha(t))^2 e^{-t} = e^{-(2\alpha+1)t}.$$

On a : $2\alpha + 1 > 0$, donc cette fonction est bien intégrable et on a : $g_\alpha \in E$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\langle g_\alpha \mid L_n \rangle = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} e^{-(\alpha+1)t} dt \quad (\text{Q14.(b)})$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(\alpha+1)^{n-k+1} (n-k)!} \binom{n}{k} \int_0^{+\infty} u^{n-k} e^{-u} du \quad (u = (\alpha+1)t)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(\alpha+1)^{n-k+1}} \binom{n}{k} \quad (\text{Q17})$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)^n. \quad (\text{binôme de Newton})$$

Or : $1 - \frac{1}{1/2} \leq 1 - \frac{1}{\alpha+1} < 1$, donc : $\left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)^2 \in]-1, 1[$. On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \mid L_n \rangle^2 = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)^{2n} = \frac{1}{(\alpha+1)^2} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)^2} = \frac{1}{(\alpha+1)^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha+1}.$$

De plus :

$$\langle g_\alpha \mid g_\alpha \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-(2\alpha+1)t} dt = \left[-\frac{e^{-(2\alpha+1)t}}{2\alpha+1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha+1},$$

donc on a bien l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \mid L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2.$$